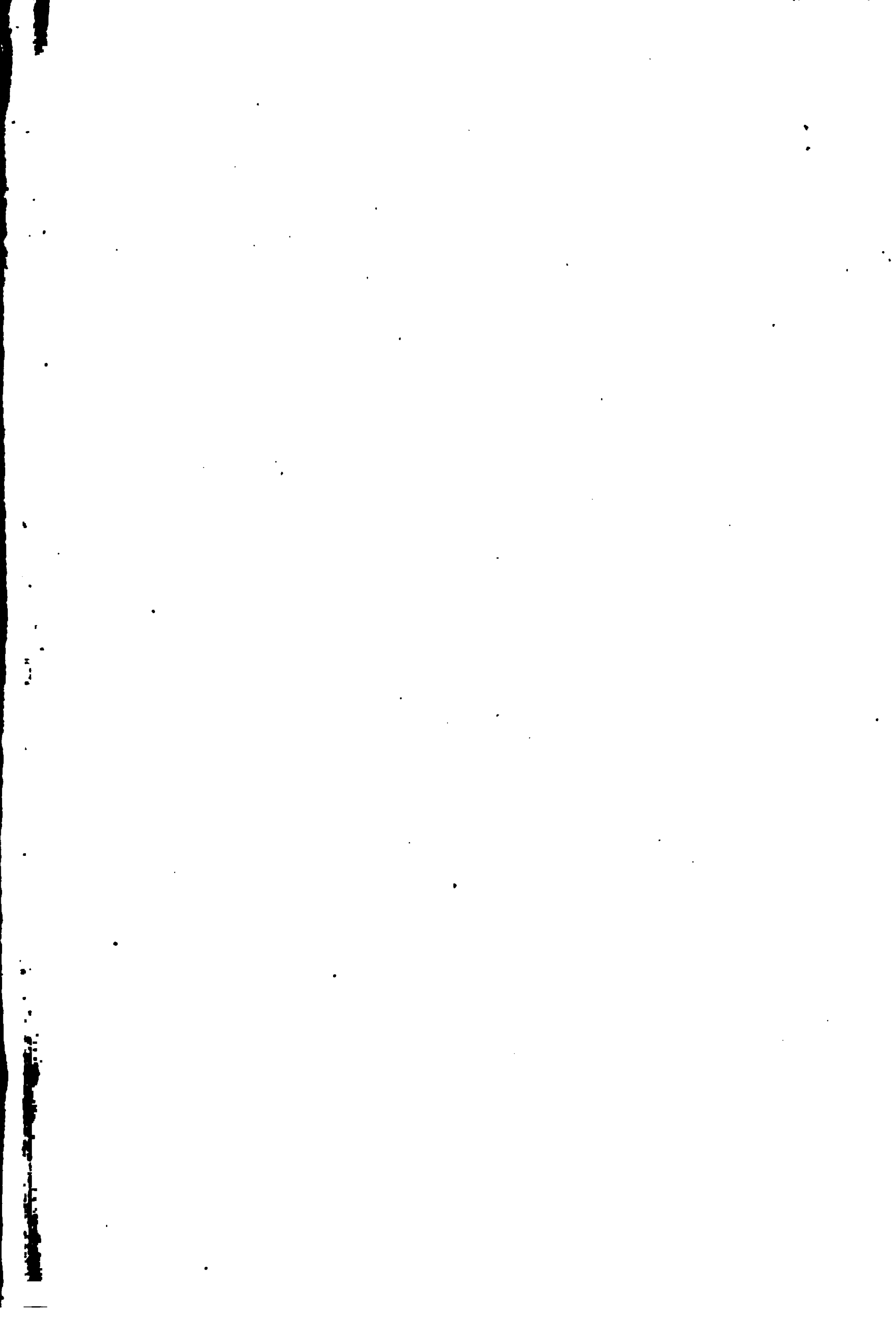
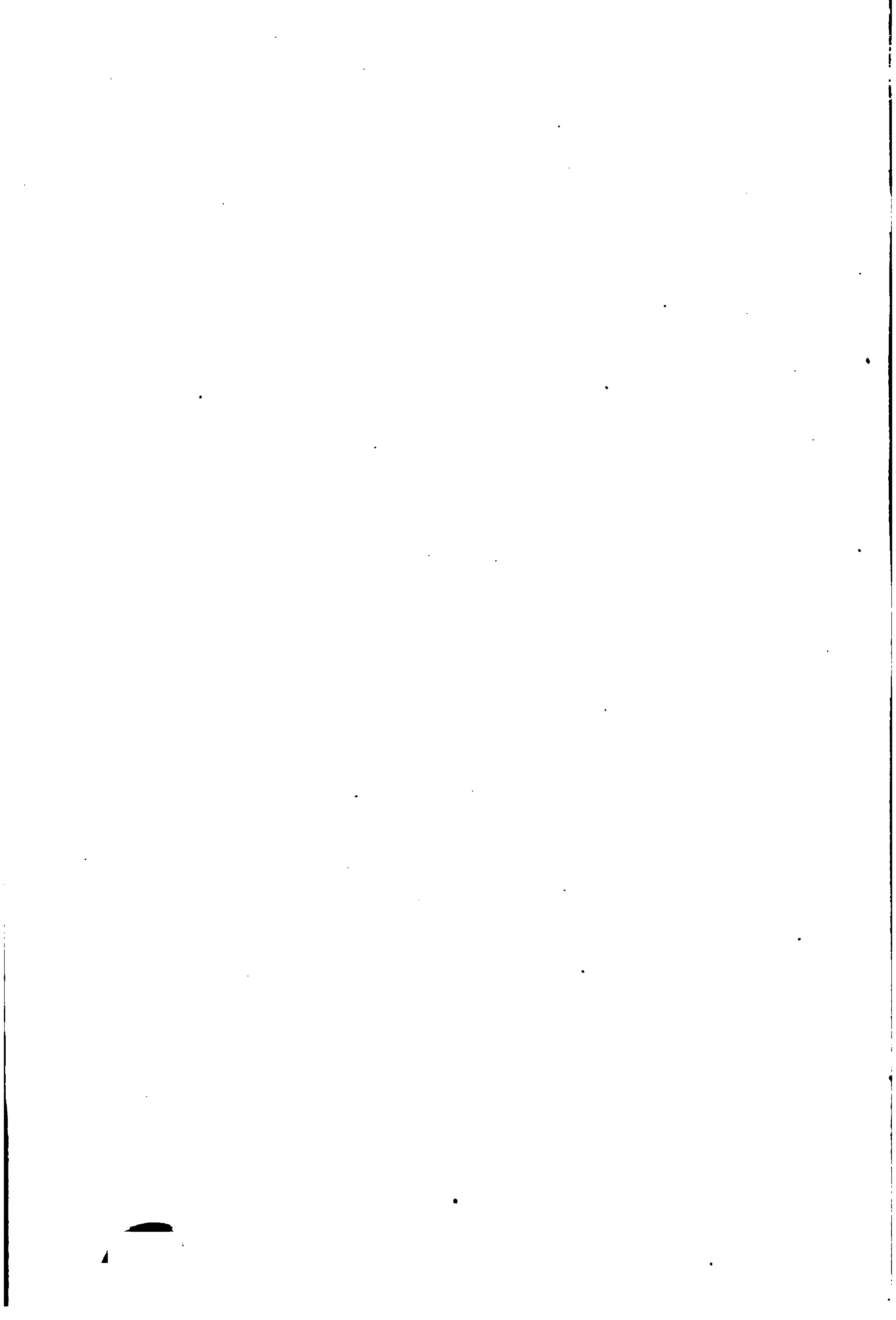




Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXVIII. Jahrgang.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1883.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis. Seite

Synthetische und analytische Geometrie.

Mechanik.

Optik.

Wärmelehre und Molecularphysik.

I.

Die sechzehn Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Von

ERNST LANGE

in Leipzig.

Hierzu Taf. I Fig. 1—3.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat diejenigen Raumcurven vierter Ordnung zum Gegenstand, welche den vollen Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung bilden, und welche man gewöhnlich als Raumcurven vierter Ordnung erster Species bezeichnet findet. Sie haben das Geschlecht 1 und zeichnen sich unter allen Raumcurven dieses Geschlechtes dadurch aus, dass sie die niedrigste Ordnung besitzen. Darum treten sie in Analogie mit den allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung, welche für das zweidimensionale Gebiet bekanntlich dieselbe Stellung einnehmen. Diese Analogie lässt sich in vielen Eigenschaften wiedererkennen, und gerade auf diese bezieht sich die gegenwärtige Arbeit. Den 3^2 Wendepunkten der ebenen Curven dritter Ordnung nämlich entsprechen diejenigen 4^2 Punkte der genannten Raumcurven vierter Ordnung, in denen sie vierpunktig berührende Osculationsebenen besitzen, und welche als Wendeberührungspunkte bezeichnet werden. Die interessanten Gruppirungseigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung sind durch Plücker und Hesse klargelegt worden und haben seitdem Anregung und Grundlage für manche neuere Arbeit abgegeben. Ganz analoge Verhältnisse finden sich bei den sechzehn Wendeberührungspunkten wieder, doch sind sie bis jetzt noch nicht erschöpfend untersucht worden; diese Aufgabe zu erledigen ist der Zweck des zweiten Capitels der gegenwärtigen Arbeit. Es empfiehlt sich nicht, für diese Untersuchungen die analytische Geometrie zu benutzen, weil die Anwendung der elliptischen Functionen, welche Clebsch die mathematische Welt gelehrt hat, weit leichter zum Ziele führt. Besonders ist es immer die von Clebsch aufgestellte geometrische Form des Abel'schen Theorems, welche sich als fruchtbarstes Hilfsmittel erweist. Um über die grossen Zahlen geometrischer Gebilde, welche dabei auftreten, Uebersicht zu behalten, habe ich mich der Gruppentheorie bedient; so ist es zu erklären, dass das erste Capitel der Arbeit durchaus gruppentheoretischen Ueberlegungen gewidmet ist.

Die Raumcurven vierter Ordnung lassen sich auf verschiedene Weisen durch elliptische Functionen darstellen; ich habe mich der von Herrn Killing gegebenen Darstellung durch σ-Functionen angeschlossen. Wie anfangs die elliptischen Functionen zur Darstellung der Curve und also zur Aufstellung geometrischer Sätze dienen, so werfen in der Folge umgekehrt die geometrischen und gruppentheoretischen Wahrheiten Licht auf die Theorie der σ-Functionen. Durch sie wird Uebersichtlichkeit und eine neue Begründung für eine grosse Anzahl von σ-Relationen gewonnen. Diesen Entwickelungen ist das dritte Capitel gewidmet.

Erstes Capitel.
Gruppentheoretische Hilfsmittel.

§ 1. Einleitendes.

Mit den in der Einleitung erwähnten Gruppirungsverhältnissen, welche die Wendepunkte der ebenen Curven dritter Ordnung aufweisen, hat sich wohl zuerst mit Erfolg Maclaurin beschäftigt; ihm verdanken wir den grundlegenden Satz, dass eine Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, nothwendig noch durch den dritten geht — *den* dritten, denn Maclaurin kannte nur die reellen Wendepunkte (De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, p. 231). Plücker, der überhaupt zuerst 9 als wahre Zahl der Wendepunkte aufstellte, zeigte dann, dass dieser Satz allgemein gilt, und dass also jede Curve zwölf Wendelinien besitzt, d. h. Gerade, welche drei Wendepunkte verbinden (System der anal. Geom., S. 283 und 284). Hieran anknüpfend fand Hesse, dass diese zwölf Geraden sich gerade zu vier Dreiecken anordnen lassen, welche alle neun Punkte auf sich tragen, und zeigte auf Grund dessen die Lösbarkeit der Gleichung neunten Grades, auf welche die Berechnung der Wendepunkte führt (Crelle's Journal Bd. 28, S. 68—107). Den Wendelinien entsprechen bei unseren Raumcurven Wendeebenen, d. h. Ebenen, welche vier Wendeberührungspunkte enthalten; den Wendedreiecken entsprechen Wendetetraeder, d. h. Tetraeder, die aus vier Wendeebenen derart zusammengesetzt sind, dass sie alle 16 Wendeberührungspunkte auf sich tragen. Die Zahlen der Wendelinien und Wendedreiecke sind gering, und diese zweierlei Gebilde sind unter einander gleichberechtigt. Anderes haben wir für die analogen Gebilde bei den Raumcurven zu erwarten: sie sind sehr zahlreich und scheiden sich in mehrere verschiedene Classen. Ueber diese zahlreichen Gebilde nun in der Weise Uebersicht zu behalten, dass wir nur wenige Repräsentanten ins Auge zu fassen haben und die übrigen aus ihnen leicht ableiten können, wird uns die Gruppentheorie ermöglichen; darum führen wir sie jetzt ein.

Wir legen in dieser Arbeit die Killing'sche* Darstellung unserer Curven:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sigma(2v) : \sigma_1(2v) : \sigma_2(2v) : \sigma_3(2v)$$

zu Grunde, bei welcher die vier Coordinatenebenen sich zum Polartetraeder für das durch die Curve bestimmte Flächenbüschel zweiter Ordnung zusammensetzen. Während das Argument v alle Werthe innerhalb des Periodenparallelogramms mit den Seiten 2ω und $2\omega'$ einmal durchwandert, beschreibt der durch die definirende Proportion bestimmte Punkt gerade unsere Raumcurve einmal. Alle homologen Punkte der v-Ebene in den verschiedenen Periodenparallelogrammen, also alle Werthe v, welche *mod* 2ω, $2\omega'$ congruent sind, liefern denselben Curvenpunkt, denn die Werthe der vier σ-Functionen für zwei solche Argumente unterscheiden sich um dieselben Factoren, die sich also wegen der Proportionalität wegheben; wir werden immer Argumente im ersten Parallelogramm mit den Ecken 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$ schreiben.

Die Darstellung ist — und das ist von besonderer Wichtigkeit — so normirt, dass die Summe der Argumente von vier Punkten der Curve, die in einer Ebene liegen, ein Periodenvielfaches ist, also in Formel:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \equiv 0, \quad mod\ 2\omega,\ 2\omega'$$

(Abel'sches Theorem in besonderer Gestalt. Alle diese Thatsachen sind in der Killing'schen Dissertation begründet, und wir haben darum nur nöthig, sie hier zu citiren).

Der letztere Satz lässt uns sofort erkennen, dass zu den Wendeberührungspunkten Argumente v gehören, für welche gilt:

$$4v \equiv 0 \ mod\ 2\omega,\ 2\omega',$$

und solcher giebt es im Periodenparallelogramm eben 16. Für diese Werthe von v verschwindet, wie bekannt, je eine der σ-Functionen des doppelten Argumentes $2v$, und so bestätigt uns ein Blick auf die definirende Proportion den bekannten Satz, dass die Curve das Polartetraeder des zugehörigen Flächenbüschels (also hier das Coordinatentetraeder) gerade in den 16 Wendeberührungspunkten durchsticht. Wir zählen einmal alle diese Punkte, nach den Tetraederebenen I, II, III, IV geordnet und innerhalb derselben durch arabische Ziffern unterschieden, mit ihren Coordinatenwerthen auf, um sie für das Folgende vor Augen zu haben:

$$\begin{array}{llll}
I_1. & v = 0.\omega + 0.\omega', & x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : & 1 : \quad 1 : \quad 1; \\
I_2. & v = \omega + \omega', & x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : & 1 : -1 : \quad 1; \\
I_3. & v = \omega, & x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : & -1 : \quad 1 : \quad 1; \\
I_4. & v = \omega', & x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : & 1 : \quad 1 : -1.
\end{array}$$

* Killing, Der Flächenbüschel zweiter Ordnung, Dissertation, Berlin 1872.

$$\text{II}_1.\quad v=\frac{\omega}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=\ \ 1:0:+\sqrt{e_1-e_2}:+\sqrt{e_1-e_3};$$

$$\text{II}_2.\quad v=3\frac{\omega}{2}+\omega',\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:0:-\sqrt{e_1-e_2}:+\sqrt{e_1-e_3};$$

$$\text{II}_3.\quad v=3\frac{\omega}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:0:+\sqrt{e_1-e_2}:+\sqrt{e_1-e_3};$$

$$\text{II}_4.\quad v=\frac{\omega}{2}+\omega',\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:0:+\sqrt{e_1-e_2}:-\sqrt{e_1-e_3}.$$

$$\text{III}_1.\quad v=\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=\ \ 1:+\sqrt{e_2-e_1}:0:+\sqrt{e_2-e_3};$$

$$\text{III}_2.\quad v=3\frac{\omega}{2}+3\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:+\sqrt{e_2-e_1}:0:+\sqrt{e_2-e_3};$$

$$\text{III}_3.\quad v=3\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:-\sqrt{e_2-e_1}:0:+\sqrt{e_2-e_3};$$

$$\text{III}_4.\quad v=\frac{\omega}{2}+3\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:+\sqrt{e_2-e_1}:0:-\sqrt{e_2-e_3}.$$

$$\text{IV}_1.\quad v=\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=\ \ 1:+\sqrt{e_3-e_1}:+\sqrt{e_3-e_2}:0;$$

$$\text{IV}_2.\quad v=\omega+3\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:+\sqrt{e_3-e_1}:-\sqrt{e_3-e_2}:0;$$

$$\text{IV}_3.\quad v=\omega+\frac{\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:-\sqrt{e_3-e_1}:+\sqrt{e_3-e_2}:0;$$

$$\text{IV}_4.\quad v=\frac{3\,\omega'}{2},\qquad x_0:x_1:x_2:x_3=-1:+\sqrt{e_3-e_1}:+\sqrt{e_3-e_2}:0.$$

Die Grössen e_1, e_2, e_3 sind, wie bekannt, durch die Relation:

$$e_1+e_2+e_3=0$$

verbunden und vertreten in homogener Weise den gewöhnlich mit k^2 bezeichneten Modul des elliptischen Integrals.

§ 2. Transformationen.

1. Einführung derselben und Ableitung ihrer wesentlichsten Eigenschaften.

Wir kommen nun dazu, eine Gruppe von Transformationen zu betrachten, welche schon Herr Harnack in einer Arbeit über denselben Gegenstand, Mathem. Annalen, Bd. XII, S. 81, behandelt hat. Unterwerfen wir das Argumentensystem für die Punkte unserer Curve den Transformationen

$$v'=\pm v+a\frac{\omega}{2}+b\frac{\omega'}{2},$$

in welchen a und b ganze Zahlen sind, ersetzen wir also jeden Parameter v durch dasjenige v', welches die obige Formel angiebt, so geht offenbar das

ganze Parametersystem in sich über. Da nun alle *mod* 2ω, $2\omega'$ congruenten Argumente demselben Curvenpunkt zugehören, so folgt, dass zwei Transformationen mit den Coefficienten a, b und a_1, b_1, für welche die Relationen bestehen:

$$a \equiv a_1, \quad b \equiv b_1 \ mod\ 4,$$

dieselben Aenderungen herbeiführen. Statt alle Transformationen haben wir also nur nöthig, diejenige endliche Anzahl derselben ins Auge zu fassen, für welche entsprechende Coefficienten *mod* 4 incongruente Zahlen sind. Nun giebt es 16 *mod* 4 verschiedene Zahlenpaare a und b, und da v mit dem doppelten Vorzeichen behaftet ist, so folgt, dass die Zahl der in ihren Wirkungen verschiedenen Transformationen der angegebenen Art 32 ist. Wir schreiben dementsprechend unsere Formeln nicht mehr als Gleichungen, sondern als Congruenzen wie folgt:

$$v' \equiv \pm v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \ mod\ 2\omega,\ 2\omega'.$$

Die Transformationen haben die ausgezeichnete Eigenschaft, dass sie die Argumente der Wendeberührungspunkte $r\frac{\omega}{2} + s\frac{\omega'}{2}$ in einander überführen. Neben dieser Thatsache ist es noch eine zweite, die wir in der Folge immer benutzen werden: Die Argumente v_1, v_2, v_3, v_4 von vier Punkten der Curve, die einer Ebene angehören, sind, wie wir gesehen haben, an die Relation gebunden:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \equiv 0 \ mod\ 2\omega,\ 2\omega'.$$

Wenden wir auf sie eine der obigen Transformationen an, so erkennen wir, dass die vier Argumente v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, in welche sie übergeführt werden, derselben Relation genügen:

$$v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4 \equiv 0 \ mod\ 2\omega,\ 2\omega'.$$

Es mag uns gestattet sein, eine solche Summe $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ kurz als das Argument der betreffenden Ebene zu bezeichnen. Dann können wir all' das Bisherige zusammenfassen zu dem *Satze:* Die 32 Transformationen der Gestalt

$$v' \equiv \pm v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \ mod\ 2\omega,\ 2\omega'$$

führen das ganze Argumentensystem in sich über, und zwar so, dass die Parameter der 16 Wendeberührungspunkte sich untereinander vertauschen, und dass das Argument einer jeden Ebene durch vier Curvenpunkte wieder in ein ebensolches übergeht.

Die Transformationen haben nicht nur Bedeutung für das an sich bestehende Argumentensystem, sondern auch für die Curve selbst. Wenn wir jedem Punkt statt seines ursprünglichen Argumentes v das hierdurch bestimmte Argument v' willkürlich beilegen, so erhalten wir eine Para-

metervertheilung, wie sie sich bei einer anderen Definition derselben Curve einstellt. Legen wir der gewöhnlichen σ-Function einmal den Index 0 bei, so bestehen bekanntlich bei dem angegebenen Zusammenhang von v und v' Relationen der folgenden Art:

$$\sigma_\alpha(2v) = c_\beta \sigma_\beta(2v'),$$

wo c_β eine Constante bedeutet, und α und β die Zahlen 0, 1, 2, 3 in gewissen Ordnungen durchlaufen. Wir können also die Curve auch definiren durch:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = c_i \sigma_i(2v') : c_k \sigma_k(2v') : c_l \sigma_l(2v') : c_m \sigma_m(2v').$$

Unsere Ausgangsdefinition erscheint hiernach als ein Beispiel von 32 gleichberechtigten Definitionen; die den letzteren entsprechenden Parametervertheilungen gehen durch unsere Transformationen in einander über. Schreiben wir den Zusammenhang zwischen $\sigma_\alpha(2v)$ und $\sigma_\beta(2v')$ in den proportionalen Coordinaten, so erhalten wir, wie bekannt, die Formeln für die 32 Collineationen des Raumes, bei denen unsere Curve gerade in sich übergeht.

2. Gruppentheoretische Behandlung der Transformationen.

Wir wollen uns im Folgenden immer gestatten, die Transformationen

$$v' \equiv \pm v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \mod 2\omega,\ 2\omega'$$

je nach dem Vorzeichen, welches v besitzt, kurz als positive oder negative Transformationen zu bezeichnen.

Zwei Transformationen hinter einander angewandt, ergeben dasselbe Resultat, wie eine einzige dritte, und alle zusammen bilden daher eine geschlossene Gruppe von Operationen, der wir im Folgenden unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden haben. Wir beschränken uns dabei auf eine blosse Angabe der einfachen Resultate.

Was zunächst die erzeugenden Operationen betrifft, so ist leicht zu sehen, dass als solche die folgenden drei benutzt werden können:

$$v' \equiv -v,\quad v' \equiv v + \frac{\omega}{2},\quad v' \equiv v + \frac{\omega'}{2} \mod 2\omega, 2\omega',$$

denn die beiden letzteren erzeugen alle positiven Transformationen, und alle diese verbunden mit der ersteren geben alle negativen.

Periodicität. Die identische Operation mit $a = 0$, $b = 0$ hat die Periode 1; die drei positiven Transformationen, für welche a und b gerade Zahlen sind (0,2; 2,0; 2,2), sowie die 16 negativen Transformationen sind von der Periode 2, und alle zwölf übrigen positiven Transformationen haben die Periode 4.

Gleichberechtigung. Positive Transformationen sind gleichberechtigt unter der Bedingung

$$a \equiv -a',\quad b \equiv -b' \mod 4.$$

Es giebt also sechs Paare gleichberechtigter positiver Transformationen der Periode 4 (welche paarweise von einander die dritten Potenzen bilden) und die vier übrigen positiven Transformationen der Perioden 2 und 1 sind nur sich selbst gleichberechtigt. — Die negativen Transformationen sind zu je vier gleichberechtigt, und für je zwei gleichberechtigte gilt:

$$a \equiv a', \quad b \equiv b' \mod 2.$$

An *ausgezeichneten Untergruppen* finden wir in der vorliegenden Gruppe

I. solche, die aus Schaaren gleichberechtigter Transformationen durch Hinzunahme aller Combinationen und Wiederholungen entstanden sind, nämlich:

1. die Identität bildet eine ausgezeichnete Untergruppe für sich;
2. jede der drei positiven Transformationen der Periode 2 bildet zusammen mit der Identität eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 2;
3. je zwei gleichberechtigte positive Transformationen der Periode 4 bilden zusammen mit einer positiven Transformation der Periode 2 und der Identität eine cyklische ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 4; solcher giebt es also sechs;
4. jede Schaar von vier gleichberechtigten negativen Transformationen bildet zusammen mit den drei positiven Transformationen der Periode 2 und der Identität eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 8; solcher giebt es vier;

II. solche, welche durch Zusammenfassung der bisher genannten entstehen:

5. die drei positiven Transformationen der Periode 2 zusammen mit der Identität bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 4;
6. alle positiven Transformationen bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 16;
7. durch Zusammenfassung zweier solcher Untergruppen aus 3., welche dieselbe Transformation der Periode 2 besitzen, erhalten wir eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 8, enthaltend je vier positive Transformationen der Periode 4 mit derselben positiven Transformation der Periode 2 als zweiter Potenz und alle positiven Transformationen der Perioden 1 und 2; solcher giebt es also drei;
8. durch Zusammenfassung zweier Untergruppen aus 4. erhalten wir sechs ausgezeichnete Untergruppen der Ordnung 16, enthaltend acht positive Transformationen, welche eine ausgezeichnete Untergruppe aus 7. bilden, und acht negative Transformationen, welche zusammen mit den vier positiven Transformationen der Periode 2 zwei ausgezeichnete Untergruppen aus 4. bilden. Zwei von diesen Untergruppen der Ordnung 16, welche dieselbe Untergruppe aus

7. besitzen, enthalten aber nicht zwei gleiche Untergruppen aus 4., sondern theilen sich gerade in die vier dort genannten Untergruppen.

Wir haben in Fig. 1 durch ein Schema zu zeigen versucht, wie das ganze System der genannten ausgezeichneten Untergruppen verzweigt ist, d. h. wie die ausgezeichneten Untergruppen der höheren Ordnungen diejenigen niederer Ordnungen in sich enthalten. Jede Gruppe ist dabei durch ihre Ordnungszahl und durch ihre Nummer in der obigen Tabelle vertreten.

§ 3. Substitutionen.

1. Einführung derselben.

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist bekannt, dass wir statt des anfänglichen Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ noch unendlich viele andere wählen können, ohne dass die σ-Functionen dadurch wesentlich geändert werden. Wir meinen Periodenpaare $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$, welche mit den ursprünglichen durch Relationen verbunden sind:

$$\left.\begin{array}{l}\omega = \alpha\tilde{\omega} + \beta\tilde{\omega}' \\ \omega' = \gamma\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}'\end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

für die wir in der gegenwärtigen Arbeit immer den Namen (ω-) **Substitutionen** verwenden wollen.

Die σ-Function behält ihren Werth für alle diese Periodenpaare bei, in Formel

$$\sigma(v|2\omega,\ 2\omega') = \sigma(v|2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}').$$

Die Functionen σ_1, σ_2, σ_3, sowie die früher genannten Grössen e_1, e_2, e_3 dagegen vertauschen ihre Indices, wie bekannt, in Formel

$$\sigma_\mu(v|2\omega,\ 2\omega') = \sigma_\nu(v|2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}'),$$
$$[e_\mu]_{2\omega,\ 2\omega'} = [e_\nu]_{2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}'}.$$

Unsere Curve

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sigma(2v|2\omega,\ 2\omega') : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3.$$

wird sich dementsprechend bei Zugrundelegung dieser neuen Periodenpaare darstellen durch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sigma(2v|2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}) : \sigma_\alpha : \sigma_\beta : \sigma_\gamma,$$

wobei die Indices nach den Resten, welche die Coefficienten der ω-Substitutionen *mod* 2 besitzen, in hier als bekannt anzusehender Weise zu bestimmen sind.

Es bedarf keiner ausführlichen Begründung, sondern nur der Hervorhebung, **dass alle in einem neuen Periodenparallelogramm (welches einem früheren inhaltsgleich ist) $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ befindlichen Argumente den Punkten der Curve eindeutig zugehören, und wieder alle *mod* Perioden congruenten Argumente denselben Curvenpunkt liefern. Auch besteht der Satz, dass die Summe**

der Argumente v_1, v_2, v_3, v_4 von vier Punkten der Curve in einer Ebene ein Periodenvielfaches ist:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \equiv 0 \ mod\, 2\tilde{\omega}, \ 2\tilde{\omega}',$$

nach wie vor; und unsere 16 ausgezeichneten Punkte erhalten wieder Periodenviertel als Argumente.

Neben dem Argumente $r\frac{\omega}{2} + s\frac{\omega'}{2}$ eines Wendeberührungspunktes werden wir in der Folge oft von seiner „*Benennung*" zu sprechen haben; wir verstehen darunter das Paar ganzer Zahlen (r, s), welches in seinem Argumente vorkommt, und welches wir immer aus der Zahlenfolge 0, 1, 2, 3 wählen können und wählen werden. Analog dem Argument einer Ebene durch vier Wendeberührungspunkte werden wir als Benennung derselben die Summe der Benennungen dieser vier Punkte

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) + (r_3, s_3) + (r_4, s_4)$$

bezeichnen.

Der letzte Theil der vorliegenden Arbeit wird uns mit gewissen σ-Relationen bekannt machen, welche genau den Ebenen durch je vier Wendeberührungspunkte entsprechen, indem in ihnen gerade die Argumente solcher Punktquadrupel auftreten. Die nun eingeführten Substitutionen wie die Transformationen führen die Benennungen der 16 Punkte in einander über und werden uns also ermöglichen, aus einer solchen σ-Relation mit Leichtigkeit eine ganze Reihe abzuleiten. Jede der σ-Relationen gilt für ein beliebiges Periodenpaar 2ω, $2\omega'$, so dass zwei derselben, die sich nur in den zu Grunde gelegten Perioden unterscheiden, als identisch zu betrachten sind.

Zwei Substitutionen, kurz durch ihre Determinanten geschrieben: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, für welche

$$\begin{matrix} \alpha \equiv \alpha', & \beta \equiv \beta' \\ \gamma \equiv \gamma', & \delta \equiv \delta' \end{matrix} \ mod\, 4, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1,$$

bewirken, dass ein Punkt (r, s) die Benennungen $[(r\alpha + s\gamma), (r\beta + s\delta)]$, $[(r\alpha' + s\gamma'), (r\beta' + s\delta')]$ erhält, welche $mod\, 4$ congruent sind; sie führen also dieselben Umänderungen der *Benennungen* unserer Punkte (nicht der Argumente, da sie verschiedene neue Periodenpaare einführen) herbei, sie werden daher aus einer der erwähnten σ-Relationen dieselbe andere ableiten. Darum werden wir von unseren Substitutionen nur diejenigen unterscheiden, für welche entsprechende Coefficienten $mod\, 4$ incongruent sind.

Wir können schliesslich auch die bisher festgehaltene Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ersetzen durch $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv \pm 1 \ mod\, 4$, denn zwei Substitutionen, deren entsprechende Coefficienten $mod\, 4$ congruent sind, für deren eine aber gilt $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, während die andere eine Determinante

$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv \pm 1 \; mod\, 4$ besitzt, liefern dieselben Umnennungen der Punkte, z. B.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch diese Erweiterung der Bedingung gewinnen wir eine leichtere Uebersicht über die Gesammtheit unserer Substitutionen, denn wir erlangen sie jetzt alle, wenn wir nur alle Coefficienten aus einem Restsystem *mod* 4, also z. B. aus der Zahlenfolge 0, 1, 2, 3 wählen. Wir finden, dass es 96 verschiedene Substitutionen giebt, und zwar 48 mit $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv +1 \; mod\, 4$, die wir kurz *positive Substitutionen*, und 48 mit $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv -1 \; mod\, 4$, die wir *negative Substitutionen* nennen wollen.

2. Gruppentheoretische Behandlung der Substitutionen.

Da die Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix}$ nach einander auf einen Wendeberührungspunkt angewandt, dieselbe Umnennung herbeiführen, wie die einzige Substitution $\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1 & \alpha\beta_1 + \beta\delta_1 \\ \gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1 & \gamma\beta_1 + \delta\delta_1 \end{vmatrix}$ mit $(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)$ als Determinante, so haben wir zu merken den *Satz*: Zwei Substitutionen, nach einander angewandt, geben dasselbe Resultat, wie eine einzige dritte, deren Determinante das in bestimmter Weise gebildete Product (Verbindung der Zeilen der ersten Determinante mit den Colonnen der zweiten) der Determinanten der Einzelsubstitutionen ist. Wir erkennen also, dass *die 96 Substitutionen eine geschlossene Gruppe von Operationen bilden*, und diese ist es, die wir im Folgenden näher ins Auge zu fassen haben. Wir beschränken uns dabei oft auf blosse Angabe der Resultate, weil ja alle diese Ueberlegungen keine principiellen Schwierigkeiten bieten.

Erzeugende Substitutionen. Es ist bekannt, dass sich alle Substitutionen der Determinante $+1$ bilden lassen durch Wiederholnngen und Verbindungen von nur zweien:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Alle negativen Substitutionen entstehen durch Combination einer einzigen unter ihnen mit allen positiven. Ein System dreier erzeugender Substitutionen erhalten wir also, wenn wir zu den beiden oben genannten noch eine beliebige negative Substitution hinzunehmen. Wir werden dazu am besten eine solche wählen, deren eine Potenz, mit einer jener beiden positiven combinirt, die andere ergiebt. Eine solche ist $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, denn ihr Quadrat $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ mit $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ in der Reihenfolge $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ combinirt, giebt $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Hiernach haben wir also das Resultat, dass sich alle 96 Substitutionen aus Systemen von nur zwei erzeugenden ableiten lassen, z. B. aus:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Periodicität. Bezeichnen wir durch $\begin{cases} g \\ u \end{cases}$ eine $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ Zahl, so können wir die Substitutionen nach ihrer Periodicität in die folgende Tabelle ordnen; unter den 48 Substitutionen der Determinante $+1$ befinden sich:

1.	eine Substitution der Gestalt	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	und der Periode	1,
2.	sieben Substitutionen der Gestalt	$\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_1 \end{vmatrix}$	„ „ „	2,
3.	je vier „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & g_1 \end{vmatrix}$	„ „ „	3 und 6,
4.	„ „ „ „ „	$\begin{vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	3 „ 6,
5.	acht „ „ „	$\begin{vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{vmatrix}$	„ „ „	4,
6.	„ „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	4,
7.	„ „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ g_1 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	4;

unter den 48 Substitutionen negativer Determinante befinden sich:

8.	acht Substitutionen der Gestalt	$\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_2 \end{vmatrix}$	und der Periode	2,
9.	„ „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & g_1 \end{vmatrix}$	„ „ „	6,
10.	„ „ „ „	$\begin{vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	6,
11.	je vier „ „ „	$\begin{vmatrix} g_1 & u_1 \\ u_1 & g_1 \end{vmatrix}$	„ „ „	2 und 4,
12.	„ „ „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	2 „ 4,
13.	„ „ „ „ „	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ g_1 & u_3 \end{vmatrix}$	„ „ „	2 „ 4.

Gleichberechtigung. Die Schaaren gleichberechtigter Substitutionen lassen sich leicht aufstellen mit Hilfe der folgenden Sätze, die leicht zu beweisen sind:

1. Gleichberechtigte Operationen haben dieselbe Periode.
2. Gleichberechtigte Substitutionen unserer Gruppe haben *mod* 4 congruente Determinanten.

3. Ist $S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ *mod* 4, so ist die Substitution, welche S zur Identität ergänzt,

$$S^{-1} = \begin{Bmatrix} \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{vmatrix} \end{Bmatrix}.$$

4. Transformiren wir $T = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \Gamma & \Delta \end{vmatrix}$ durch $S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ zu $T' = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$, bilden wir also

$$S T S^{-1} = T',$$

so ist:

$$\begin{aligned} A &= \pm [\mathrm{A}\alpha\delta - \mathrm{B}\alpha\gamma + \Gamma\beta\delta - \Delta\beta\gamma], \\ B &= \pm [-\mathrm{A}\alpha\beta + \mathrm{B}\alpha^2 - \Gamma\beta^2 + \Delta\alpha\beta], \\ C &= \pm [\mathrm{A}\gamma\delta - \mathrm{B}\gamma^2 + \Gamma\delta^2 - \Delta\gamma\delta], \\ D &= \pm [-\mathrm{A}\beta\gamma + \mathrm{B}\alpha\gamma - \Gamma\beta\delta + \Delta\alpha\delta], \end{aligned}$$

wobei vor den Klammern die $+$ Zeichen alle zu einander und zum Falle $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv +1$, und ebenso die $-$ Zeichen alle zu einander und zum Falle $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv -1$ *mod* 4 gehören. Daraus erkennen wir ohne Weiteres

$$A + D \equiv \mathrm{A} + \Delta \ \mathit{mod}\ 4,$$

d. h.: In gleichberechtigten Substitutionen sind die Summen des ersten und letzten Coefficienten einander congruent mod 4.

Wir zählen hiernach alle Substitutionen unserer Gruppe nach ihrer Gleichberechtigung geordnet auf, um in der Folge eine Uebersicht über sie immer vor Augen zu haben.

Unter den 48 Substitutionen positiver Determinante giebt es:
je eine mit keiner anderen gleichberechtigte Substitution der Periode 1 und 2:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix};$$

zwei Schaaren von je drei gleichberechtigten Substitutionen der Periode 2:

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};$$

zwei Schaaren von je zwölf gleichberechtigten Substitutionen der Periode 4:

$$5)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

6) $\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\1&3\end{vmatrix}$
$-\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\0&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&1\\0&3\end{vmatrix};$

eine Schaar von acht gleichberechtigten Substitutionen der Periode 3:

7 $\begin{vmatrix}3&1\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix};$

eine Schaar von acht gleichberechtigten Substitutionen der Periode 6:

8) $\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}.$

Unter den 48 Substitutionen negativer Determinante giebt es:
ein Paar gleichberechtigter Substitutionen der Periode 2:

9) $\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix};$

eine Schaar von sechs gleichberechtigten Substitutionen der Periode 2:

10) $\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix};$

eine Schaar von zwölf gleichberechtigten Substitutionen der Periode 2:

11) $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&0\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}$
$-\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\0&3\end{vmatrix};$

eine Schaar von zwölf gleichberechtigten Substitutionen der Periode 4:

12) $\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&2\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}$
$-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix};$

zwei Schaaren von je acht gleichberechtigten Substitutionen der Periode 6:

13) $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&1\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix},$

14) $\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&3\\3&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&3\\3&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}.$

Ausgezeichnete Untergruppen.

Wir bilden die ausgezeichneten Untergruppen wieder in der Weise, dass wir zu den Schaaren gleichberechtigter Substitutionen alle ihre Combinationen und Wiederholungen hinzunehmen und erhalten so das in der folgenden Tabelle angegebene System. Darin sind die Schaaren gleichberechtigter Substitutionen, aus denen die einzelnen ausgezeichneten Untergruppen entspringen, nur durch ihre Nummer in der obigen Uebersicht bezeichnet:

a) Aus 1) entspringt nur die Identität $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ als ausgezeichnete Untergruppe;

b) aus 2) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 2, enthaltend $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

c) aus 3) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 4, enthaltend die drei dort genannten positiven Substitutionen der Periode 2 und die Identität;

d) aus 4) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 8, enthaltend alle positiven Substitutionen der Perioden 2 und 1;

e) aus 5) und 6) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 48, enthaltend alle positiven Substitutionen;

f) aus 7) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 12, enthaltend alle positiven Substitutionen der Periode 3 und die unter c) genannte ausgezeichnete Untergruppe;

g) aus 8) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 24, enthaltend alle positiven Substitutionen der Perioden 6, 3, 2, 1;

h) aus 9) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 4, enthaltend die dort genannten beiden negativen Substitutionen der Periode 2 und die unter b) genannte ausgezeichnete Untergruppe;

i) aus 10) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 16, enthaltend alle positiven und negativen Substitutionen der Gestalt $\begin{vmatrix} u & g \\ g & u \end{vmatrix}$;

k) aus 11) und 12) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 48, enthaltend ausser den 24 negativen Substitutionen dieser Nummern noch die unter g) genannte ausgezeichnete Unter gruppe;

l) aus 13) und 14) entspringt eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung 48, enthaltend alle positiven und negativen Substitutionen der Perioden 3 und 6 und die unter i) genannte ausgezeichnete Untergruppe.

Die Gliederung des ganzen Systems der ausgezeichneten Untergruppen wird durch das in Fig. 2 gegebene Schema deutlich, in welchem jede solche Untergruppe durch ihre Ordnungszahl und durch ihre Signatur in der obigen Tabelle bezeichnet ist.

§ 4. Zusammengesetzte Operationen.

1. Einführung derselben.

Nach dem Bisherigen kommen wir naturgemäss zu der Aufgabe, alle Transformationen mit allen Substitutionen zu verbinden. Wir werden, wenn wir dies thun, eine Gruppe zusammengesetzter Operationen erhalten, welche die verschiedensten Umnennungen der Wendeberührungspunkte bewirken, aber immer unter der Beschränkung — welcher die zu combinirenden Operationen einzeln genügen —, dass vier Punkte in einer Ebene wieder die Benennungen von vier ebenso gelegenen Punkten erhalten, oder nach unserer früheren Terminologie: dass auch die Ebenen durch vier jener Punkte ihre Benennungen unter einander vertauschen.

Die Combination jeder Transformation T mit jeder Substitution S kann in zwei Reihenfolgen geschehen:

$$ST \text{ und } TS.$$

Wir behaupten zunächst, dass das Resultat jeder Combination TS, also die Umnennung der 16 Punkte, auch erreicht werden kann durch eine Combination ST', so dass wir alle zusammengesetzten Operationen erhalten, wenn wir nur diese Combinationen in der Aufeinanderfolge ST machen. Ist nämlich $S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und T die Transformation $v' \equiv \pm v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \mod 2\omega,\, 2\omega'$, so bewirkt TS, dass ein Wendeberührungspunkt (r, s) darnach die Benennung

$$[(\pm r + a)\alpha + (\pm s + b)\gamma], \quad [(\pm r + a)\beta + (\pm s + b)\delta]$$

oder

$$[(\pm r\alpha \pm s\gamma) + (a\alpha + b\gamma)], \quad [(\pm r\beta + s\delta) + (a\beta + b\delta)]$$

erhält. Dasselbe Resultat führt aber auch ST' herbei, wenn T' die Transformation $v' \equiv \pm v + (a\alpha + b\gamma)\frac{\omega}{2} + (a\beta + b\delta)\frac{\omega'}{2} \mod 2\omega,\, 2\omega'$ bedeutet. Es lässt sich natürlich ebenso das Umgekehrte beweisen, dass jedes ST' durch ein TS ersetzbar ist. Hierbei ist T immer eine positive Transformation, wenn T' eine solche ist, und umgekehrt.

Wir setzen nun ein für allemal fest, dass wir diese Combinationen, deren Zahl 96.32 ist, immer in der Aufeinanderfolge ST ausführen wollen. Sie sind zu Paaren identisch, wie wir im Folgenden sogleich zu erweisen haben. Das Resultat der Combina-

tion ST, wo $S=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ und T die Transformation $v' \equiv +v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2}$ $mod\, 2\,\omega,\ 2\,\omega'$ bedeutet, wird auch erreicht durch die Combination $S'T'$, wenn $S'=\begin{vmatrix}-\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta\end{vmatrix}$ und T' die Transformation ist:

$$v' \equiv -v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2}\ mod\, 2\,\omega,\ 2\,\omega'.$$

Beide bewirken, dass ein Wendeberührungspunkt seine ursprüngliche Be nennung (r, s) vertauscht mit

$$(r\alpha + s\gamma + a),\quad (r\beta + s\delta + b).$$

Dies lehrt uns, dass wir alle Combinationen erlangen, wenn wir nur alle 16 positiven Transformationen T mit allen Substitutionen S in der Reihenfolge ST verbinden. *Dass diese 96 . 16 zusammengesetzten Operationen dann eine geschlossene Gruppe bilden,* ist erwiesen, sobald wir gezeigt haben:

1. dass nie mehr zwei dieser zusammengesetzten Operationen ST und $S'T'$ identisch sind, und
2. dass zwei dieser Combinationen hinter einander angewandt dasselbe Resultat ergeben, wie eine einzige dritte.

Beide Punkte erledigen sich durch ganz einfache Rechnungen.

1. Seien S und S' resp. die Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ und T und T' resp. die Transformationen $v' \equiv +v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2}$ und $v' \equiv +v + a'\frac{\omega}{2} + b'\frac{\omega'}{2}$ $mod\, 2\omega,\ 2\omega'$, so erhält der Punkt (r, s) durch ST und $S'T'$ resp. die neuen Benennungen

$$(r\alpha + s\gamma + a,\ r\beta + s\delta + b) \text{ und } (r\alpha' + s\gamma' + a',\ r\beta' + s\delta' + b').$$

Damit beide für jedes beliebige (r, s) identisch seien, ist zunächst erforderlich

$$\alpha \equiv \alpha',\ \beta \equiv \beta',\ \gamma \equiv \gamma',\ \delta \equiv \delta'\ mod\, 4,$$

und mit Hilfe davon auch

$$a \equiv a',\ b \equiv b'\ mod\, 4,$$

d. h. dazu ist erforderlich, dass S und S' einerseits, T und T' andererseits identisch sind.

2. Unterwerfen wir den Punkt (r, s) nach einander den Operationen ST und $S'T'$, so erhält er die Benennung:

$$\{[r(\alpha\alpha' + \beta\gamma') + s(\gamma\alpha' + \delta\gamma') + a\alpha' + b\gamma' + a'],$$
$$[r(\alpha\beta' + \beta\delta') + s(\gamma\beta' + \delta\delta') + a\beta' + b\delta' + b']\},$$

welche er auch erhält durch Anwendung von $S''T''$, wo

$$S''=\begin{vmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{vmatrix}$$

und T'' die Transformation

$$v' \equiv v + (a\alpha' + b\gamma' + a')\frac{\omega}{2} + (a\beta' + b\delta' + b')\frac{\omega'}{2} \quad mod\, 2\omega,\ 2\omega'$$

bedeutet.

Wir bemerken dabei noch den wichtigen Umstand, dass die Substitution S'', welche in die resultirende Operation eingeht, das Product $S.S'$ der Substitutionen ist, welche in den beiden nach einander angewandten Operationen enthalten sind.

Man wird diese zusammengesetzten Operationen zweckmässig so bezeichnen, wie es uns die obige Rechnung an die Hand giebt, nämlich als Operationen zur Umwandlung der Benennung eines allgemeinen Wendeberührungspunktes, also in der Form:

$$\left.\begin{aligned} r' &\equiv r\alpha + s\gamma + a \\ s' &\equiv r\beta + s\delta + b \end{aligned}\right\} mod\, 4,$$

und sich dazu merken:

„Einem Punkte (r, s) die Benennung (r', s') beilegen, heisst nacheinander die ω-Substitution:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \alpha\tilde{\omega} + \beta\tilde{\omega}' \\ \omega' &= \gamma\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}' \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma \equiv \pm 1 \quad mod\, 4$$

und die positive Transformation:

$$v' \equiv +v + a\frac{\tilde{\omega}}{2} + b\frac{\tilde{\omega}'}{2} \quad mod\, 2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}'$$

anwenden."

2. Erzeugende Operationen.

Es ist für die Folge wichtig, die geringste Anzahl von Operationen kennen zu lernen, aus welchen wir durch Wiederholung und Verbindung alle Operationen der Gesammtgruppe ableiten können. Wir haben bereits gesehen, dass wir alle Substitutionen und alle 16 positiven Transformationen aus je nur zweien von ihnen zusammensetzen können, und zwar die Transformationen aus $v' \equiv +v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \ mod\, 2\omega,\ 2\omega'$, wo:

$$(a, b) = (0, 1) \text{ und } (1, 0).$$

Wir erhalten also ohne Weiteres ein System von vier erzeugenden Operationen für unsere Gesammtgruppe.

Dass hierbei noch eine Ersparniss möglich ist, lehrt die im Folgenden zu erhärtende Thatsache, dass man eine von jenen beiden Transformationen aus der andern mit Hilfe der Substitutionen erzeugen kann.

Gegeben sei ein Wendeberührungspunkt mit der Benennung (r, s); wir wenden auf ihn an:

$$S.T.S^{-1},$$

wobei $S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und T die Transformation mit $(a, b) = (0, 1)$, während, wenn wir z. B. $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv +1 \ mod\, 4$ voraussetzen, $S^{-1} = \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix}$, wie

bekannt. Wir erhalten, wie wir aus Früherem nun genugsam wissen, dasselbe Resultat, als hätten wir nur die Transformation $v' \equiv v - \gamma \frac{\omega}{2} + \alpha \frac{\omega'}{2}$ $mod\, 2\omega, 2\omega'$ gemacht. Wir werden jetzt für S eine Substitution wählen, für welche $-\gamma \equiv 1$, $\alpha \equiv 0$ $mod\, 4$ ist, und erhalten dann für STS^{-1} dasselbe Resultat, wie für die Transformation mit $(a, b) = (1, 0)$. Hiernach erkennen wir die Richtigkeit des *Satzes:* Alle $96.16 = 2^9.3$ Operationen der Gesammtgruppe lassen sich aus nur drei Erzeugenden ableiten, z. B. aus den Substitutionen $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ und der Transformation $v' \equiv v + \frac{\omega'}{2}$ $mod\, 2\omega, 2\omega'$.

3. Das System der ausgezeichneten Untergruppen.

Das in der Ueberschrift genannte System ist zur Kenntniss unserer Gesammtgruppe der Ordnung $96.16 = 2^9.3$ vor allen Dingen nöthig, und insbesondere gebrauchen wir es bei den späteren geometrischen Folgerungen. Wir werden zur Aufstellung desselben nicht den bisher schon zweimal eingeschlagenen Weg verfolgen, sondern wir werden Nutzen ziehen aus dem Umstande, dass wir für die beiden zu combinirenden Gruppen die Systeme der ausgezeichneten Untergruppen bereits kennen.

Zunächst beweisen wir leicht, dass sich durch Combination der ausgezeichneten Untergruppen der Substitutionsgruppe mit allen 16 positiven Transformationen ebensolche Untergruppen der Gesammtgruppe ergeben. Seien nämlich

$$S_i T_i$$

die Operationen einer so entstandenen Gruppe, so werden sie: 1. mit allen Operationen der Gesammtgruppe transformirt und 2. mit einander multiplicirt immer wieder auf ebensolche zurückführen. — Die Behauptung 1 beweist sich dadurch, dass wir jedes solche Transformationsproduct

$$ST . S_i T_i . T^{-1} S^{-1}$$

umwandeln können zu

$$S S_i S^{-1} . T^*$$

mit Hilfe des Satzes, dass wir jedes Product $T'S'$ auch schreiben können als $S'T''$ und umgekehrt. An der Gestalt

$$S S_i S^{-1} . T^*$$

erkennen wir aber, dass es zur Gruppe der $S_i T_i$ gehört. — Die Behauptung 2 erweist sich als richtig, weil

$$S_i T_i . S'_i T'_i = S_i S'_i . T''_i$$

nach demselben Satze.

Darnach wird zu untersuchen sein, ob die ausgezeichneten Untergruppen innerhalb der 16 positiven Transformationen, verbunden mit ebensolchen Untergruppen der Substitutions-

gruppe, neue ausgezeichnete Untergruppen der Gesammtgruppe ergeben. Seien jetzt mit S_i und T_i resp. die Operationen der so verbundenen Untergruppen bezeichnet, so werden durch

$$ST.S_i T_i.T^{-1}S^{-1} \text{ und } S_i T_i.S'_i T'_i$$

nach dem Satze aus Nr. 1 dieses Paragraphen sicher nicht solche Operationen der Gesammtgruppe erzeugt, welche neue Substitutionen enthalten; wohl aber können solche mit neuen Transformationen entstehen, und es wird sich ereignen, dass wir auf eine schon oben genannte ausgezeichnete Untergruppe, die durch Combination aller 16 positiven Transformationen mit der ausgezeichneten Substitutionsuntergruppe entstanden war, zurückverfallen. Diese Fragen lösen sich durch folgende Sätze, die wir durch einfache Rechnungen bewiesen haben:

1. Wenn in
$$ST.S_i T_i.T^{-1}S^{-1} = SS_i S^{-1}.T^*$$
für T_i eine positive Transformation der Periode 4 eingesetzt wird und ST durchläuft alle Operationen der Gesammtgruppe, so treten als T^* alle 16 positiven Transformationen auf, aus welcher speciellen Untergruppe auch S_i gewählt sei. Damit ist aber bewiesen, dass durch Combination irgend einer ausgezeichneten Untergruppe der 16 positiven Transformationen, welche eine solche Transformation der Periode 4 besitzt, mit allen ausgezeichneten Substitutionsuntergruppen keine neue Untergruppe unserer Gesammtgruppe entsteht.

2. Wenn in
$$ST.S_i T_i.T^{-1}S^{-1} = SS_i S^{-1}.T^*$$
für T_i eine positive Transformation der Periode 2 eingesetzt wird, für S_i aber irgend eine Substitution, welche nicht die Gestalt $\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_2 \end{vmatrix}$ hat, so wird bei wechselndem ST das T^* wieder alle 16 positiven Transformationen durchlaufen; dadurch ist wieder bewiesen, dass die Combinationen aller Untergruppen der 16 Transformationen mit denjenigen ausgezeichneten Substitutionsuntergruppen, welche eine Substitution von einer andern, als der obengenannten Gestalt besitzen, nicht zu ausgezeichneten Untergrupen führen, die nicht schon genannt wären.

3. Wenn aber für T_i eine der drei positiven Transformationen $v' \equiv v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \mod 2\omega, 2\omega'$ der Periode 2 eingesetzt wird, für welche $(a, b) = (0, 2), (2, 0), (2, 2)$, und für S_i nur Substitutionen der Gestalt $\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_2 \end{vmatrix}$, so wird T^* zu allen jenen drei Transformationen und zur Identität, aber zu keiner andern. Nehmen wir hinzu, dass unter diesen Festsetzungen auch T''_i in

$$S_i T_i . S'_i T'_i = S_i S'_i . T''_i$$

sich nur innerhalb der ausgezeichneten Transformationsuntergruppe mit

$$(a, b) = (0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$$

bewegt, so erkennen wir:

Alle überhaupt noch nicht genannten ausgezeichneten Untergruppen in unserer Gesammtgruppe der Ordnung $2^9.3$ entstehen durch Combinationen der ausgezeichneten Transformationsuntergruppe $(a,b) = (0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$ mit denjenigen ausgezeichneten Substitutionsuntergruppen, welche nur Substitutionen der Gestalt $\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_2 \end{vmatrix}$ enthalten.

Das Schema für alle ausgezeichneten Untergruppen unserer Gesammtgruppe entsteht also aus demjenigen für die Gruppe der Substitutionen, wenn wir die dort angeschriebenen Ordnungszahlen der Gruppen alle noch mit 16 multipliciren und ausserdem von allen Gruppen, soweit sie nur Substitutionen der Gestalt $\begin{vmatrix} u_1 & g_1 \\ g_2 & u_2 \end{vmatrix}$ enthalten (d. h. von der Gruppe der Ordnung 16 abwärts), überall noch eine Gruppe von der vierfachen Ordnung abspalten; wir erhalten also das Schema Fig. 3, in welchem wir die neu abgespalteten Untergruppen durch Doppelstriche andeuten.

Schlussbemerkung. Alle unsere Operationen vertauschen die Benennungen der Wendeberührungspunkte so, dass je vier derselben, die zu Punkten einer Ebene gehören, immer wieder auf vier ebenso gelegene Punkte fallen. — Wir sind auf diese Operationen durch die Theorie der elliptischen Functionen geführt worden, und wir haben noch keine Antwort auf die sich von selbst aufdrängende Frage, ob denn die behandelten Operationen alle Möglichkeiten solcher Umnennungen erschöpfen. Den Beweis, dass dies in der That der Fall ist, der dann die ganze Ueberlegung zu einer abgeschlossenen machen soll, müssen wir bis § 2 des nächsten Capitels verschieben, weil wir dazu mehrerer noch aussenstehender geometrischer Sätze bedürfen.

Zweites Capitel.
Geometrische Folgerungen.

Einleitung. Der nun folgende Theil erstrebt zunächst rein geometrische Resultate: er soll die Zahl und Natur der Wendeebenen und Wendetetraeder klar legen. In zweiter Linie soll darin entwickelt werden, in welche Gruppen sich diese Ebenen und Tetraeder gegenüber den von uns betrachteten Operationen ordnen, und wir werden durch Beantwortung dieser an sich berechtigten Frage zugleich den letzten Theil vorbereiten, der sich gerade

darauf stützt, dass wir die Benennungen aller dieser Ebenen aus denen einiger weniger unter ihnen ableiten können.

§ 1. Die Ebenen durch vier Punkte.

Die 16 Wendeberührungspunkte tragen Argumente $r\frac{\omega}{2}+s\frac{\omega'}{2}$, wo r und s ganze Zahlen sind, die wir $mod\,4$ immer auf Zahlen zwischen 0 und 3 incl. reduciren können. Das Abel'sche Theorem sagte uns, dass die vier Argumente von Schnittpunkten der Curve mit einer Ebene die Relation befriedigen:

$$v_1+v_2+v_3+v_4\equiv 0 \quad mod\,2\omega,\ 2\omega'.$$

Die Anwendung nun dieses allgemeinen Satzes auf die Wendeberührungspunkte lehrt uns ohne Weiteres den für uns wichtigen *Satz:* Eine Ebene, welche die Curve in drei Wendeberührungspunkten schneidet, trifft sie nothwendig noch in einem vierten, — einen Satz, der mit dieser einfachen Begründung enthalten ist in der genannten Abhandlung des Herrn Harnack (Mathem. Annalen, Bd. XII S. 64), der sich in einer geometrischen Arbeit des Herrn Reye (Annali di Matematica, Ser. II, T. II S. 222) angegeben findet und der übrigens implicite in der Clebsch-schen Arbeit in Bd. 63 des Crelle'schen Journals liegt, wenn er auch dort nicht ausgesprochen ist.

Wir lassen die einfach und doppelt berührenden Wendeebenen aus der Betrachtung fort und richten unsere Aufmerksamkeit nur auf die, welche die Curve in vier getrennten Punkten schneiden; deren giebt es, wie Herr Harnack a. a. O. ableitet, 116. Sie zerfallen sofort in drei durch geometrische Eigenschaften verschiedene Gruppen.

Eine erste Gruppe enthält die vier Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders der sich in der Curve durchdringenden Flächen zweiter Ordnung (vergl. Cap. I § 1). Dieselben sind bei unserer Darstellung der Curve dadurch ausgezeichnet, dass die Argumente je zweier der darin gelegenen Wendeberührungspunkte sich um halbe Perioden unterscheiden (vergl. die frühere Tabelle).

Ein bekannter Satz lehrt, dass die Ecken des Polartetraeders die Spitzen der vier durch die Curve gehenden Kegel zweiter Ordnung sind; es müssen darum in jeder Ebene dieses Tetraeders je zwei Wendeberührungspunkte ihre Verbindungslinie durch eine Ecke schicken, so dass die drei Ecken jeder Tetraederebene die Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten des durch die Wendeberührungspunkte bestimmten vollständigen Vierecks sind. Je zwei solcher Verbindungslinien, die durch dieselbe Ecke und in verschiedenen Ebenen des Polartetraeders verlaufen, bestimmen eine neue Ebene durch vier Wendeberührungspunkte; da durch jede Ecke sechs solcher Geraden gehen, so ist die Zahl dieser Ebenen durch jede Ecke $\frac{6.4}{1.2}=12$ und es

giebt also 48 Ebenen, welche mit je zweien der Polartetraederebenen je zwei der darin liegenden Wendeberührungspunkte gemein haben und durch die Polartetraederecken verlaufen.

Wir sehen aus der charakteristischen Lage der vier Punkte in einer Polartetraederebene zugleich, dass es keine Ebene geben kann, welche mit einer dieser Tetraederebenen zwei und mit zwei anderen je einen der 16 Punkte gemein hat. Es kann also überhaupt nur noch solche Ebenen der genannten Art geben, welche mit jeder Polartetraederebene einen der 16 Punkte gemein haben. Die Zahl derselben bestimmt sich als $4.4.4 = 64$ leicht dadurch, dass wir nach unserem obigen Satze zur Festlegung einer solchen Ebene aus dreien der Tetraederebenen je einen der Punkte beliebig wählen können.

Resultat. Es giebt 64 Ebenen, welche aus jeder Polartetraederebene einen Wendeberührungspunkt besitzen.

Controle. $4 + 48 + 64 = 116$.

§ 2. Nachtrag des am Schlusse des ersten Capitels (S. 21) aufgeschobenen Beweises.

Es gilt nachträglich zu beweisen, dass es, nachdem einmal die 16 Punkte mit den Argumenten in der im ersten Capitel angegebenen Weise belegt sind, nicht mehr, als die behandelten 96.16 Vertauschungen der Benennungen unter diesen Punkten giebt, wenn daran festzuhalten ist, dass vier Benennungen, die zu den Punkten einer Ebene gehörten, wieder vier ebenso gelegenen Punkten zufallen sollen.

Vor allen Dingen ist zu beweisen:

Wir dürfen vier Punkten in einer Polartetraederebene immer nur die Benennungen von vier ebensolchen Punkten geben.

Aus der genannten Tabelle erkennen wir, dass die doppelten Argumente der vier Punkte einer solchen Ebene alle derselben Periodenhälfte gleich sind, dass diese Grössen aber für die vier Ebenen verschieden sind. Daraus folgt doch mit Rücksicht auf das Abel'sche Theorem: Durch je zwei Wendeberührungspunkte derselben Polartetraederebene lässt sich eine Doppeltangentialebene an die Curve legen, nie aber wird eine solche Ebene durch zwei Wendeberührungspunkte gehen, die verschiedenen Polartetraederebenen angehören. Je zwei solche Punkte müssen also wieder die Benennungen von zwei in derselben Beziehung stehenden Punkten erhalten, und damit ist eben gesagt, dass die Polartetraederebenen ihre Benennungen nur unter einander vertauschen dürfen.

Wir wollen für den Rest dieses Beweises uns einer kürzeren, geometrischen Sprechweise bedienen. Wir wollen von Translocationen der

Punkte sprechen statt von Vertauschungen ihrer Benennungen. Statt also zu sagen: „Wir legen das Argument eines Punktes P fernerhin dem Punkte P' bei", sagen wir kurz: „Wir bringen den Punkt P nach P'"; dem entsprechend werden wir auch kurz „Ebene" statt „Benennung der Ebene" benutzen. Hiernach beginnen wir die Vertauschungen der Punkte, indem wir immer den bekannten Beschränkungen genügen. Einen ersten beliebig herausgegriffenen Punkt P_1 können wir nach 16 Orten bringen; ist eines davon geschehen, ist er nach P'_1 gebracht, so können wir einem zweiten Punkte, P_2, derselben Polartetraederebene nur noch drei willkürliche Lagen, z. B. P'_2, darnach einem dritten, P_3, nur noch zwei willkürliche Lagen geben, z. B. P'_3. Die Stelle, welche der vierte Punkt P_4 derselben Polartetraederebene darnach einzunehmen hat, ist bestimmt, nämlich P'_4. Dies sind bis jetzt 16.3.2 willkürliche Umnennungen.

Nun ist auch schon bestimmt, in welche neuen Polartetraederebenen die drei weiteren alten übergehen müssen, wie aus dem Folgenden hervorgeht:

In der einen Polartetraederebene, deren Punkte wir schon translocirt haben, können wir die letzteren zu Paaren zusammenfassen. Je zwei solche Paare, die ihre Verbindungslinien durch eine bestimmte Ecke schicken. liegen mit Punktepaaren von zwei weiteren Tetraederebenen auf Ebenen der Schaar 48, mit Punktepaaren der letzten Tetraederebene aber nicht, Dies muss nach der Umnennung auch der Fall sein, und darum ist nicht mehr zweifelhaft, in welche Polartetraederebenen wir die drei noch nicht translocirten überzuführen haben.

Wir können also einem ersten der zwölf noch übrigen Punkte, Q_1, nur noch vier verschiedene Lagen anweisen, z. B. Q'_1. Darnach sind aber die Lagen der drei weiteren Punkte Q_2, Q_3, Q_4 derselben Polartetraederebene fest bestimmt; lag nämlich z. B. Q_2 mit Q_1 und P_1, P_2 in einer der 48 Ebenen, so wird ihm der Punkt Q'_2 entsprechen, welcher mit Q'_1, P'_1, P'_2 in einer der 48 Ebenen liegt.

So bringen uns die Translocationen der Punkte einer zweiten und dritten Polartetraederebene wieder je vier Willkürlichkeiten. Darnach ist aber schon darüber verfügt, wohin die vier Punkte der letzten Tetraederebene zu bringen sind, wie wir aus der Natur der 64 Ebenen erkennen. **Wir haben also im Ganzen**

$$16.3.2.4.4 = 96.16 = 2^9.3$$

willkürliche Vertauschungen der Punkte, d. h. ihrer Benennungen, gefunden, und das ist genau die Anzahl der im ersten Capitel behandelten Operationen.

(Schluss folgt.)

II.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und damit verwandte Sätze der analytischen Mechanik.

Von

Prof. A. F. Sundell

in Helsingfors.

Die mehr bekannten Beweise des Princips von den virtuellen Geschwindigkeiten setzen voraus, dass die gegebenen Verbindungen zwischen den Angriffspunkten der Kräfte durch andere Verbindungen ersetzt werden, welche dieselben Verschiebungen erlauben, und dass statt der unbekannten Verbindungskräfte andere äquivalente Kräfte eingeführt werden, wobei die elastischen Eigenschaften der neuen Verbindungen zur Anwendung kommen. Es scheint doch mehr mit dem Wesen der analytischen Mechanik übereinzustimmen, wenn man das betreffende Princip aus nur gegebenen Umständen, d. h. aus der Bedingung, dass die Angriffspunkte der Kräfte gewissen geometrischen Relationen genügen müssen, herleitet. Dies kann geschehen, wie wir hier zeigen werden, wenn man direct von der Regel für das Kräftepolygon ausgeht. Das berühmte Princip stellt sich in dieser Weise als eine rein analytische Folge der gegebenen Umstände dar.

---

1. Wir nehmen an, dass gewisse Kräfte $P_1\, P_2 \ldots P_n$, deren Angriffspunkte gegebenen geometrischen Relationen genügen sollen, bei einer gewissen Configuration dieser Angriffspunkte sich das Gleichgewicht halten, d. h. dass diese Punkte durch die Wirkung der Kräfte nicht in Bewegung gerathen, wenn sie in Ruhe sind. Die geometrischen Relationen sollen darin bestehen, dass die Coordinaten der Angriffspunkte $x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2, \ldots\ x_n y_n z_n$ gegebene Gleichungen

$$1)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots\quad f_i = 0$$

erfüllen, wo $f_1, f_2, \ldots f_i$ Functionen der $3n$ Coordinaten sind und i kleiner als $3n$ ist.

Wenn wir $3n - i - 1$ neue Gleichungen

$$2)\qquad f_{i+1} = 0,\quad f_{i+2} = 0,\quad \ldots\quad f_{3n-1} = 0$$

aufstellen, welche die Coordinaten enthalten und nur der Bedingung unterworfen sind, dass ihnen die Coordinaten der Gleichgewichtsconfiguration genügen, so ist dadurch ein System von Curven definirt, auf welchen sich die Angriffspunkte aus der Gleichgewichtslage entfernen können. Durch Differentiation der Gleichungen 1) und 2) nach einer Veränderlichen k bekommen wir folgende Gleichungen:

$$3) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dk}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dk}+\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dk}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dk}+\ldots=0,\ \ldots,$$

$$4) \quad \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dk}+\frac{\partial f_{i+1}}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dk}+\frac{\partial f_{i+1}}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dk}+\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dk}+\ldots=0,\ \ldots.$$

Die Richtungen, in welchen sich die Angriffspunkte aus der Gleichgewichtslage entfernen, wenn k geändert wird, gehen aus diesen Gleichungen hervor, wenn man darin die Coordinaten der Gleichgewichtsconfiguration einsetzt. Die Componenten $\frac{dx}{dk}, \frac{dy}{dk}, \frac{dz}{dk}$ der Geschwindigkeiten einer solchen Bewegung werden durch dieselben Gleichungen vollkommen bestimmt, wenn man eine von diesen Componenten nach Belieben nimmt. Die in solcher Weise bestimmten Geschwindigkeiten nennt man **virtuelle Geschwindigkeiten**.*

Durch Umformung des Systems 1) und 2), sowie durch Aufstellung einer Gleichung zwischen $x_1 y_1 z_1\ x_n y_n z_n$ und der Veränderlichen k bekommen wir folgende Gleichungen:

$$5) \quad \begin{array}{l}
f_1^{(1)}(x_1 y_1 z_1)=0,\quad f_2^{(1)}(x_1 y_1 z_1)=0,\quad f^{(1)}(x_1 y_1 z_1\ x_2 y_2 z_2)=0,\\
f_1^{(2)}(x_2 y_2 z_2)=0,\quad f_2^{(2)}(x_2 y_2 z_2)=0,\quad f^{(2)}(x_2 y_2 z_2\ x_3 y_3 z_3)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_1^{(n-1)}(x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1})=0,\quad f_2^{(n-1)}(x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1})=0,\\
f^{(n-1)}(x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}\ x_n y_n z_n)=0,\\
f_1^{(n)}(x_n y_n z_n)=0,\quad f_2^{(n)}(x_n y_n z_n)=0,\quad f^{(n)}(x_n y_n z_n\ x_1 y_1 z_1\ k)=0.
\end{array}$$

Die letzte Gleichung soll bei einem bestimmten Werthe von k durch die Gleichgewichtslagen des ersten und letzten Punktes erfüllt sein. Zu jedem Punkte gehören dann vier Gleichungen, in welchen seine Coordinaten vorkommen.

Das Gleichgewicht erfordert nun, dass durch die gegebenen Bedingungen der Beweglichkeit der Angriffspunkte für jeden Punkt Kräfte entstehen, deren Resultante P' der gegebenen Kraft P gerade entgegengesetzt ist. Wenn daher XYZ die nach den Coordinatenaxen genommenen Componenten der Kraft P und $X'Y'Z'$ die der Kraft P' sind, so muss für jeden Angriffspunkt sein

$$6) \quad X+X'=0,\quad Y+Y'=0,\quad Z+Z'=0.$$

---

* Vergl. Moigno, Leçons de mécanique analytique, statique. S. 289.

Wir setzen hier voraus, dass die Beweglichkeit der Angriffspunkte keiner weiteren Bedingung unterworfen ist, als den durch die Gleichung 1) vorgeschriebenen; somit soll die Bewegung in den durch die Gleichungen 1) und 2) oder Gleichungen 5) definirten Curven ohne Hindernisse geschehen. Beim Gleichgewicht ist daher die Resultante der Kraft P und der durch die Verbindung ihres Angriffspunktes mit den übrigen Angriffspunkten entstehenden Kräfte normal gegen die betreffende Curve. Eine möglicherweise in der Richtung der Tangente dieser Curve vorhandene Kraft (z. B. Friction) muss daher besonders gegeben sein, weshalb wir eine solche Kraft als in der gegebenen Kraft P inbegriffen betrachten.

Die Kraft P' können wir nun immer nach den Normalen der vier Flächen zerlegen, welche von den vier zum Angriffspunkte gehörigen Gleichungen 5) dargestellt sind, wenn man in ihnen nur die Coordinaten dieses Punktes als laufende ansieht. Denn diese Zerlegung wäre scheinbar nur dann unmöglich, wenn die vier Normalen alle im Normalplane der betreffenden Curve 5) liegen sollten. In diesem Falle aber würde, wie man aus den Gleichungen 5) leicht ersieht, die virtuelle Geschwindigkeit des betreffenden Punktes durch die der übrigen Punkte nicht beeinflusst sein, d. h. er kann in Bewegung sein, obgleich die übrigen Punkte ruhen, und umgekehrt. Das Gleichgewicht erfordert dann, dass auch die Kraft P, sowie P' im Normalplane der Curve liegt. Die betreffende Zerlegung der Kraft P' ist daher für jeden Angriffspunkt möglich. Anstatt der Gleichungen 6) bekommen wir daher folgende Gleichungen:

$$7)\quad \begin{aligned}
&X_1 + \mu_1^{(1)}\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1} + \mu_2^{(1)}\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_1} + \lambda_1^{(1)}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + \lambda_n^{(1)}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_1} = 0,\\
&Y_1 + \mu_1^{(1)}\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial y_1} + \mu_2^{(1)}\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y_1} + \lambda_1^{(1)}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y_1} + \lambda_n^{(1)}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial y_1} = 0,\\
&Z_1 + \mu_1^{(1)}\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial z_1} + \mu_2^{(1)}\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial z_1} + \lambda_1^{(1)}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z_1} + \lambda_n^{(1)}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_1} = 0,\\
&X_2 + \mu_1^{(2)}\frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_2} + \mu_2^{(2)}\frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2} + \lambda_1^{(2)}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2} + \lambda_2^{(2)}\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_n + \mu_1^{(n)}\frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial z_n} + \mu_2^{(n)}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n} + \lambda_{n-1}^{(n)}\frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial z_n} + \lambda_n^{(n)}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n} = 0.
\end{aligned}$$

Da man für jede Kraft P' die Grösse von wenigstens einer der Componenten nach Belieben nehmen kann, so sind n Factoren λ oder μ beliebig. Wir können daher n beliebige Relationen zwischen diesen Factoren aufstellen, z. B. diese:

$$8)\qquad \lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(n)},\quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)},\quad \lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(3)},\quad \ldots\quad \lambda_{n-1}^{(n-1)} = \lambda_{n-1}^{(n)}.$$

Multipliciren wir die Gl. 7) mit den zugehörigen Derivirten $\frac{dx}{dk}$, $\frac{dy}{dk}$, $\frac{dz}{dk}$ und addiren dieselben, so bekommen wir nach Gl. 5) und 8) folgende für die Gleichgewichtsconfiguration geltende Gleichung:

$$9)\quad \sum\left(X\frac{dx}{dk}+Y\frac{dy}{dk}+Z\frac{dz}{dk}\right)+\lambda_n^{(n)}\left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dk}+\ldots+\frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n}\frac{dz_n}{dk}\right)=0.$$

Man kann die Function $f^{(n)}$ so bestimmen, dass das zweite Glied der linken Seite dieser Gleichung gleich Null ist, wenn man gleichzeitig auch $\frac{\partial f^{(n)}}{\partial k}$ zum Verschwinden bringt. Für diesen Zweck hat man eine Function φ durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial \varphi}{\partial z_n}\delta z_n=0$$

zu bestimmen, wo die δx, δy, δz* die Componenten der virtuellen Geschwindigkeiten des ersten und n^{ten} Punktes bedeuten. Man kann dann setzen:

$$f^{(n)}=\varphi-\varphi_0+(k-k_0)^r f(k),$$

wo φ_0 den Werth von φ für die Gleichgewichtsconfiguration bedeutet und r eine ganze Zahl grösser als Eins ist. Wenn man $k=k_0$ macht, so wird die Gleichung $f^{(n)}=0$ durch die Gleichgewichtslagen des ersten und letzten Punktes erfüllt und die Gleichung 9) bekommt die Form

$$10)\quad \sum\left(X\frac{dx}{dk}+Y\frac{dy}{dk}+Z\frac{dz}{dk}\right)=0.$$

Die Gleichung des betreffenden Principes ist hiermit bewiesen für jedes System virtueller Geschwindigkeiten, deren Componenten $\frac{dx}{dk}$, $\frac{dy}{dk}$, $\frac{dz}{dk}$ nur den Gl. 3) genügen müssen. Man beweist leicht indirect** den umgekehrten Satz: Wenn die Gl. 10) bei einer gewissen Configuration der Angriffspunkte für jedes System virtueller Geschwindigkeiten gilt, so ist diese Configuration eine Gleichgewichtslage.

Die Gl. 10) wird in bekannter Weise mit den Gl. 3) zusammengestellt, um die neben den gegebenen Gl. 1) zur Lösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen zu erhalten.

2. Das d'Alembert'sche Princip betrachtet man gewöhnlich als eine Folge des Principes von den virtuellen Geschwindigkeiten, was doch nicht nothwendig ist. Denn durch ein ganz analoges Verfahren kann man das d'Alembert'sche Princip direct beweisen. Diesen Beweis wollen wir hier andeuten.

Die Bedingungsgleichungen 1), sowie die Gl. 2) können jetzt auch die Zeit t explicite enthalten. Betrachten wir den Bewegungszustand für einen bestimmten Werth von t, so sind (bei unbestimmtem Anfangszustande) in diesem Augenblicke $3n-i$ Coordinaten, sowie $3n-i$ Geschwindigkeitscomponenten ganz beliebig. Die Gl. 2) können wir daher

---

* Vergl. Lindelöf, Leçons de calcul des variations, S. 41.

** Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. II S. 173.

nach Belieben nehmen, wie auch dazu eine Coordinate und eine Geschwindigkeitscomponente. Die Componenten der virtuellen Geschwindigkeiten für den betreffenden Werth von t bildet man dann wie früher nach den Gl. 3) und 4), wobei die Veränderliche k als von t unabhängig zu betrachten ist. Wir haben somit für die materiellen Punkte ganz bestimmte, für den betreffenden Augenblick geltende Lagen, Geschwindigkeiten und virtuelle Geschwindigkeiten. Für denselben Werth von t gelten $3n$ Gleichungen wie 5). Die neben der gegebenen Kraft zur Bewegung eines jeden Punktes nöthige Kraft P' kann in derselben Weise, wie die Kraft P' im Vorigen zerlegt werden. Denn diese Kraft bewirkt in Verbindung mit der gegebenen Kraft, in welcher eine vorhandene Friction als inbegriffen betrachtet wird, im Allgemeinen eine Aenderung der Geschwindigkeiten, welche man durch Zerlegung der Geschwindigkeit des Punktes nach der Tangente und Normale der betreffenden Curve 5) erhält. Nur wenn die vier in Betracht kommenden Normalen im Normalplane dieser Curve liegen, kann die tangentiale Geschwindigkeitscomponente durch die Kraft P' nicht geändert werden, d. h. die Kraft P' liegt in diesem Normalplane. Man bekommt somit Gleichungen von der Form 7) mit dem Unterschiede, dass die rechte Seite nicht Null ist, sondern gleich resp. $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$. Jetzt sind wieder wenigstens n von den $4n$ Factoren λ und μ nach Belieben zu nehmen. Daher sind wir immer berechtigt, die n Relationen 8) gelten zu lassen. Durch zweckmässige Bestimmung der letzten von den Gl. 5), welche eine rein geometrische (nicht kinematische), nur für den betreffenden Augenblick geltende Bedeutung hat, folgern wir dann die Gleichung des d'Alembert'schen Princips:

$$11)\quad \sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dk}+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dk}+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dk}\right]=0.$$

In bekannter Weise werden die $\frac{dx}{dk}$, $\frac{dy}{dk}$, $\frac{dz}{dk}$ aus dieser Gleichung und den Gl. 3) eliminirt; man erhält dadurch $3n-i$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, aus welchen man i Coordinaten mit Hilfe der gegebenen Bedingungsgleichungen eliminirt. Durch Integration entstehen $3n-i$ Gleichungen mit $6n-2i$ arbiträren Constanten, welche durch den Anfangszustand der Bewegung bestimmt werden. Diese Constanten kann man als arbiträre Functionen der Veränderlichen k ansehen, welche für einen bestimmten Werth von k die dem Anfangszustande entsprechenden Werthe der Constanten geben. Die erhaltenen Integralgleichungen*

* Das Dasein von Gleichungen dieser Form ist *a priori* einzusehen; nimmt man sie als bekannt an, so bestimmen sie nebst den gegebenen Bedingungsgleichungen höchstens $3n$ von den Factoren λ und μ.

können dann die obigen Gl. 2) für die Bildung von $\frac{dx}{dk}, \frac{dy}{dk}, \frac{dz}{dk}$ ersetzen, denn sie werden durch die Coordinaten der materiellen Punkte für jeden Werth von t erfüllt. Auch für jeden Werth von k sind die erhaltenen Gleichungen eine Lösung des Problems, wenn der Anfangszustand unbestimmt ist. Es ist daher in diesem Falle erlaubt, die Differentialquotienten in der Gl. 11) als partielle Differentialquotienten nach den Veränderlichen t und k zu betrachten. Diese Bemerkung ist wichtig, weil dadurch die Einführung neuer Coordinaten erleichtert wird.

3. Anstatt der gewöhnlichen Coordinaten $x\,y\,z$ sollen die Coordinaten $p_1\,p_2 \ldots p_s$ eingeführt werden; $x\,y\,z$ sollen gegebene Functionen von $p_1\,p_2 \ldots p_s$ und von t sein. Die neuen Coordinaten sind, wie $x\,y\,z$, als Functionen von t und k zu betrachten. Wir haben somit:

$$12)\quad \frac{dx}{dk}=\sum\frac{\partial x}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dk}, \quad \frac{dy}{dk}=\sum\frac{\partial y}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dk}, \quad \frac{dz}{dk}=\sum\frac{\partial z}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dk},$$

$$13)\quad \begin{gathered} \frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}+\sum\frac{\partial x}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}+\sum\frac{\partial y}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}, \\ \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\sum\frac{\partial z}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}, \quad i=1,2,\ldots s. \end{gathered}$$

Durch eine Transformation nimmt die Gl. 11) folgende Form an:

$$14)\quad \sum\left(X\frac{dx}{dk}+Y\frac{dy}{dk}+Z\frac{dz}{dk}\right)+\frac{dE}{dk}=\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dk}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{dk}+\frac{dz}{dt}\frac{dz}{dk}\right),$$

wo

$$15)\quad E=\sum\tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Wenn man jetzt die neuen Coordinaten in die Gl. 14) einführt, so bekommt man nach Gl. 12) folgende Gleichung:

$$16)\quad \begin{gathered} \sum\left(P_i+\frac{\partial E}{\partial p_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{p}_i}\right)\frac{dp_i}{dk} \\ =\frac{d}{dt}\left[\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dk}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{dk}+\frac{dz}{dt}\frac{dz}{dk}\right)-\sum\frac{\partial E}{\partial \dot{p}}\frac{dp}{dk}\right], \end{gathered}$$

wo $\dot{p}$ den Differentialquotienten nach t bedeutet und

$$P_i=\sum_{j=1}^{j=n}\left(X_j\frac{\partial x_j}{\partial p_i}+Y_j\frac{\partial y_j}{\partial p_i}+Z_j\frac{\partial z_j}{\partial p_i}\right).$$

Nach Gl. 13) findet man weiter

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{p}_i}=\sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial x_j}{\partial p_i}+\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_j}\frac{\partial y_j}{\partial p_i}+\frac{\partial E}{\partial \dot{z}_j}\frac{\partial z_j}{\partial p_i}\right).$$

Somit ist

$$\sum \frac{\partial E}{\partial \dot{p}_i} \frac{\partial p_i}{\partial k} = \sum_{j=1}^{j=n} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dk} + \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_j} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial y_j}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dk} + \frac{\partial E}{\partial \dot{z}_j} \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial z_j}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dk} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j} \frac{dx_j}{dk} + \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_j} \frac{dy_j}{dk} + \frac{\partial E}{\partial \dot{z}_j} \frac{dz_j}{dk} \right] \quad \text{[nach Gl. 12)]},$$

$$= \sum m \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dk} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dk} + \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dk} \right) \quad \text{[nach Gl. 15)]}.$$

Die rechte Seite der Gl. 16) ist somit gleich Null und die d'Alembert'sche Gleichung 11) bekommt für die neuen Coordinaten die Form

$$\sum \left(P + \frac{\partial E}{\partial p} - \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) \frac{dp}{dk} = 0. \tag{17}$$

Die Bewegungsgleichungen erhält man durch Elimination der $\frac{dp}{dk}$ zwischen dieser Gleichung und den aus den Bedingungsgleichungen zu bildenden Gleichungen

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{dp}{dk} = 0, \quad \sum \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{dp}{dk} = 0, \quad \ldots \quad \sum \frac{\partial f_t}{\partial p} \frac{dp}{dk} = 0, \tag{18}$$

wozu noch folgende Gleichungen kommen:

$$\sum \frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{dp}{dk} = 0, \quad \sum \frac{\partial g_2}{\partial p} \frac{dp}{dk} = 0, \quad \ldots, \tag{19}$$

falls die neuen Coordinaten mit einander durch die Relationen

$$g_1(p_1 p_2 \ldots p_s) = 0, \quad g_2(p_1 p_2 \ldots p_s) = 0, \quad \ldots$$

verbunden sind.

In dieser Weise erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial E}{\partial p_i} = P_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_i} + \ldots + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial p_i} + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots s. \tag{20}$$

Wenn alle Bedingungsgleichungen durch Einführung der Coordinaten p Identitäten werden, und die Coordinaten p unter sich unabhängig sind, nehmen die Bewegungsgleichungen die schon von Lagrange gegebene Form an:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial E}{\partial p_i} = P_i, \quad i = 1, 2, \ldots s. \tag{21}$$

Die mehr allgemeine Form 20) der Bewegungsgleichungen ist oft brauchbar, z. B. bei der Behandlung der Bewegung eines festen Körpers.

— — —

III.

Ueber die Gesetze der Bewegung und Formveränderung homogener, freier um ihre Axe rotirender cylindrischer Gleichgewichtsfiguren und die Veränderung derselben durch Expansion oder Condensation.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Hierzu Taf. I Fig. 4.

Wenn man die Dichtigkeit einer homogen flüssigen, frei rotirenden Gleichgewichtsfigur durch Temperaturveränderung, Druck oder andere Ursachen allmälig sich verändernd denkt, so jedoch, dass der Körper in allen Theilen homogen, auch seine Masse und Energie invariabel bleiben, so müssen sich auch Abplattung, Umdrehungsgeschwindigkeit, folgeweise die Schwer- und Schwungkräfte in allen Punkten der freien Oberfläche in einem bestimmten Sinne ändern. Dabei wird in analoger Weise, wie bei den freien Ringen und Ellipsoiden, so auch bei den Cylindern eine Condensation die Axenverhältnisse in gleichem Sinne ändern, wie eine Vermehrung der Energie bei constanter Dichtigkeit; umgekehrt eine Expansion in gleichem Sinne, wie eine Verminderung der Energie.

In zwei früheren Publicationen* sind von mir eingehende mathematische Betrachtungen angestellt worden über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und Rotationsgeschwindigkeiten, welche bei constanter Masse und Energie durch Condensation, beziehungsweise Expansion an den beiden Ringkörpern (α) und (β) ohne Centralkörper, sowie den drei Ellipsoiden (α), (β) und (γ) verursacht werden. Im Fol-

* De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem. Ann. di mat. pura ed applic. T. III p. 84—111. Milano 1869. — Ueber die Gesetze der Bewegung und Abplattung im Gleichgewicht befindlicher homogener Ellipsoide und die Veränderung derselben durch Expansion und Condensation. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVI S. 290—323, 1871.

genden sollen die drei möglichen cylindrischen Gleichgewichtsfiguren einer ähnlichen Betrachtung unterzogen werden.

Um zu einer möglichst klaren Einsicht in die Uebergänge dieser Zustände zu gelangen, setzen wir zunächst noch voraus, es seien die Masse M und die Dichtigkeit ϱ constant, die Energie E und die Umdrehungsgeschwindigkeit ω variabel. Es mögen also zuerst betrachtet werden:

A. Die Beziehungen der Elemente V, λ und τ der cylindrischen Gleichgewichtsfiguren zu der Energie ihrer Bewegung.

Nach den früher adoptirten Bezeichnungen ist $V = \omega^2 : 2\pi f\varrho$; ferner wenn b und c die Halbaxen des elliptischen Querschnittes des Cylinders bezeichnen, $\sqrt{1+\lambda^2} = c:b$, und wenn r_1 und r beziehungsweise den innern und äussern Halbmesser des kreisförmigen Hohlcylinders bedeuten, $\tau = (r - r_1) : (r + r_1)$, d. h. das Verhältniss der halben Dicke zum mittleren Radius; endlich ist E die Energie des Gleichgewichtskörpers, d. h. die halbe Summe der Momente der Bewegungsquantität oder die Summe der Winkelflächen aller Theile in der Zeiteinheit; mithin

$$E = \tfrac{1}{2}\omega \int r^2\, dm.$$

Die Energie ist deshalb dem Trägheitsmomente proportional und lässt sich somit für jeden der Körper leicht bestimmen. Bei constanter Energie ist die Winkelgeschwindigkeit dem Trägheitsmomente umgekehrt proportional. Wenn also bei Dichtigkeitsänderungen die Trägheitsmomente abnehmen, muss die Winkelgeschwindigkeit der Masse wachsen. Wir bestimmen zunächst die Energie für die drei Cylinder; ist a der Radius des Kreiscylinders, L seine Länge, so ist*

$$E_1 = \frac{\pi\varrho}{4}\sqrt{2\pi f\varrho V}\,.\,L\,.\,a^4.$$

Die Masse des massiven Kreiscylinders ist $M = a^2 L\pi\varrho$, also

$$1)\qquad E_1 = \frac{\sqrt{2\pi f\varrho V}}{4} M a^2.$$

Da nur unendlich lange, gerade Cylinder Gleichgewichtsfiguren bilden können, so würde offenbar bei endlichem Querschnitte E unendlich gross werden. Wir setzen deshalb bei allen folgenden Betrachtungen voraus, dass M und L constant bleiben für sämmtliche Figuren und dass

* L. Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. Akad. Einladungsschrift zur Feier des Geburtstages Sr. Maj. des Königs Friedrich VII. Kiel 1859. S. 40—45. An dieser Stelle sind die Trägheitsmomente der drei Cylinder unrichtig angegeben; es gelten die doppelten Werthe, also resp. $\frac{M}{2}a^2$, $\frac{M}{4}(b^2+c^2)$ und $\frac{M}{2}(r^2+r_1^2)$.

bei Dichtigkeitsänderungen eine Expansion oder Contraction in der Richtung der Drehungsaxe nicht stattfinde, sondern ausschliesslich nur in den Querschnitten. Für den elliptischen Cylinder findet man

$$E_2 = \frac{\pi \varrho}{8} \sqrt{2\pi f \varrho V} . L . bc(b^2 + c^2),$$

und wegen $M = bc L \pi \varrho$

$$2)\qquad E_2 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{8} M . bc \frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Für den Hohlcylinder findet man

$$E_3 = \frac{\pi \varrho}{4} \sqrt{2\pi f \varrho V} . L(r^4 - r_1^4),$$

und wegen $M = (r^2 - r_1^2) L \pi \varrho$

$$3)\qquad E_3 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{4} M(r^2 - r_1^2) \frac{\tau^2 + 1}{2\tau}.$$

Da bei allen Cylindern der betrachteten Arten gleiche Längen und Volumina vorausgesetzt sind, so wird bei constanter Dichte immer bleiben

$$bc = r^2 - r_1^2 = a^2.$$

Es sollen nunmehr die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Die Componenten der Anziehungen sind:*
für den elliptischen Cylinder

$$4)\qquad Y = -4\pi f \varrho \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} y, \quad Z = -4\pi f \varrho \frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} z,$$

also für den massiven Kreiscylinder

$$Y = -2\pi f \varrho y, \quad Z = -2\pi f \varrho z,$$

$$5)\qquad R = -2\pi f \varrho \sqrt{y^2 + z^2} = -2\pi f \varrho a;$$

für den Hohlcylinder** an der innern Oberfläche Null, auf der äussern

$$6)\qquad R = -2\pi f \varrho \frac{r^2 - r_1^2}{r}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den elliptischen Cylinder ist

$$7)\qquad (B_1 + \omega^2 b) b = (C_1 + \omega^2 c) c,$$

oder wenn wir für die Massenattractionen B_1 und C_1 von den Polen des elliptischen Querschnittes ihre exacten Werthe substituiren,

$$-4\pi f \varrho \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} + \omega^2 = \left(-4\pi f \varrho \frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} + \omega^2\right)(1+\lambda^2).$$

---

* Man vergl. L. Matthiessen, Ueber das Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XVI, S. 285.

** Man vergl.: Neue Untersuchungen etc., S. 46; ferner Dahlander, Einige Theoreme der Mechanik, Zeitschr. f. Math. u. Phys. IV, 1859, S. 444.

Dividirt man die Gleichung durch $2\pi f\varrho$ und setzt der Kürze wegen $\sqrt{1+\lambda^2}=p$, so wird

$$-\frac{2p}{1+p}+V=\left(-\frac{2}{1+p}+V\right)p^2$$

oder nach Potenzen von p geordnet

$$p^3-\frac{2-V}{V}p^2+\frac{2-V}{V}p-1=0. \tag{8}$$

Diese Gleichung liefert die simultanen Werthe von V und λ. Eine Wurzel ist $p_1=1$, derselbe ist von V, also von der Rotationsgeschwindigkeit unabhängig; er bezeichnet den massiven Kreiscylinder, welcher also zwischen den Grenzen *Min* V und *Max* V eine Gleichgewichtsfigur bilden kann; die beiden anderen Wurzeln sind

$$p_2 \text{ und } p_3=\frac{1-V}{V}\pm\sqrt{\left(\frac{1-V}{V}\right)^2-1}. \tag{9}$$

Hieraus folgt $V \overline{<} 0{,}5$, d. h. elliptische Cylinder können nur zwischen den Grenzen $V=0$ und $V=0{,}5$ existiren. Um das *Max* V für den massiven Kreiscylinder zu bestimmen, löse man 8) nach V auf und setze $\partial V=0$; man findet

$$V=\frac{2p}{(1+p)^2}=\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\sqrt{1+\lambda^2})^2}. \tag{10}$$

Daraus ergiebt sich *Max* $V=1$ für $\sqrt{1+\lambda^2}=1$, d. h. zwischen den Grenzen $V=0$ und $V=1$ können massive Kreiscylinder Gleichgewichtsfiguren bilden. Ob sie existiren, hängt noch weiter von der Energie ihrer Masse ab; das Gleiche gilt von den elliptischen Cylindern. Ebenfalls wird zu untersuchen sein, ob es unter diesen beiden Arten von Gleichgewichtsfiguren solche geben kann, welche gleiche Energie bei gleicher Dichte haben, und zwischen welchen Grenzen von V.

Für grosse Werthe von λ wird $V=\frac{2}{\lambda}$; für sehr kleine $V=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{16}\lambda^4)$.

Stellen wir noch die Gleichgewichtsbedingungen für den Hohlcylinder auf. Da wir gefunden haben

$$R_1=0,\quad R=-2\pi f\varrho\frac{r^2-r_1^2}{r},$$

so können nur mit R_1 vereinigte Schwungkräfte dem Drucke der äusseren Schichten das Gleichgewicht halten. Betrachten wir die hydrostatischen Druckkräfte in einem radialen Canale, so muss ihre Summe gleich Null werden. Für einen innern Punkt ist

$$R=-2\pi f\varrho\frac{z^2-r_1^2}{z},$$

also der gesammte Druck auf das unterste Flächenelement des Canals

$$\int_{r_1}^{r} \varrho R \, \partial z + \omega^2 \int_{r_1}^{r} \varrho z \, \partial z = 0.$$

Durch Integration gelangt man zu der Gleichung

$$V = 1 - \frac{r_1^2}{r^2 - r_1^2} \, lognat\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)$$

oder auch

$$11) \qquad V = 1 - \frac{(1-\tau)^2}{2\tau} \, lognat\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right).$$

Diese Gleichung bestimmt die Form des Querschnittes, die Aushöhlung des Cylinders für eine gegebene Rotationsgeschwindigkeit. Auf dem gewöhnlichen Wege findet man $Min\, V = 0$, $Max\, V = 1$. Zwischen diesen beiden Grenzen können demnach Hohlcylinder Gleichgewichtsfiguren bilden. Ob sie existiren, hängt aber noch weiter von der Energie ihrer Masse ab. Ebenso wird zu untersuchen sein, ob es unter den Hohlcylindern solche giebt, welche bei constanter Dichte mit dem Kreiscylinder und dem elliptischen Cylinder gleiche Energie haben, und zwischen welchen Grenzen von V. Von besonderem Interesse würde noch die Untersuchung sein, ob unter allen drei Gleichgewichtsformen auch solche existiren, welche eine gleiche Energie und Rotationsgeschwindigkeit besitzen, was bekanntlich für die Ellipsoide und die freien Ringe der Fall ist. Bei den Hohlcylindern ist für sehr kleine τ nahezu $V = 2\tau$.

Nachdem die Beziehungen zwischen V, λ, τ und E im Vorangehenden aufgestellt, wollen wir noch, um die Ideen besser zu fixiren, eine grössere Anzahl conjugirter Werthe numerisch berechnen. Der Einfachheit wegen setzen wir

$$\frac{\sqrt{2\pi f \varrho}}{4} M a^2 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho}}{4} M b c = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho}}{4} M (r^2 - r_1^2) = 1.$$

Dadurch reduciren sich die Ausdrücke in 1), 2) und 3) auf die einfacheren:

$$12) \quad E_1 = \sqrt{V}, \qquad 13) \quad E_2 = \frac{1-V}{\sqrt{V}}, \qquad 14) \quad E_3 = \frac{\tau^2+1}{2\tau} \sqrt{V}.$$

Gleiche Werthe von E und V für je zwei der Figuren bestehen demnach nur in folgenden Fällen:

nach 12) und 13) für $V = 0{,}5$,
„ 12) „ 14) „ $\tau = 1$, d. h. nach 10) für $V = 1$,
„ 13) „ 14) „ $\tau = 0$, „ „ „ 10) „ $V = 0$.

Da die zwei ersten Fälle nur den Zuständen des Ueberganges einer Figur in die andere, der dritte der Energie $E = \infty$ entspricht, so giebt es genau genommen keinen Fall. Unter den Ellipsoiden (β) und (γ), den Ringen (α) und (β) giebt es dagegen vier solcher Combinationen.

Gleiche Werthe von E bei verschiedenem V können mehrfach bestehen. Für ein zwischen 0 und 0,5 schwankendes V variirt E_1 zwischen 0 und $\sqrt{0,5}$; dagegen E_2 zwischen ∞ und $\sqrt{0,5}$, und E_3 zwischen ∞ und einem Werthe, der >1 ist; für ein zwischen 0,5 und 1 schwankendes V variirt E zwischen $\sqrt{0,5}$ und 1, E_3 zwischen jenem Werthe, der >1 ist, und 1. Demnach können gleiche Werthe von E bei verschiedenem V bestehen:

a) für massive Kreiscylinder und elliptische Cylinder zwischen $E=\sqrt{0,5}$ und 1;

b) für alle Hohlcylinder und die übrigen elliptischen Cylinder zwischen $E=1$ und ∞.

Diese Scheidung der Cylinder findet statt bei $V=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ und $\sqrt{1+\lambda^2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)$.

Wenn demnach einem ruhenden Kreiscylinder eine Rotation mit stetig wachsender Energie ertheilt wird, so nimmt seine Rotationsgeschwindigkeit zu, bis $V=0,5$ wird. An dieser Stelle geht er entweder in den elliptischen Cylinder mit abnehmendem V über, oder es bleibt ein Kreiscylinder, bis $V=1$ geworden ist; an dieser Stelle geht er in einen Hohlcylinder mit abnehmendem V über.

Schematisch lässt sich dieser Process veranschaulichen, wie folgt:

$V=0,0$,	$E=0$,	Kreiscylinder,	
$V=0,5$,	$E=\sqrt{0,5}$,	Kreiscylinder	elliptischer Cylinder,
$V=1,0$,	$E=1$,	Hohlcylinder	
$V=0,0$,	$E=\infty$,	Cylindermantel $r=r_1=\infty$,	Lamelle $b:c=0:\infty$.

Die Zwischenzustände des Rotationsmomentes, der Abplattung, resp. Aushöhlung und der Energie ergeben sich aus nebenstehender tabellarischer Uebersicht conjugirter Werthe von V, λ, τ und E, welche in Fig. 4 graphisch dargestellt sind.

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, dass für sehr grosse Energien bei den elliptischen und hohlen Cylindern zu gleichen Energien gleiche Rotationsmomente, gleiche λ und gleiche $1:\tau$ gehören. Es folgt dieses auch unmittelbar aus den Gleichungen 13) und 14), sowie aus den Grenzwerthen $\mathit{Lim}\,V=\mathit{Lim}(2:\lambda)=\mathit{Lim}(2\tau)$. Combinirt man dieselben, so findet man leicht

$$\mathit{Lim}\,E_2=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}},\quad \mathit{Lim}\,E_3=\frac{1}{\sqrt{2\tau}},$$

folglich auch

$$Lim\,[E_2^2 : E_3^2] = Lim\,[V_3 : V_2];$$

und für gleiche E und somit gleiche V

15) $$Lim\,(\lambda\tau) = 1.$$

Kreiscylinder.			Elliptischer Cylinder.			Hohlcylinder.		
λ.	V.	$E_1 = \sqrt{V}$.	λ.	V.	$E_2 = \frac{1-V}{\sqrt{V}}$.	$1:\tau$.	V.	$E_3 = \frac{\tau^2+1}{2\tau}\sqrt{V}$.
0,00	0,00000	0,0000						
0,00	0,00230	0,0480						
0,00	0,00667	0,0818						
0,00	0,01540	0,1241						
0,00	0,05000	0,2236						
0,00	0,10000	0,3162						
0,00	0,15000	0,3873						
0,00	0,20000	0,4472						
0,00	0,30000	0,5477						
0,00	0,50000	0,7071	1,00	0,5000	0,7071			
0,00	0,75000	0,8660	2,00	0,4444	0,8078			
0,00	1,00000	1,0000	3,00	0,3750	1,0206	1,00	1,00000	1,0000
			4,00	0,3125	1,2298	2,00	0,72535	1,0646
			5,00	0,2778	1,3702	3,00	0,53790	1,2223
			10,00	0,1650	2,3019	4,00	0,42532	1,3858
			40,00	0,0476	4,3658	5,00	0,35125	1,5409
			60,00	0,0344	5,2061	10,00	0,18728	2,1854
			100,00	0,0197	7,0556	40,00	0,05117	4,5241
			130,00	0,0154	7,9342	60,00	0,03287	5,4772
			300,00	0,0067	12,224	100,00	0,01990	7,0711
			867,68	0,0023	20,85	130,00	0,01540	7,9608
						300,00	0,00667	12,250
						867,68	0,00230	20,807

B. Von den Veränderungen der Axenlängen, der Axenverhältnisse, der Schwerkräfte und der Umdrehungsgeschwindigkeit homogen flüssiger Cylinder durch Condensation und Expansion bei constanter Masse und Energie.

Wir setzen nunmehr voraus, dass in dem massiven Kreiscylinder eine Condensation eintrete und zwar so, dass derselbe immer noch homogen bleibt. Es wurde gefunden

$$E_1 = \frac{\sqrt{2\pi f\varrho V}}{4}\,M a^2, \quad M = L a^2 \pi \varrho.$$

Eliminirt man a, so resultirt

16) $$E_1 = \frac{\sqrt{2\pi f\varrho V}\,.\,M^2}{4 L\pi\varrho}.$$

Da E, M und L constant bleiben sollen, so wird für zwei verschiedene Dichtigkeitszustände sein

$$\frac{\sqrt{\varrho V}}{\varrho} = \frac{\sqrt{\varrho_1 V_1}}{\varrho_1}$$

oder

17) $$V : V_1 = \varrho : \varrho_1 .$$

Da $2\pi f \varrho V = \omega^2$ ist, so erhält man auch noch das Gesetz der Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit von der Dichte, nämlich

18) $$\omega : \omega_1 = \varrho : \varrho_1 .$$

Aus 17) folgt, dass von $V = 0{,}5$ bis $1{,}0$ sich die Dichte verdoppeln muss, und weiter, dass für verschiedene Dichten gleiche V nicht existiren können. Es darf jedoch aus 17) nicht gefolgert werden, dass z. B. für die drei-, vierfache Verdichtung sich auch V auf seinen drei-, vierfachen Werth erhebe, da V den Maximalwerth 1 hat. Ein massiver Kreiscylinder nähert sich demnach bei Condensation nach und nach den Grenzen $V = 0{,}5$ und endlich $V = 1$, wo er als Gleichgewichtsfigur aufhört zu existiren. Es fragt sich: in welche Figur geht er an letzter Stelle über? und weiter: kann er auch bei $V = 0{,}5$ in eine andere Gleichgewichtsfigur übergehen? Wir gehen zunächst aus von der Energie des elliptischen Cylinders:

$$E_2 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{8} M . b c . \frac{2 + \lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad M = L\, b c\, \pi \varrho .$$

Eliminiren wir bc, so resultirt

19) $$E_2 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V} . M^2}{8 L \pi \varrho} \cdot \frac{2 + \lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} .$$

Bei constanten E, M und L wird für zwei verschiedene Dichtigkeitszustände

20) $$\frac{\sqrt{\varrho V}}{\varrho} . \frac{2 + \lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{\varrho_1 V_1}}{\varrho_1} . \frac{2 + \lambda_1^2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}$$

oder

21) $$\frac{V . (2 + \lambda^2)^2 (1 + \lambda_1^2)}{V_1 . (2 + \lambda_1^2)^2 (1 + \lambda^2)} = \frac{\varrho}{\varrho_1} .$$

Drücken wir λ durch V aus, so wird gemäss 10)

22) $$\frac{1 - V}{\sqrt{V}} : \frac{1 - V_1}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1} ;$$

und wenn V durch λ ausgedrückt wird,

23) $$\frac{(2 + \lambda^2)^2 (1 + \sqrt{1 + \lambda_1^2})^2 \sqrt{1 + \lambda_1^2}}{(2 + \lambda_1^2)^2 (1 + \sqrt{1 + \lambda^2})^2 \sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} .$$

Mittels der Relationen 22) und 10) lassen sich zu gegebenen Condensationen die conjugirten Werthe V und λ berechnen. Aus 22) folgt,

dass für $\varrho > \varrho_1$ stets $V < V_1$ werden muss; auch ist $\lambda > \lambda_1$, denn in Berücksichtigung von 13) geschieht die Veränderung in gleichem Sinne, wie die Abplattung bei wachsendem E. Es wird nun aber zu untersuchen sein, ob, wiewohl bei bis ins Unendliche wachsender Energie $Lim\, V = 0$, $Lim\,\lambda = \infty$ sind, demnach $Lim(\omega:\omega_1)$ und $Lim(c:c_1)$ nicht endlich seien. Dies gilt nämlich, wie früher* gezeigt worden ist, vom Ellipsoid (β) und vom Ringe (β), möglicherweise also auch vom elliptischen Cylinder. Gehen wir aus von der Relation 20):

$$\frac{V(2+\lambda^2)^2(1+\lambda_1^2)}{V_1(2+\lambda_1^2)^2(1+\lambda^2)} = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Es sei V_1 gleich dem singulären Grenzwerthe 0,5, so ist $\lambda_1 = 0$; die zugehörigen Elemente seien $\varrho_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 1$; dann wird zugleich $2\pi f = 2$. Es ist also

$$\frac{V(2+\lambda_2)^2}{\varrho(1+\lambda^2)} = 2.$$

Für grosse λ wird $\lambda V = 2$; eliminirt man V, so wird

24) $$Lim(\lambda:\varrho) = 1;$$

d. h. an den äussersten Grenzen der Condensation ändert sich das Axenverhältniss proportional der Dichte, und es ist $\lambda = c:b = \varrho$. Wegen der Relation

$$Lim\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = Lim\frac{2}{\lambda}$$

wird nun

25) $$Lim(\varrho:\lambda) = Lim(\omega^2:4\pi f) = Lim(\omega^2:4) = 1,$$

d. h. es ist

26) $$Lim(\omega:\omega_1) = 2.$$

Ein Maximum oder Minimum von ω existirt zwischen den Grenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega = 2$ nicht weiter. Man findet dies leicht mit Hilfe der Relation

27) $$\frac{\omega}{\varrho}\cdot\frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\omega_1}{\varrho_1}\cdot\frac{2+\lambda_1^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} = 2.$$

Aus 26) folgt nunmehr, dass die Rotationsgeschwindigkeit bei $\varrho = \infty$ das endliche Maximum 2 erreicht, also die doppelte von derjenigen wird, bei welcher der Kreiscylinder sich in den elliptischen verwandeln kann.

Auch die grosse Axe $2c$ des elliptischen Querschnittes behält einen endlichen Werth. Um dies zu erweisen, beachten wir, dass wegen der constanten Grösse von M und L sein muss

$$M = L\,bc\pi\varrho = L\,b_1c_1\pi\varrho_1,$$

mithin

$$\frac{bc\varrho}{b_1c_1\varrho_1} = 1.$$

Nun ist weiter $c^2\varrho = c_1^2\sqrt{1+\lambda^2}$ und in Berücksichtigung von 22)

* Man sehe Bd. XVI S. 314—315.

28) $$2\frac{c^2}{c_1^2}=\frac{1-V+\sqrt{1-2V}}{(1-V)^2}.$$

Da $Lim\,V=0$ ist, so findet man

29) $$Lim\,(c:c_1)=1.$$

Weil nun aber $c:c_1$ zwischen $V=0,5$ und 0 nicht constant ist, so wird man aus dem gefundenen Grenzwerthe schliessen müssen, dass zwischen den Grenzen $\varrho=1$ und ∞ die halbe grosse Axe c ein Maximum oder ein Minimum werden muss. Differenzirt man die Gleichung 28) und setzt $\frac{\partial c}{\partial V}=0$, so kommt man auf die Bedingungsgleichung $V^3+2V^2-V=0$. Der eine Wurzelwerth ist $V_1=0$ und entspricht einem Minimum; die beiden anderen Wurzelwerthe sind $-1\pm\sqrt{2}$, wovon nur die positive $V_2=\sqrt{2}-1$ in Betracht kommt. Zu diesem Werthe gehören nach 10), 22), 28) die folgenden:

30) $$\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{2}+1,\quad \varrho=4(\sqrt{2}-1),\quad \omega=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),$$
$$c=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1),\quad b=\tfrac{1}{2}.$$

Die längste Halbaxe des elliptischen Querschnittes wächst also ungeachtet der fortgesetzten Condensation zwischen $V=0,5$ und 0,414 von 1 auf 2,414, um sich dann wieder für $\varrho=\infty$ dem Werthe 1 zu nähern; die kürzeste Axe dagegen wird 0.

Wenn man nun weiter in 16) und 19) der Einfachheit wegen setzt

$$\frac{\sqrt{2\pi f}.M^2}{4L\pi}=1,$$

so erhält man für den Kreiscylinder und den elliptischen Cylinder die Energien

$$E_1=\sqrt{\frac{V}{\varrho}},\quad E_2=\sqrt{\frac{V}{\varrho}}.\frac{2+\lambda^2}{2\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Bei $V=0,5$ ist nun nach dem Früheren $\lambda=0$, und die beiden Energien nehmen dieselbe Form an; an der Uebergangsstelle müssen die drei Elemente V, E und ϱ gleich sein, welcher Anforderung die beiden Gleichungen offenbar genügen. Daraus folgt, dass der Kreiscylinder bei $V=0,5$ durch Condensation in den elliptischen Cylinder übergehen kann.

Zur Beantwortung der andern Frage, in welche Figur der Kreiscylinder bei $V=1$ durch weitere Condensation übergehe, bedarf es einer ähnlichen Untersuchung über das Verhalten des Hohlcylinders. Wir geben aus von der Energie desselben, nämlich

$$E_3=\frac{\sqrt{2\pi f\varrho V}}{4}M(r^2-r_1^2)\frac{1+\tau^2}{2\tau},\quad M=L(r^2-r_1^2)\pi\varrho.$$

Eliminiren wir $r^2-r_1^2$, so wird

31) $$E_3 = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}.M^2}{4L\pi\varrho} \cdot \frac{1+\tau^2}{2\tau}.$$

Bei constanten E, M und L wird

32) $$\sqrt{\frac{V}{\varrho}} \cdot \frac{1+\tau^2}{2\tau} = \sqrt{\frac{V_1}{\varrho_1}} \cdot \frac{1+\tau_1^2}{2\tau_1}$$

oder

33) $$\frac{V(1+\tau^2)^2\tau_1^2}{V_1(1+\tau_1^2)^2\tau^2} = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Wenn man für V seinen Werth $\omega^2 : 2\pi f\varrho$ substituirt, so erhält man die Gleichung

34) $$\frac{\omega(1+\tau^2)\tau_1}{\omega_1(1+\tau_1^2)\tau} = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

welche die Beziehung der Winkelgeschwindigkeit zur Dichte ausdrückt. Es lassen sich ausserdem durch Elimination Gleichungen aufstellen, welche die Beziehungen zwischen τ und ϱ, τ und ω enthalten. Aus 11) und 33) folgt nämlich

35) $$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{(1+\tau^2)^2\tau_1^2 \left\{1 - \frac{(1-\tau)^2}{2\tau} lg \frac{1+\tau}{1-\tau}\right\}}{(1+\tau_1^2)^2\tau^2 \left\{1 - \frac{(1-\tau_1)^2}{2\tau_1} lg \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right\}} = \frac{f(\tau)}{f(\tau_1)}.$$

Combinirt man diese mit 34), so resultirt noch

36) $$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{(1+\tau^2)\tau_1 \left\{1 - \frac{(1-\tau)^2}{2\tau} lg \frac{1+\tau}{1-\tau}\right\}}{(1+\tau_1^2)\tau \left\{1 - \frac{(1-\tau_1)^2}{2\tau_1} lg \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}\right\}} = \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(\tau_1)}.$$

Für gegebene Condensationen lässt sich mittels 35) τ und aus 11) die conjugirten Werthe von V berechnen. Da für wachsende τ zugleich $f(\tau) > f(\tau_1)$ ist, so folgt daraus, dass bei fortgesetzter Condensation der Cylinder, welcher $V=1$ entspricht, sich immer mehr aushöhlt, also V stetig abnimmt. Die Formveränderung geschieht in gleichem Sinne, wie diejenige bei zunehmender Energie und constanter Dichtigkeit. Es wird noch zu untersuchen sein, ob bei einer ins Unendliche fortgesetzten Condensation, also einem bis 0 abnehmenden τ, auch r und ω Null zur Grenze haben. Wir suchen demgemäss noch $Lim(r:r_0)$ und $Lim(\omega:\omega_1)$ zu bestimmen.

Es sei V_1 gleich demjenigen Grenzwerthe, wobei die Gleichgewichtsbedingung massiver Kreiscylinder bei weiterer Condensation aufhört, weil für jedes Massentheilchen Gravitation und Centrifugalkraft einander gleich werden. Wir setzen also voraus, es sei $V_1 = 1$, zugleich $\tau_1 = 1$, $\varrho_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $r_0 = 1$, $r_1 = 0$; dann ist $2\pi f = 1$. Aus 33) folgt zunächst für den Hohlcylinder von der Dichte $\varrho > \varrho_1$

37) $$\frac{V(1+\tau^2)^2}{4\tau^2\varrho} = 1.$$

Für kleine $\tau = \frac{r-r_1}{r+r_1}$ wird nach 11) $V = 2\tau$. Setzt man dies in 37) ein, so resultirt

$$Lim(2\tau\varrho) = Lim(V\varrho) = 1,$$

d. h. an den äussersten Grenzen der Condensation ändert sich das Verhältniss 2τ der Dichte umgekehrt proportional. Weil also

$$Lim\frac{\omega^2}{2\pi f\varrho} = Lim\frac{1}{\varrho}$$

ist, so wird

38) $$Lim\,\omega^2 = 2\pi f = 1.$$

Aus den Relationen $\omega_1 = 1$ und $Lim\,\omega = 1$ darf man schliessen, dass zwischen diesen Grenzen, welche den Dichtigkeiten $\varrho_1 = 1$ und $\varrho = \infty$ entsprechen, ω einen Maximal- oder Minimalwerth haben wird. In der That findet das Letztere statt und wir können das Minimum auf folgende Weise berechnen. Wir gehen aus von 36) und setzen

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = 0.$$

Die Differenzirung ergiebt die Bedingungsgleichung

$$\frac{2\tau(1-\tau^3)}{(1-\tau^2)(1+\tau^3)} = lg\frac{1+\tau}{1-\tau} = 2\{\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5 + \ldots\}, \quad \tau < 1.$$

Berücksichtigen wir unter der berechtigten Annahme, dass τ verhältnissmässig klein gegen die Einheit sei, nur bis zu τ^7. Wir erhalten alsdann die Bedingung

$$1 - 2\tau - \tfrac{2}{3}\tau^2 - \tfrac{4}{5}\tau^3 - \tfrac{5}{7}\tau^4 - \tfrac{18}{35}\tau^5 = 0.$$

Bei Anwendung der Regula falsorum ergiebt sich daraus der Wurzelwerth $\tau = 0{,}357$. Der conjugirte Werth von V ist $0{,}575$, der von $\varrho = 1{,}433$; endlich

$$\omega^2 = \varrho V = 1{,}433 . 0{,}575 = 0{,}8243, \quad \omega = 0{,}91, \quad r = 0{,}6705, \quad r_1 = 0{,}3175.$$

Um $Lim(r:r_0)$ zu bestimmen, gehen wir aus von der Relation

$$M = L\,r_0^2\pi\varrho_1 = L(r^2 - r_1^2)\pi\varrho.$$

Da M und L unveränderlich sind, so folgt daraus

39) $$\frac{(r^2-r_1^2)\varrho}{r_0^2\varrho_1} = 1.$$

Für $\varrho = \infty$ wird $r = r_1$; man hat demgemäss

$$Lim\frac{r^2-r_1^2}{r_0^2} = Lim\frac{4r^2\tau}{r_0^2} = Lim\frac{\varrho_1}{\varrho}.$$

Es war aber $Lim\,2\tau\varrho = 1$, folglich ist $Lim(r^2:r_0^2) = \frac{1}{2}\varrho_1$ und

40) $$Lim(r:r_0) = \sqrt{0{,}5},$$

d. h. der massive Cylinder von den Elementen $a = r_0$, $V_1 = 1$, $\varrho_1 = 1$ verwandelt sich bei ins Unendliche fortgesetzter Condensation schliesslich in einen Cylindermantel von den Elementen

$$r = \sqrt{0,5}, \quad V = 0, \quad \varrho = \infty;$$

der grösste Querschnitt erscheint bis auf die Hälfte des ursprünglichen reducirt.

Fassen wir sämmtliche Resultate unserer Untersuchungen zusammen, so treten bei der stetigen Condensation eines langsam rotirenden massiven Cylinders bei gleichbleibender Energie, Masse und Länge folgende Uebergänge der Gleichgewichtsfiguren in einander auf:

Wenn $V = 0,5$ wird und an dieser Stelle der Grad der Dichte $= 1$ gesetzt wird, so kann der Cylinder in den elliptischen übergehen oder ein Kreiscylinder bleiben. Geht er in den elliptischen über, so nähert sich V wieder dem Werthe 0, ω wird allmälig verdoppelt, λ wird ∞, b wird 0, c erreicht ein Maximum und nähert sich wieder der Grösse des Radius von dem verwandelten Kreiscylinder.

Geht dieser bei $V = 0,5$ nicht in den elliptischen über, so bleibt er bestehen, bis $V = 1$ geworden ist. Dabei werden ϱ und ω verdoppelt, der Radius bis auf die $\sqrt{0,5}$-fache Länge verkürzt. Es findet nun bei weiterer Condensation ein Uebergang in den Hohlcylinder statt. Dabei nähert sich V wieder dem Werthe 0, ω sinkt zu einem Minimum herab und nähert sich wieder dem anfänglichen Werthe, τ wird ∞, r und r_1 werden einander gleich und zwar genau halb so gross, wie der Radius des Kreiscylinders, welcher dem Werthe $V = 0,5$ entspricht. Die folgende Tabelle giebt eine Uebersicht dieser singulären Werthe, welche natürlich auf gleiche Einheiten bezogen sind:

ϱ.	V.	ω.	λ^2.	τ.	a.	b.	c.	r.	r_1.
0	0	0	—	—	∞	—	—	—	—
1	0,5	1	0	—	1	1	1	—	—
$4(\sqrt{2}-1)$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{8}(\sqrt{2}-1)$	$2(\sqrt{2}+1)$	—	—	0,5	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$	—	—
2	1	2	...	1	$\sqrt{0,5}$	...	...	$\sqrt{0,5}$	0
2,867	0,575	1,82	...	0,357	—	...	...	0,67	0,32
∞	0	2	∞	0	—	0	1	0,5	0,5

In vorstehender Tabelle bezeichnet — Elemente, die für den entsprechenden Werth von ϱ nicht existiren können, ... dagegen solche, welche existiren und sich berechnen lassen. Bei Dilatation der Materie finden diese Uebergänge in umgekehrter Ordnung statt.

Es erscheint noch von besonderer Wichtigkeit, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob bei den beschriebenen Processen eine Abschleuderung eintreten kann. Für die Ellipsoide und die freien Ringe haben

wir bereits in früheren Abhandlungen den Beweis erbracht, dass eine solche nicht eintreten kann. Dasselbe gilt nun auch von den cylindrischen Gleichgewichtsfiguren, wie noch gezeigt werden soll. Es genügt offenbar, zu zeigen, dass die Massenanziehung stets die Centrifugalkraft überwiegt. Betrachten wir zunächst die elliptischen Cylinder. Sind B und C die Schwerkräfte an den beiden Polen eines Aequators, B_1 und C_1 die Massenanziehungen, so ist

$$B = B_1 + \omega^2 b, \quad C = C_1 + \omega^2 c.$$

Setzen wir aus 4) die Componenten ein, so finden wir

$$B = -\frac{2\omega^2}{V} \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} b + \omega^2 b,$$

und in Verbindung mit 10)

41) $$B = -\omega^2 c, \text{ analog } C = -\omega^2 b.$$

Führen wir B_1 und C_1 ein, so resultirt noch

42) $$B_1 = -\omega^2 (b+c) = B + C = C_1.$$

Aus 41) folgt noch, dass die gesammte Schwere stets kleiner als Null und von Null verschieden bleibt. Denn für den elliptischen Cylinder ist $Lim\,\omega$ endlich und $Lim\,c$ ebenfalls, d. h. $Lim\,B$ hat einen endlichen negativen Werth, nämlich -4; $Lim\,b$ ist unendlich klein und demgemäss $Lim\,C = 0$.

Für den Hohlcylinder ist die absolute Massenanziehung auf der Oberfläche

$$R_1 = -2\pi f \varrho \frac{r^2 - r_1^2}{r},$$

also die Schwere

$$R = R_1 + \omega^2 r = -\frac{\omega^2}{V} \frac{r^2 - r_1^2}{r} + \omega^2 r.$$

Um V zu eliminiren, beachten wir, dass nach 11)

$$V = 1 - \frac{r_1^2}{r^2 - r_1^2} lg \frac{r^2}{r_1^2},$$

und für verschwindend kleine V wird

$$V = 2\frac{r - r_1}{r + r_1}.$$

Daraus folgt sofort

43) $$Lim\,R = Lim(-\omega^2 r).$$

Da nun ω und r sich den endlichen Werthen 2 und 0,5 nähern, so nähert sich R dem Werthe -2, folglich findet auch auf dem Hohlcylinder eine Abschleuderung nicht statt. Dabei ist für $\varrho = \infty$ der Werth R absolut genommen gleich der auf die innere Oberfläche wirkenden Centrifugalkraft, wie dies auch direct aus dem Gleichgewichtszustande einer unendlich dünnen, beiderseits freien Schicht geschlossen werden musste.

Endlich ist bei dem massiven Kreiscylinder die gesammte Schwere

$$B = -\frac{\omega^2}{V}b + \omega^2 b,$$

und weil $V \leqq 1$ ist, B stets negativ mit Ausnahme des Falles $V = 1$. In diesem wird $B = 0$. Auf der Oberfläche dieser Gleichgewichtsfigur und ebenso in jeder ihrer inneren Schichten halten sich Massenanziehung und Centrifugalkraft überall das Gleichgewicht. Bei vermehrter Energie oder fortschreitender Condensation muss diese Figur sich auflösen, weil die Gleichung 17) nicht mehr bestehen kann. Dieser Umstand führt jedoch nur zu neuen Gleichgewichtsfiguren, entweder, wie gezeigt worden ist, zu dem einfachen Hohlcylinder oder zu discontinuirlichen coaxialen Hohlcylindern mit gleicher oder ungleicher Rotationsgeschwindigkeit. Diese Gleichgewichtsfiguren sind ebenfalls einer mathematischen Behandlung fähig; sie entsprechen den concentrischen Ringsystemen.*

Systematische Uebersicht der Gleichgewichtsfiguren.

V.											
1,0000									Massiver Kreiscylinder		
								Massiver Kreiscyl.			Hohlcyl.
0,5000								Kreiscyl.	Ellipt. Cyl.		
0,2246		Ell. (α)									
		Ell. (α)	Ell. (β)								
0,1871	Ell. (α)	Ell. (γ)									
0,1349					Ring (α)						
					Ring (α)	Ring (β)					
0,0000	Kugel	Cyl.	Discus		Ring	Discus		Cyl.	Lamelle		Ebene
a	1	1	1	a	1	1	L	∞^n	∞^n	L	∞^n
$:b$	1	1	∞	$:b$	1	∞	$:b$	1	1	$:r_1$	∞
$:c$	1	∞	∞	$:r$	∞	∞	$:c$	1	0	$:r$	∞

* Man vergl.: Ueber Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen einer frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X S. 59. 1865. — Ueber den vorliegenden Gegenstand ist neuerdings auch eine Abhandlung publicirt von Otto Kuntze in Grun. Arch. LXVIII. 1882.

Kleinere Mittheilungen.

I. Die Gleichung des Kreises in trimetrischen Punktcoordinaten.

Die bis jetzt bekannten Ableitungen der Bedingungsgleichung für den Kreis in trimetrischen Coordinaten stützen sich nicht auf die charakteristische und für die analytische Geometrie wichtige Eigenschaft, wonach beim Kreise sämmtliche Paare conjugirter Durchmesser oder, allgemeiner gesprochen, die zu einander conjugirten Richtungen immer rechtwinklig sind. Der Zweck gegenwärtiger Zeilen ist die Durchführung einer auf letzterem Princip basirenden Deduction, wodurch diese in methodischer Hinsicht in Einklang gebracht werden soll mit der diesbezüglichen Ableitung in Cartesischen Coordinaten.

Wir nehmen die allgemeine Gleichung zweiten Grades in trimetrischen Punktcoordinaten:

$$1)\quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

wo x_1, x_2, x_3 die laufenden Coordinaten bedeuten.

Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes kann als Polare desselben aufgefasst werden; wir betrachten daher das Fundamentaldreieck des trimetrischen Coordinatensystems als drei Polaren der Curve und suchen die entsprechenden Pole. Ist nun der in Rede stehende Kegelschnitt ein Kreis, so muss jeder durch die erwähnten Pole gehende Durchmesser rechtwinklig zur betreffenden Polare sein. Bezeichnen wir die zur Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

gehörigen Subdeterminanten mit entsprechenden grossen Anfangsbuchstaben: A_{11}, A_{12} etc., so sind die trimetrischen Coordinaten der zu den Seiten des Fundamentaldreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als Polaren gehörigen Pole: A_{11}, A_{12}, A_{13}; A_{12}, A_{22}, A_{23}; A_{13}, A_{23}, A_{33}.

Die Gleichung des durch den ersten Pol gehenden Durchmessers ist:

$$\begin{aligned} & x_1 [A_{12}(A_{13} \sin A + A_{23} \sin B + A_{33} \sin C) \\ & \qquad - A_{13}(A_{12} \sin A + A_{22} \sin B + A_{23} \sin C)] \\ & + x_2 [A_{13}(A_{11} \sin A + A_{12} \sin B + A_{13} \sin C) \\ & \qquad - A_{11}(A_{13} \sin A + A_{23} \sin B + A_{33} \sin C)] \\ & + x_3 [A_{11}(A_{12} \sin A + A_{22} \sin B + A_{23} \sin C) \\ & \qquad - A_{12}(A_{11} \sin A + A_{12} \sin B + A_{13} \sin C)] = 0, \end{aligned}$$

wo A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks bedeuten.

Diese Gleichung übergeht infolge der Relationen, welche zwischen den Elementen der Determinante Δ und denen des adjungirten Systems bestehen, in die nachstehende:

$$2)\qquad x_1(a_{13}\sin B - a_{12}\sin C) + x_2(a_{23}\sin B - a_{22}\sin C) + x_3(a_{33}\sin B - a_{23}\sin C) = 0.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Gleichungen der Durchmesser, welche durch den zweiten, resp. dritten Pol gehen, in folgender Form:

$$3)\qquad x_1(a_{11}\sin C - a_{13}\sin A) + x_2(a_{12}\sin C - a_{23}\sin A) + x_3(a_{13}\sin C - a_{33}\sin A) = 0,$$

$$4)\qquad x_1(a_{12}\sin A - a_{11}\sin B) + x_2(a_{22}\sin A - a_{12}\sin B) + x_3(a_{23}\sin A - a_{13}\sin B) = 0.$$

Diese Durchmesser müssen zu den Polaren $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ rechtwinklig sein; wir erhalten daher drei Orthogonalitätsbedingungen:

$$5)\qquad (a_{13}\sin B - a_{12}\sin C) - (a_{23}\sin B - a_{22}\sin C)\cos C - (a_{33}\sin B - a_{23}\sin C)\cos B = 0,$$

$$6)\qquad (a_{12}\sin C - a_{23}\sin A) - (a_{13}\sin C - a_{33}\sin A)\cos A - (a_{11}\sin C - a_{13}\sin A)\cos C = 0,$$

$$7)\qquad (a_{23}\sin A - a_{13}\sin B) - (a_{12}\sin A - a_{11}\sin B)\cos B - (a_{22}\sin A - a_{12}\sin B)\cos A = 0,$$

aus welchen sich die Endresultate ergeben. Addirt man nämlich die Gleichungen 5) und 6), so erhält man

$$a_{13}[\sin(C+A) - \sin(C-A)] - a_{23}[\sin(B+C) + \sin(B-C)] = \tfrac{1}{2}a_{33}[\sin 2B - \sin 2A] + (a_{11} - a_{22})\sin C\cos C;$$

wenn man die in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke in Producte verwandelt und dann mit $cotg\, C$ multiplicirt, so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$a_{22}\sin^2 C + a_{33}\sin B\,.\sin C\cos A - 2a_{23}\sin B\,.\sin C = a_{33}\sin A\,.\sin C\cos B + a_{11}\sin^2 C - 2a_{13}\sin A\sin C;$$

da aber im Dreieck

$$\sin C\cos A = \sin B - \sin A\cos C \quad \text{und} \quad \sin C\cos B = \sin A - \sin B\cos C$$

ist, so reducirt sich die letztere Gleichung auf die folgende:

$$8)\qquad a_{22}\sin^2 C + a_{33}\sin^2 B - 2a_{23}\sin B\sin C = a_{33}\sin^2 A + a_{11}\sin^2 C - 2a_{13}\sin A\sin C.$$

Durch ähnliches Verfahren erhält man aus den Gleichungen 6) und 7) das folgende Resultat:

$$9)\qquad a_{33}\sin^2 A + a_{11}\sin^2 C - 2a_{13}\sin A\sin C = a_{11}\sin^2 B + a_{22}\sin^2 A - 2a_{12}\sin A\sin B.$$

Die Vereinigung der Gleichungen 8) und 9) bildet eine Doppelbedingung, welche erfüllt werden muss, wenn die Gleichung 1) einen

Kreis darstellen soll. Um die Gleichung des Kreises selbst zu erhalten, schreiben wir die Doppelbedingung in folgender Form:

$$a_{22}\sin^2 C + a_{33}\sin^2 B - 2a_{23}\sin B\sin C = -k,$$
$$a_{33}\sin^2 A + a_{11}\sin^2 C - 2a_{13}\sin A\sin C = -k,$$
$$a_{11}\sin^2 B + a_{22}\sin^2 A - 2a_{12}\sin A\sin B = -k,$$

bestimmen aus den einzelnen Gleichungen die Grössen $2a_{23}$, $2a_{13}$, $2a_{12}$, und substituiren dieselben in die Gleichung 1). Diese Operationen liefern die Gleichung des Kreises in trimetrischen Punktcoordinaten:

$$10)\quad \begin{aligned}(x_1\sin A + x_2\sin B + x_3\sin C)(x_1 a_{11}\sin B\sin C + x_2 a_{22}\sin C\sin A \\ + x_3 a_{33}\sin A\sin B) \\ + k(x_2x_3\sin A + x_3x_1\sin B + x_1x_2\sin C) = 0,\end{aligned}$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet, daher auch die Gleichung einen beliebigen Kreis repräsentirt.

Bezeichnen wir die Coefficienten der x in der zweiten Klammer kurzweg mit c_1, c_2, c_3, so kann die Gleichung eines jeden Kreises in folgender Form geschrieben werden:

$$11)\quad \begin{aligned}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)(x_1\sin A + x_2\sin B + x_3\sin C) \\ + k(x_2x_3\sin A + x_3x_1\sin B + x_2x_1\sin C) = 0;\end{aligned}$$

die Gleichung enthält also vier willkürliche Constanten, gleich der Gleichung in schiefwinkligen Cartesischen Coordinaten.

Die Gleichung eines dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnittes ist $a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_1x_2 = 0$, also $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$ in diesem Falle, welche Substitution in Gleichung 10) die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreises in folgender Form giebt:

$$x_2x_3\sin A + x_1x_3\sin B + x_1x_2\sin C = 0.$$

Temesvár. Prof. Ignaz Dorogi.

II. Ueber ein Theorem von Liouville, die doppelt-periodischen Functionen betreffend.

Ein Theorem von Liouville lässt sich auf folgende Weise aussprechen:

„Jede doppelt-periodische eindeutige Function der n^{ten} Ordnung kann durch die doppelt-periodische Function zweiter Ordnung mit denselben Perioden und deren Ableitung ausgedrückt werden.“

Einen Beweis dieses Theorems findet man bei Königsberger* und Briot & Bouquet**. Aber Laurent*** bemerkt, dass, wiewohl der

* Vorlesungen über Elliptische Functionen I, S. 354.

** Théorie des fonctions elliptiques, S. 250.

*** Théorie élémentaire des fonctions elliptiques, S. 115.

Beweis dieses Theorems bekannt ist, doch die Formel, wodurch man jede willkürliche doppelt-periodische Function ausdrücken kann, noch nicht entwickelt war. Durch Anwendung der Theorie der Residus findet Laurent die verlangte Formel.

Einfacher und natürlicher wird diese Formel gefunden, wenn man bei der Entwickelung den Beweis, wie man ihn in den genannten Lehrbüchern findet, zu Grunde legt.

$F(z)$ sei die willkürliche d.-p. Function n^{ter} Ordnung und $f(z)$ die d.-p. Function zweiter Ordnung, worin $F(z)$ ausgedrückt werden soll.

$F(z)$ werde in einem Elementarparallelogramm unendlich in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $f(z)$ in den Punkten α und β.

Betrachtet man nun eine Function $\varphi(z) = F(z) + F(\alpha+\beta-z)$, so wird $\varphi(z)$ unendlich für $z=\alpha_1$, $z=\alpha_2$, ... $z=\alpha_n$, und $z=\alpha+\beta-\alpha_1$, $z=\alpha+\beta-\alpha_2$, ... $z=\alpha+\beta-\alpha_n$; $\varphi(z)$ ist demnach eine Function $2n^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Function hat auch $2n$ Wurzelpunkte, welche sein mögen $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha+\beta-a_1$, $\alpha+\beta-a_2$, ... $\alpha+\beta-a_n$.

Nach bekannten Sätzen ist nun

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} \varphi(z) &= F(z) + F(\alpha+\beta-z) \\ &= C\frac{(f(z)-f(a_1))(f(z)-f(a_2))\ldots(f(z)-f(a_n))}{(f(z)-f(\alpha_1))(f(z)-f(\alpha_2))\ldots(f(z)-f(\alpha_n))}. \end{aligned}$$

Denn der rationale Bruch rechter Hand ist eine d.-p. Function mit denselben Perioden wie $\varphi(z)$ und wird ebenso wie $\varphi(z)$ Null in den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha+\beta-a_1$, $\alpha+\beta-a_2$, ... $\alpha+\beta-a_n$ und unendlich in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\alpha+\beta-\alpha_1$, $\alpha+\beta-\alpha_2$, ... $\alpha+\beta-\alpha_n$.

Weiter betrachten wir die Function $\psi(z) = f(z)^2 \dfrac{F(z)-F(\alpha+\beta-z)}{f'(z)}$; auch diese Function ist doppelt-periodisch, mit denselben Perioden wie $f(z)$. Für die Werthe $z=\alpha_1$, $z=\alpha_2$, ... $z=\alpha_n$; $z=\alpha+\beta-\alpha_1$, $z=\alpha+\beta-\alpha_2$, ... $z=\alpha+\beta-\alpha_n$ wird sie wiederum unendlich und hat darum auch $2n$ Wurzelpunkte. Diese $2n$ Werthe sind erstens vier Werthe, welche $f(z)^2$ Null machen, und zweitens $2n-4$ von den $2n$ Werthen, welche $F(z)-F(\alpha+\beta-z)$ Null machen, denn die übrigen $z=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $z=\dfrac{\alpha+\beta+\omega}{2}$, $z=\dfrac{\alpha+\beta+\omega'}{2}$ und $z=\dfrac{\alpha+\beta+\omega+\omega'}{2}$ sind auch Wurzeln von $f'(z)$. Sei nun $f(z)=0$ für $z=c$ und $\alpha+\beta-c$ und die $2n-4$ Werthe von z, die $F(z)-F(\alpha+\beta-z)$ Null machen, $b_1, b_2, \ldots b_{n-2}$; $\alpha+\beta-b_1$, $\alpha+\beta-b_2$, ... $\alpha+\beta-b_{n-2}$. Wiederum ist

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (f(z))^2\frac{F(z)-F(\alpha+\beta-z)}{f'(z)} \\ &= C'\frac{(f(z)-f(c))^2(f(z)-f(b_1))\ldots(f(z)-f(b_{n-2}))}{(f(z)-f(\alpha_1))(f(z)-f(\alpha_2))\ldots(f(z)-f(\alpha_n))}, \end{aligned}$$

aber $f(c)=0$ und also

$$\text{II)}\quad F(z)-F(\alpha+\beta-z) = C'f'(z)\frac{(f(z)-f(b_1))(f(z)-f(b_2))\dots(f(z)-f(b_{n-2}))}{(f(z)-f(\alpha_1))(f(z)-f(\alpha_2))\dots(f(z)-f(\alpha_n))}.$$

Addiren wir die ersten und zweiten Glieder der Gleichungen I) und II), dann ist

$$\text{III)}\quad 2F(z) = \frac{C[(f(z)-f(a_1))(f(z)-f(a_2))\dots(f(z)-f(a_n))]+C'f'(z)[(f(z)-f(b_1))(f(z)-f(b_2))\dots f(z)-f(b_{n-2}))]}{(f(z)-f(\alpha_1))(f(z)-f(\alpha_2))\dots(f(z)-f(\alpha_n))}.$$

Jetzt bleibt noch übrig, die Constanten C und C' zu bestimmen. Wird $z=\alpha$, dann ist

$$2F(\alpha)=C+C'\left[\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right]_{z=\alpha}$$

und $z=\beta$ giebt

$$2F(\beta)=C+C'\left[\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right]_{z=\beta};$$

doch

$$\left(\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right)_{z=\alpha}=-\left(\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right)_{z=\beta},$$

deshalb

$$C=F(\alpha)+F(\beta)\quad\text{und}\quad C'=\frac{F(\alpha)-F(\beta)}{\left(\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right)_{z=\alpha}}.$$

Substituiren wir diese Werthe für C und C' in Gleichung III), so bekommen wir die verlangte Formel und wir haben

$$F(z)=\frac{\frac{1}{2}\{F(\alpha)+F(\beta)\}\{(f(z)-f(a_1))(f(z)-f(a_2))\dots(f(z)-f(a_n))\}+\frac{F(\alpha)-F(\beta)}{2\left(\frac{f'(z)}{(f(z))^2}\right)_{z=\alpha}}\{(f(z)-f(b_1))\dots(f(z)-f(b_{n-2}))}{(f(z)-f(\alpha_1))(f(z)-f(\alpha_2))\dots(f(z)-f(\alpha_n))}.$$

Aber die rationalen Brüche in den Gleichungen I) und II) können in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden. Nach bekannten Regeln wird dann gefunden

$$F(z)+F(\alpha+\beta-z)=C+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{f'(\alpha_p)}{f(z)-f(\alpha_p)}[(F(z)+F(\alpha+\beta-z)-C)(z-\alpha_p)]_{z=\alpha_p};$$

dabei ist $(F(\alpha+\beta-z)-C)(z-\alpha_p)_{z=\alpha_p}=0$, somit

$$\text{IV)}\quad F(z)+F(\alpha+\beta-z)=F(\alpha)+F(\beta)+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{f'(\alpha_p)}{f(z)-f(\alpha_p)}\{F(z)(z-\alpha_p)\}_{z=\alpha_p}.$$

Wird nach derselben Regel auch der rationale Bruch in Gleichung II) transformirt, so ist

$$\frac{F(z)-F(\alpha+\beta-z)}{C'f'(z)}=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{f'(\alpha_p)}{f(z)-f(\alpha_p)}\left[\frac{F(z)-F(\alpha+\beta-z)}{C'f'(z)}(z-\alpha_p)\right]_{z=\alpha_p}$$

$$=\frac{1}{C'}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{(F(z)(z-\alpha_p))_{z=\alpha_p}}{f(z)-f(\alpha_p)}$$

und

$$\text{V)}\quad F(z)-F(\alpha+\beta-z)=f'(z)\sum_{p=1}^{p=n}\frac{(F(z)(z-\alpha_p))_{z=\alpha_p}}{f(z)-f(\alpha_p)}.$$

Aus 4) und 5) bekommen wir die Gleichung

$$\text{VI)}\quad 2F(z)=F(\alpha)+F(\beta)+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{f'(\alpha_p)+f'(z)}{f(z)-f(\alpha_p)}(F(z)(z-\alpha_p))_{z=\alpha_p},$$

welche mit der von Laurent gefundenen Formel im Wesentlichen übereinstimmt. Es findet sich leicht, wie diese Formeln modificirt werden, wenn nicht, wie hier angenommen ist, alle Werthe von z, welche die Function zu Null oder Unendlich machen, von einander verschieden sind, wenn also mehrere dieser Werthe zusammenfallen. Ebenso ist hier angenommen, dass keiner der Werthe die $f(z)$ unendlich mache, auch $F(z)$ einen unendlichen Werth gebe. Wenn dies der Fall wäre, so könnte man, nach einer Bemerkung von Laurent, statt $F(z)$, $F(z)$ dividirt durch eine Potenz von $f(z)$ entwickeln.

Groningen. Prof. H. J. Rink.

III. Neuer einfacher Beweis des Satzes aus der Geometrie der Lage: Ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten schneidet auf einer Geraden in der Ebene desselben eine Punktinvolution aus.*

(Hierzu Taf. I Fig. 5 u. 6.)

Hierzu bedarf es zunächst des Beweises eines andern Satzes, der wohl auch bei anderen Aufgaben mit Vortheil zu verwenden ist:

Wenn sich die projectivische Beziehung zweier conjectivischen (incidenten) Punktreihen in der Weise stetig ändert, dass, während zwei Punktepaare AA_1, BB_1 fest bleiben, der dem festen Punkte C zugeordnete C_1 den Träger der Punktreihen durchläuft, so beschreiben die Doppelpunkte der durch die jedesmalige Lage von C_1 eindeutig auf einander bezogenen Punktreihen eine Punktinvolution.

Beweis. Auf einer Geraden L seien drei Punktepaare zweier projectivischen Punktreihen

* Vergl. Schröter, J. Steiner's Vorlesungen über synthet. Geometrie. 1867. Dritter Abschnitt. S. 236 § 39.

$$A A_1,\ B B_1,\ C C_1$$

gegeben. Nach der von Steiner in seinem Werke „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit etc.", S. 68 angegebenen Construction findet man die Doppelpunkte dieser Punktreihen, indem man die Punkte $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ mit einem Peripheriepunkte P einer beliebig in der Ebene des Trägers L vorgegebenen Curve zweiter Ordnung durch die resp. Strahlen

$$a a_1,\ b b_1,\ c c_1$$

verbindet; schneiden diese die Peripherie der Curve bezw. in den Punkten $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, und verbinden wir die Schnittpunkte

$$(\overline{\alpha\beta_1},\ \overline{\alpha_1\beta}) \text{ und } (\overline{\alpha\gamma_1},\ \overline{\alpha_1\gamma})$$

durch eine Gerade x, welche die Curve in den beiden Punkten X und Ξ schneidet, so bestimmen die Geraden

$$\overline{XP} \text{ und } \overline{\Xi P} \text{ auf } L$$

die Doppelpunkte der beiden Punktreihen. Bewegen wir nun C_1 auf L hin, so bewegt sich (Fig. 5 u. 6) der Schnittpunkt $(\overline{\gamma_1\alpha},\ \overline{\alpha_1\gamma})$ auf $\overline{\alpha_1\gamma}$ hin, der Strahl x dreht sich also um den Punkt

$$(\overline{\alpha\beta_1},\ \overline{\alpha_1\beta}),$$

die Strahlen $\overline{XP}$ und $\overline{\Xi P}$ bilden eine Strahleninvolution, ihre Schnittpunkte mit L also eine Punktinvolution.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun der an die Spitze gestellte Satz leicht erweisen.

Es seien α, β, γ, δ die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels und L eine Gerade in der Ebene desselben. Jeder Kegelschnitt des Büschels ist vollkommen bestimmt durch die Annahme einer Tangente a im Punkte α z. B. Dann aber haben wir in den Strahlenpaaren

$$a \text{ und } \delta\alpha,\quad \alpha\beta \text{ und } \delta\beta,\quad \alpha\gamma \text{ und } \delta\gamma$$

drei Strahlenpaare zweier projectivischen Strahlenbüschel, welche den Kegelschnitt erzeugen; dieselben schneiden die Gerade L in Punktepaaren zweier projectivischen Punktreihen

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1.$$

Die Doppelpunkte derselben sind offenbar die Schnittpunkte der Curve mit L. Drehen wir nun a um den Punkt α, so erhalten wir successive sämmtliche Kegelschnitte des Büschels; es bleiben jedoch die Strahlen

$$\delta\alpha,\quad \alpha\beta \text{ und } \delta\beta,\quad \alpha\gamma \text{ und } \delta\gamma,$$

und demgemäss auch die Punkte

$$A_1,\quad B \text{ und } B_1,\quad C \text{ und } C_1 \text{ auf } L$$

unverändert, nur der Punkt A bewegt sich als Schnittpunkt des Trägers L mit der Tangente a auf L fort; nach dem oben bewiesenen Satze bil-

den mithin die Doppelpunkte, das sind die Schnittpunktpaare jeder Curve des Büschels mit L, auf dieser Geraden eine Punktinvolution, w. z. b. w.

Jena. CARL HOSSFELD, Stud. math.

IV. Notiz über Tripel einer Curve dritter Ordnung, welche denselben Höhenschnitt haben.

In jedem Kegelschnittnetz kommt ein Kreis vor. Das gemeinsame Polardreieck desselben und irgend eines andern Kegelschnittes aus dem Netze hat den Mittelpunkt M des Kreises K zum Höhenschnitt und seine Ecken sind Tripel der Hesse'schen Curve H^3 des Netzes, d. h. Punkte, in welchen sie von einem Kegelschnitte berührt wird.

Ist P ein beliebiger Punkt dieser Curve und p seine Polare bezüglich K, so ist klar, dass nur zwei von den Schnitten P', P'', P''' von p und H^3 im Verein mit P ein Polardreieck bilden; denn haben P' und P'' diese Eigenschaft, so genügen sie auch der Bedingung $P'M \perp PP''$ und $P''M \perp PP'$, welcher folglich P''' nicht mehr entsprechen kann. Dieser Punkt liegt mit den weiteren Schnittpunkten der zwei anderen Dreiecksseiten auf einer Geraden g.

Es giebt also einfach unendlich viele Tripel erwähnter Art, ihre Ecken constituiren auf H^3 ein involutorisches Punktsystem und ihre Seiten umhüllen die zu H^3 polarreciproke Curve C_3 bezüglich des Kreises als Basiscurve. Ebenso ist auch infolge dessen die Enveloppe der Geraden G eine Curve dritter Classe.

Da H^3 Hesse'sche Curve für drei Kegelschnittnetze ist, so kann man das Resultat der Erörterung folgendermassen aussprechen:

„In jedem der drei Systeme von Tripeln einer Curve dritter Ordnung kommen einfach unendlich viele vor, welche einen gemeinschaftlichen Höhenschnitt besitzen.

Sie sind Polardreiecke für den Kreis, welcher in dem dem Tripelsystem entsprechenden Kegelschnittnetze auftritt, und bilden auf der Curve ein involutorisches Punktsystem. Die Seiten der Tripel umhüllen die zu der sprachlichen Curve polarreciproke Curve für den Kreis als Grundcurve."

Lässt man den Punkt P auf H^3 weiter rücken, bis er auch K angehört, so gelangt man durch diese Grenzbetrachtung zur folgenden Beziehung:

„Den Tangenten der Curve H^3 in ihren Schnittpunkten mit dem Kreise kommen bezüglich des letzteren Pole zu, die auf der Curve liegen."

Dies ist eine Relation, welche unverändert für jeden Kegelschnitt des Netzes gilt.

Wie für einen solchen der erste Satz lautet, wenn an Stelle des Kreismittelpunktes ein beliebiger Punkt und an Stelle der unendlich fernen Geraden die Polare des Punktes tritt, ist dem Gesagten leicht zu entnehmen.

Für die rationale Curve, die nur ein Tripelsystem besitzt, enthält der Kreis den Doppelpunkt. Die Kreistangente in diesem Punkte ist zugleich die Doppeltangente der Enveloppe der Tripelseiten.

Wien. ADOLF AMESEDER.

V. Integration der Differentialgleichung

$$1)\quad \left.\begin{array}{l}(A_1x^2+B_1y^2+C_1xy)\,dx+(A_2x^2+B_2y^2+C_2xy)\,dy\\+(A_3x^2+B_3y^2+C_3xy+D_3x+E_3y+F_3)(x\,dy-y\,dx)\end{array}\right\}=0.$$

Dieser Jacobi'schen Form genügen particulär drei durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, und da sie ein specieller Fall der Differentialgleichung ist, welche dem Connex erster Classe zweiter Ordnung entspricht, so muss ihre Integration auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe führen.* Die Allgemeinheit der obigen Gleichung und der Umstand, dass sie in der aufgeschriebenen Form bedingungslos integrirbar ist, mag es rechtfertigen, wenn wir auf die Transformation derselben kurz eingehen.

Die drei Geraden, welche der Gleichung 1) genügen, sind gegeben durch

$$y=\mu x,$$

wobei für die Richtungscoefficienten die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$B_2\mu^3+(B_1+C_2)\mu^2+(A_2+C_1)\mu+A_1=0$$

genommen werden müssen. Man bemerkt, dass die Glieder der vorgelegten Differentialgleichung, welche mit den Coefficienten D_3 und E_3 behaftet sind, in die beiden ersten Klammergrössen eingehen, so dass die Gleichung einfacher

$$2)\quad \left.\begin{array}{l}(a_1x^2+b_1y^2+c_1xy)\,dx+(a_2x^2+b_2y^2+c_2xy)\,dy\\+(a_3x^2+b_3y^2+c_3xy+f_3)(x\,dy-y\,dx)\end{array}\right\}=0$$

geschrieben werden kann.

Setzt man nun hierin

$$x=\frac{u}{v},\quad y=\frac{1}{v},$$

so entsteht

---

* Auf diese Eigenschaft habe ich in einer frühern Arbeit aufmerksam gemacht (diese Zeitschrift, Jahrg. XXVII S. 31).

$$\left.\begin{array}{l}(a_1 u^2 + b_1 + c_1 u)(u\,dv - v\,du)\\ + (a_2 u^2 + b_2 + c_2 u)\,dv + (a_3 u^2 + b_3 + c_3 u + f_3 v^2)\,du\end{array}\right\} = 0,$$

und diese Gleichung steht unter der Form

$$3)\quad \begin{array}{l}(a + bu + cu^2)\dfrac{dv}{du} + Au^2 + Bv^2 + Cuv + Du + Ev + F\\ \qquad + a_1 u^2\left(u\dfrac{dv}{du} - v\right) = 0,\end{array}$$

wobei sich die Coefficienten sofort angeben lassen, von einander unabhängig sind und a_1 seine frühere Bedeutung beibehalten hat. Sie ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass ihr drei der v-Axe parallele Gerade particulär genügen.

Die letzte Gleichung kann man, wie aus der bereits citirten Arbeit zu ersehen ist, unter allen Umständen integriren, falls das Schlussglied nicht vorkommt, also $a_1 = 0$ ist.

Nun lässt sich aber Gleichung 2) von vornherein in eine Gleichung derselben Form transformiren, bei welcher diese Bedingung erfülllt ist. Substituirt man nämlich

$$y = \lambda x + z,$$

so geht Gleichung 2) über in

$$2a)\quad \left.\begin{array}{l}\{a_1 x^2 + b_1(\lambda^2 x^2 + 2\lambda xz + z^2) + c_1(\lambda x^2 + xz)\}\,dx\\ + \{a_2 x^2 + b_2(\lambda^2 x^2 + 2\lambda xz + z^2) + c_2(\lambda x^2 + xz)\}(\lambda\,dx + dz)\\ + \{a_3 x^2 + b_3(\lambda^2 x^2 + 2\lambda xz + z^2) + c_3(\lambda x^2 + xz) + f_3\}(x\,dz - z\,dx)\end{array}\right\} = 0.$$

In derselben ist der dem früheren a_1 analoge Coefficient folgender Ausdruck:

$$(a_1 + b_1\lambda^2 + c_1\lambda) + (a_2 + b_2\lambda^2 + c_2\lambda)\lambda,$$

und derselbe kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn für λ irgend eine von den Wurzeln der Gleichung

$$b_2\lambda^3 + (b_1 + c_2)\lambda^2 + (a_2 + c_1)\lambda + a_1 = 0$$

gewählt wird. Nach diesen Bestimmungen muss die reducirte Gleichung $2a$) für

$$x = \frac{u_1}{v_1},\quad y = \frac{1}{v_1}$$

zweifellos in die Gleichung

$$3a)\quad (a' + b'u_1 + c'u_1^2)\frac{dv_1}{du_1} + A'u_1^2 + B'v_1^2 + C'u_1 v_1 + D'u_1 + E'v_1 + F' = 0$$

übergehen. Der sehr bekannte Fall, bei welchem in Gleichung 2) $f_3 = 0$ ist, verlangt, dass in Gleichung 3a) der Coefficient B' verschwindet, wodurch die Integration bedeutend einfacher ausfällt.

Aus dem Verlauf der Rechnung folgt, dass auch die Gleichung 3) unmittelbar in die Gleichung 3a) übergeführt werden kann.

Verschwinden in der Bestimmungsgleichung für λ die Coefficienten, ausgenommen a_1, so vertausche man in Gleichung 2) x und y unter einander; dann liefert die cubische Gleichung wieder brauchbare Wurzeln, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Stellen wir die einzelnen Substitutionen zusammen, so haben wir folgendes Schlussresultat: die Gleichung 2) kann durch die Ausdrücke

$$x=\frac{u_1}{v_1} \quad \text{und} \quad y=\frac{\lambda u_1+1}{v_1},$$

und die Gleichung 3) kann durch die Ausdrücke

$$u=\frac{u_1}{\lambda u_1+1} \quad \text{und} \quad v=\frac{v_1}{\lambda u_1+1}$$

in die Differentialgleichung 3a) transformirt werden, und aus diesem Grunde ist die Integration immer ausführbar.

Dresden, im Juni 1882. WOLDEMAR HEYMANN.

VI. Vermischte Lehrsätze über die Kegelschnitte und die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.*

I. Es giebt sechs Kegelschnitte, von denen ein jeder durch einen festen Punkt P, durch die Eckpunkte einer Seite eines gegebenen vollständigen Vierecks und durch die beiden Diagonalpunkte geht, welche nicht auf der bez. Seite des Vierecks liegen.

Diese sechs Kegelschnitte schneiden einander in demjenigen Punkte Q, welcher in Bezug auf das durch das Viereck bestimmte Kegelschnittbüschel zu P conjugirt ist. (Die Pole der Seiten des Vierecks in Bezug auf die entsprechenden Kegelschnitte sind sechs Punkte der Geraden PQ.)

II. Die vier Mittelpunkte der umbeschriebenen Kreise derjenigen vier Dreiecke, welche von vier Geraden gebildet werden, liegen bekanntlich** mit dem Brennpunkte der durch die vier Geraden bestimmten Parabel auf einem Kreise.

Der Durchmesser desselben ist die Hälfte derjenigen constanten Strecke, welche von der die obigen vier Geraden berührenden dreispitzigen Hypocycloide auf ihren eigenen Tangenten ausgeschnitten wird.

Der von Steiner herrührende Theil dieses Satzes gestattet übrigens einen raschen Beweis für den Feuerbach'schen Satz, indem man nach einander je zwei Seiten eines Dreiecks sammt den zugehörigen Höhen als Seiten eines Vierseits auffasst.

III. Es seien s und σ zwei Sehnen eines Kreises, von denen die erste als fest betrachtet wird. Auf der Peripherie des Kreises werde ein Punkt O als fest angenommen. Durch den Punkt P, in welchem die feste Sehne s von σ getroffen wird, ziehe man die Parallelen p, p' zu den Schenkeln des Peripheriewinkels, der seine Spitze in O hat und auf

* Berlin, Friedländer & S.

** Steiner, Gesammelte Werke, T. I S. 223, 2°.

der Sehne σ steht. Wenn die Sehne σ parallel verschoben wird, so umhüllen die Parallelen p, p' eine dreispitzige Hypocycloide. Dieselbe berührt die feste Sehne s in einem Punkte S, der leicht zu construiren ist. Trifft nämlich die durch O zu s gezogene Parallele den Kreis in O', so schneidet die durch O' zu σ parallel gelegte Gerade σ' die Sehne s in ihrem Berührungspunkte S. Die Hypocycloide schneidet die Sehne s in den beiden Punkten S_1, S_2, in welchen diese von den zu σ parallelen Tangenten des Kreises getroffen wird. Beachtet man noch, dass die durch O zu σ parallel laufende Gerade eine Tangente der Hypocycloide ist, so ist diese der Grösse und Lage nach bestimmt.

IV. Es seien V, W zwei feste und O ein beweglicher Punkt eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$. Die Halbgeraden OV, OW seien positiv, ihre Verlängerungen über O hinaus also negativ. Zieht man nun durch den festen Schnittpunkt P der Tangenten der Punkte V, W Parallelen zu OV, OW, so werden von den Parallelen auf OV, OW zwei Strecken abgeschnitten, deren Product J sich zugleich mit der Lage von O ändert. Beachtet man aber das Vorzeichen von J, so bleibt, je nachdem $\mathfrak{K}$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist,

$$OV.OW - 4J \lesseqgtr 0.$$

Hieraus folgt noch insbesondere für die Parabel: Der Ort des Poles einer Seite eines gegebenen Dreiecks in Bezug auf alle demselben umschriebenen Parabeln ist diejenige Hyperbel, welche die genannte Seite zur Tangente und die beiden anderen zu Asymptoten hat.

V. Ist einer dreispitzigen Hypocycloide ein Dreieck umbeschrieben, so bilden die dritten Tangenten, welche durch seine Ecken an die Curve gehen, mit der jedesmaligen Gegenseite (stets in derselben* Weise) denselben Winkel. Oder: Wenn der dreispitzigen Hypocycloide ein Dreieck ABC umbeschrieben ist, so ist das diesem umbeschriebene Tangentendreieck $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ABC ähnlich, und entsprechende Seiten der beiden Dreiecke bilden (in derselben Weise) denselben Winkel Θ mit einander. Die Inhalte der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ verhalten sich wie $1:4\cos^2\Theta$. Nimmt man jetzt die Dreiecke ABC_1, AB_1C, A_1BC, so ist für ihre umbeschriebenen Tangentendreiecke der constante Winkel wieder gleich Θ, also das Verhältniss der Inhalte auch wieder $1:4\cos^2\Theta$ u. s. w. in inf. Hieraus ergiebt sich, dass man durch fortgesetztes Antragen eines constanten Winkels ein graphisches Bild der Hypocycloide herstellen kann.

---

* D. h. wenn man, ohne jedoch die Ebene der Figur von der Rückseite zu betrachten, eine Ecke des Dreiecks nach oben richtet, so wird sich der stumpfe von den beiden an der Basis entstandenen Nebenwinkeln stets entweder rechts oder links befinden.

Oder: Die Seiten zweier nicht collinearer ähnlicher Dreiecke, von denen das eine dem andern umbeschrieben ist, berühren eine dreispitzige Hypocycloide.

Setzt man $\Theta = \frac{\pi}{3}$, so erhält man lauter Paare von einander umbeschriebenen congruenten Tangentendreiecken der Curve.

Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ folgt, dass der Inhalt des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ gleich Null ist, d. h. die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte und berühren sammt den Seiten eine dreispitzige Hypocycloide.*

VI. Zieht man an jedes Individuum einer Parabelschaar eine Tangente, welche mit der Axe desselben (stets in derselben Weise**) einen constanten Winkel φ bildet, so umhüllt diese Tangente eine dreispitzige Hypocycloide, welche die im Endlichen befindlichen drei Grundgeraden berührt. Der Fall, in welchem $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, wurde zuerst von Steiner angegeben. (Nr. V.)

VII. Es sei ein Kegelschnittbüschel, eine feste Gerade g und ein fester Punkt P gegeben. Die Verbindungslinien von P mit den beiden Schnittpunkten der Geraden g und eines Individuums $\mathfrak{K}$ des Büschels treffen $\mathfrak{K}$ zum andern Male in zwei Punkten P, P', deren Ort eine Curve dritter Ordnung vierter Classe C_4^3 ist. Dieselbe hat P zum Doppelpunkt und geht durch die vier Grundpunkte des Büschels. Falls diese reell sind, kann man sofort noch sieben andere Punkte der Curve angeben. Seien nämlich s_1, s'_1; s_2, s'_2; s_3, s'_3 die Gegenseitenpaare des Grundvierecks, und treffe g dieselben bez. in den Punkten S_1, S'_1; S_2, S'_2; S_3, S'_3, so gehören die Punkte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_1$; $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}'_2$; $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}'_3$, in welchen s_1, s'_1; s_2, s'_2; s_3, s'_3 bez. von den Geraden PS'_1, PS_1, PS'_2, PS_2, PS'_3, PS_3 getroffen werden, auch der Curve an. Ausserdem liegt noch nach einem bekannten Satze*** der Schnittpunkt Σ der Geraden $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}'_2$, $\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}'_3$ auf ihr. Das giebt einen elementaren Satz für das vollständige Viereck. Die Tangenten der Curve in P gehen durch die Punkte, in welchen g von dem durch P bestimmten Individuum $\mathfrak{K}_0$ des Büschels geschnitten wird. Also ist P ein gewöhnlicher Doppel-, Einsiedler- oder

---

* Steiner, Crelle's Journal, Bd. 53 S. 231: Ueber eine besondere Curve dritter Classe und vierten Grades. Schröter, Crelle's Journal, Bd. 54 S. 31: Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde. Cremona, Crelle's Journal, Bd. 64 S. 101: Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.

** Richtet man z. B. den Scheitel der Parabel (ohne die Ebene der Figur von der Rückseite zu betrachten) nach oben, so muss der constante Winkel z. B. immer rechts von der Axe liegen mit dem Scheitel nach oben.

*** Chasles, Comptes rendus 1853.

Rückkehrpunkt, je nachdem g den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_0$ trifft, nicht trifft oder berührt.

Diejenigen Individuen des Büschels, welche g berühren, berühren auch die Curve C_4^3 in dem Punkte, in welchem sie von der Verbindungslinie ihres Berührpunktes auf g mit P getroffen werden. Hierin liegt die Lösung der Aufgabe: Diejenigen Individuen eines Kegelschnittbüschels zu finden, welche eine durch die Grundpunkte gehende Curve C_4^3 berühren. Man construire mit Hilfe der Punkte, in denen die Curve ein Linienpaar des Büschels trifft, die Gerade g. Die beiden Individuen des Büschels, welche g berühren, sind die gesuchten, und die Berührpunkte liegen auf den Geraden, welche vom Doppelpunkte nach ihren Berührpunkten auf g gezogen werden können.

(Als besonderer Fall des polar gegenüberstehenden Satzes möge derjenige erwähnt werden, wo dem Punkte P die $\mathfrak{G}_\infty$ und der Geraden g der Brennpunkt der in einer Kegelschnittschaar vorkommenden Parabel entspricht. Alsdann erhält man eine dreispitzige Hypocycloide. Nämlich: Jede durch den Brennpunkt der Parabel einer gegebenen Kegelschnittschaar gehende Gerade γ bestimmt als Tangente ein Individuum $\mathfrak{K}$ der Schaar, welches eine zu γ parallele Tangente γ' aufzuweisen hat. Während γ sich um den Brennpunkt dreht und $\mathfrak{K}$ die Schaar durchläuft, wird γ' diejenige dreispitzige Hypocycloide umhüllen, welche die vier Grundgeraden der Schaar berührt. Man erhält noch leicht sieben weitere Tangenten der Curve, nämlich die Parallelen, welche durch die sechs Ecken des Grundvierseits zu den Verbindungslinien der jedesmaligen Gegenecken mit dem Brennpunkte der Parabel gezogen werden, berühren die Hypocycloide auch. Ferner ergeben diejenigen Paare der sechs neuen Tangenten, welche je durch zwei Gegenecken des Grundvierseits gehen, drei Schnittpunkte, welche auf einer siebenten Tangente der Curve liegen. Es ist dies diejenige bekannte Gerade, welche die Mitten der Diagonalen des Vierseits in sich aufnimmt. Die durch den Brennpunkt der Parabel gehenden Tangenten der Hypocycloide sind seine drei Gemeingeraden mit der Enveloppe der Asymptoten der Individuen der Schaar.)

Geht die Gerade g durch einen Grundpunkt des Büschels, so zerfällt die Curve C_4^3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade.

Ist P ein Diagonalpunkt des Vierecks der Grundpunkte, so zerfällt die C_4^3 in drei Gerade, von welchen die durch P gehenden Seiten des Vierecks zwei sind. Die dritte geht durch den Schnittpunkt von g mit der nicht durch P laufenden Diagonale.

VIII. Die Tangente und die Normale eines Punktes P eines Centralkegelschnittes mögen die Axen desselben in den Punkten A, B und A_1, B_1 treffen. Jedes dieser Punktepaare bestimmt mit dem Mittelpunkte

M der Curve ein Rechteck, dessen freie Ecke durch C und C_1 bezeichnet werden möge. Die Verbindungslinie CC_1 treffe die Axen in den Punkten A_2, B_2. Der Schnittpunkt $(A_1 B_2, A_2 B_1)$ heisse D. Dann trifft die Gerade MD die Normale in dem Mittelpunkte des zu P gehörigen Krümmungskreises, wie leicht ersichtlich.

Bewegt sich P auf dem Centralkegelschnitt, so durchläuft der Punkt C_1 einen mit dem ursprünglichen concentrischen und gleichartigen Centralkegelschnitt, der dieselben Axenrichtungen hat. Zugleich wird der neue Centralkegelschnitt von der Geraden CC_1 eingehüllt; diese ist also stets die Tangente des jedesmaligen Punktes C_1.

Die Construction der Scheitel des neuen Centralkegelschnittes ist bekanntlich sehr einfach. Hiernach lassen sich jetzt die Evoluten der Centralkegelschnitte leicht construiren. Man construirt nämlich den neuen Centralkegelschnitt durch Punkte. Für jeden seiner Punkte C_1 erhält man eine Tangente der Evolute. Dieselbe ist die Verbindungslinie der Fusspunkte der von C_1 auf die Axen gefällten Senkrechten.

Für die Parabel lässt sich unter Modificationen etwas Aehnliches aufstellen.

Greifswald. H. E. M. O. Zimmermann, Stud. phil.

VII. Zur Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen.

Durch Nebeneinanderstellen gleicher Zahlen erhält man neue, welche, je nach der Art der Zusammenstellung, durch bestimmte Primzahlen ohne Rest theilbar sind. Im Folgenden sollen zunächst Beispiele hierzu gegeben werden, von denen meines Wissens bisher nur einzelne bekannt gemacht worden sind; ferner soll gezeigt werden, wie man für irgend eine als Theiler gewählte Zahl alle durch Nebeneinanderstellung gleicher Zahlen entstehende Dividuen finden kann.

Art der Zusammenstellung:	Theiler für die entstehende Zahl:
Zwei gleiche 3- oder 15 ziffrige Zahlen	7, 11, 13.
„ „ 4-, 12- oder 20 „ „	73, 137.
„ „ 5-, 7-, 13- oder 19 „ „	11.
„ „ 6-, 10- oder 18 „ „	101.
„ „ 8 „ „	17.
„ „ 9 „ „	7, 11, 13, 19.
„ „ 11 „ „	11, 23.
„ „ 14 „ „	29, 101.
„ „ 17 „ „	11, 103.
„ „ 21 „ „	7, 11, 13, 127.
„ „ 22 „ „	89, 101.
„ „ 23 „ „	11, 47, 139.

Art der Zusammenstellung:					Theiler für die entstehende Zahl:
Drei	gleiche	2-, 4-, 8- oder 16	ziffrige	Zahlen . . .	3, 7, 13, 37.
„	„	5	„	„ . . .	3, 31, 37.
„	„	6 oder 12	„	„ . . .	3, 19.
„	„	7	„	„ . . .	3, 37, 43.
„	„	10	„	„ . . .	3, 7, 13, 31, 37.
„	„	11	„	„ . . .	3, 37, 67.
„	„	14	„	„ . . .	3, 7, 13, 37, 43.
„	„	20	„	„ . . .	3, 7, 13, 31, 37, 61.
Vier	„	2-, 6- oder 10	„	„ . . .	73, 101, 137.
„	„	3	„	„ . . .	7, 11, 13, 101.
„	„	4- oder 12	„	„ . . .	17, 73, 137.
„	„	5	„	„ . . .	11, 101.
„	„	7	„	„ . . .	11, 29, 101.
„	„	8	„	„ . . .	17.
„	„	9	„	„ . . .	7, 11, 13, 19, 101.
„	„	11	„	„ . . .	11, 23, 89, 101.
„	„	14	„	„ . . .	29, 73, 101, 127, 137.
„	„	15	„	„ . . .	7, 11, 13, 61, 101.
„	„	21	„	„ . . .	7, 11, 13, 29, 101, 127.
Fünf	„	2- oder 4	„	„ . . .	41.
„	„	3- „ 6	„	„ . . .	31, 41.
„	„	7- „ 14	„	„ . . .	41, 71.
„	„	12	„	„ . . .	31, 41, 61.
„	„	15	„	„ . . .	151.
Sechs	„	2	„	„ . . .	3, 7, 13, 37, 101.
„	„	3	„	„ . . .	3, 7, 11, 13, 19.
„	„	4	„	„ . . .	3, 7, 13, 37, 73, 137.
„	„	5	„	„ . . .	3, 7, 11, 13, 31, 37.
„	„	7	„	„ . . .	3, 7, 11, 13, 37, 43, 127.
Sieben	„	3	„	„ . . .	43.
„	„	4	„	„ . . .	29.
„	„	5	„	„ . . .	71.
„	„	6	„	„ . . .	43, 127.
Acht	„	2	„	„ . . .	17, 73, 101, 137.
„	„	3	„	„ . . .	7, 11, 13, 73, 101, 137.
„	„	7	„	„ . . .	11, 29, 73, 101, 137.
Neun	„	2	„	„ . . .	3, 7, 13, 19, 37.
Zehn	„	2	„	„ . . .	41.
„	„	3	„	„ . . .	31, 41.
„	„	6	„	„ . . .	31, 41, 61.

Um für irgend eine Primzahl z solche Dividuen, welche durch Nebeneinanderstellung gleicher Zahlen entstehen, aufzufinden, kann man folgendermassen verfahren. Man bilde die verschiedenen, periodisch wiederkehrenden Reste $r_0, r_1, r_2, \ldots$, welche sich bei der Division von 10^0, 10^1, $10^2, \ldots$ durch die Zahl z ergeben, deren Anzahl N also entweder gleich $z-1$ oder ein Theiler von $z-1$ ist.

Ist diese Anzahl N eine gerade Zahl $2k$, so erhält man durch Zusammenstellung zweier k-ziffrigen Zahlen ein Vielfaches von z; denn in diesem Falle ist jede der Summen r_0+r_k, r_1+r_{k+1}, $r_2+r_{k+2}, \ldots$ $r_{k-1}+r_{2k-1}$ gleich z. Die Voraussetzung, dass die Anzahl der Reste eine gerade ist, wird erfüllt, falls z ein Factor eines Ausdruckes von der Form 10^k+1 ist; die Beziehung zwischen den Resten entspricht einem Satze von Schlömilch über die periodischen Decimalbrüche, deren Periode eine gerade Anzahl von Stellen hat.*

Es lassen sich, falls $N=2k$ ist, auch noch weitere Vielfache von z durch Nebeneinanderstellen zweier $(2n+1)k$-ziffrigen Zahlen bilden; denn $r_{(2n+1)k}$ ist alsdann gleich r_k, also $r_0+r_{(2n+1)k}=z$ u. s. w.

Ist die Anzahl N der von einander verschiedenen Reste ein Vielfaches von 3, resp. 4, 5, 6 u. s. w., oder eine dieser Zahlen selbst, also gleich $3k$, resp. $4k$, $5k$, $6k, \ldots$ (worin k auch gleich 1 sein kann), so erhält man durch Nebeneinanderstellung von 3, resp. 4, 5, 6, ... gleichen k-ziffrigen Zahlen ein Vielfaches der gegebenen Zahl z. Denn unter der Annahme $N=3k$ ist, wie leicht zu beweisen, jede der Summen $r_0+r_k+r_{2k}$, $r_1+r_{k+1}+r_{2k+1}, \ldots r_{k-1}+r_{2k-1}+r_{3k-1}$ gleich nz, worin n eine ganze Zahl bedeutet; unter der Voraussetzung $N=4k$ ist jede der Summen $r_0+r_k+r_{2k}+r_{3k}$, $r_1+r_{k+1}+r_{2k+1}+r_{3k+1}, \ldots$ gleich nz u. s. w., entsprechend einem Satze über periodische Decimalbrüche: Ist die Anzahl der Stellen der Periode gleich vk, so ist die Summe aus den v Zahlen, welche durch je k aufeinanderfolgende Ziffern der Periode (von deren Anfang an gezählt) gebildet werden, gleich 10^k-1 oder ein Vielfaches von 10^k-1.** Ergiebt sich hiernach, dass Vielfache einer gegebenen Zahl z durch p-faches Nebeneinanderstellen gleicher k-ziffrigen Zahlen gebildet werden können, so erhält man solche Vielfache natürlich auch durch np-faches Zusammenstellen gleicher k-ziffrigen Zahlen, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Ferner erhält man alsdann, wie aus der Betrachtung der oben erwähnten Eigenschaften und der periodischen Wiederkehr der Reste $r_0, r_1, r_2, \ldots$ hervorgeht, auch noch weitere Dividuen von z durch p-faches Nebeneinanderstellen gleicher mk-ziffrigen Zahlen, wobei m jede ganze Zahl sein kann, mit Aus-

* Zeitschrift für Mathematik und Physik XXV, S. 416.

** Vergl. zu diesem Satze und zu den Sätzen über die Reste: Böhme, Perioden der Decimalbrüche. Berlin 1882.

nahme von p und aller Vielfachen der Zahl p, welche angiebt, wievielmal die mk-ziffrige Zahl nebeneinander gestellt werden soll.

Beispiel. Für $z = 73$ und 137 ist die Anzahl der von einander verschiedenen Reste gleich 8; also erhält man Dividuen von 73 und auch von 137:

erstens durch Nebeneinanderstellen von 2 gleichen 4ziffrigen, ebenso 12- oder 20ziffrigen Zahlen; desgleichen von $2n$ solchen Zahlen;

zweitens durch Nebeneinanderstellen von 4 gleichen 2ziffrigen, ebenso 4-, 6-, 10-, 12-, 14-, 18- ... ziffrigen Zahlen, desgleichen von $4n$ solchen Zahlen;

drittens durch Nebeneinanderstellen von 8 gleichen 1ziffrigen, ebenso 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 9-, 10- ... ziffrigen Zahlen, desgleichen von $8n$ solchen Zahlen.

Ist die Anzahl der von einander verschiedenen Reste eine Primzahl q, so können also Vielfache der gegebenen Zahl z nur durch q-faches oder nq-faches Nebeneinanderstellen gleicher m-ziffrigen Zahlen gebildet werden, und zwar muss m relative Primzahl zu q sein. Es lassen sich jedoch Dividuen für jede Primzahl z, unter Berücksichtigung der Reste $r_0, r_1, r_2, \ldots$, durch Zusammenstellung von zwei Zahlen bilden, welche gewisse Vielfache einer beliebigen k-stelligen Zahl sind. Denn es seien r_f und r_l zwei Reste, welche bei der Division von 10^f und 10^l durch die gegebene Zahl z entstanden sind, und man wähle zwei ganze Zahlen α und β so, dass $\alpha r_f + \beta r_l$ gleich z oder einem Vielfachen von z ist, so muss, wie leicht ersichtlich, auch $\alpha r_{f+1} + \beta r_{l+1}$, ebenso $\alpha r_{f+2} + \beta r_{l+2}$ u. s. w. durch z theilbar sein. Ist also z. B. $\alpha r_0 + \beta r_4 = z$, so ist auch jede der Summen $\alpha r_1 + \beta r_5$, $\alpha r_2 + \beta r_6$, $\alpha r_3 + \beta r_7$ durch z theilbar, mithin jede acht- oder mehrziffrige Zahl, welche entsteht, wenn man das α-fache einer vierziffrigen Zahl und das β-fache derselben nebeneinander stellt (die zweite Zahl links von der ersten), ein Vielfaches von z. Ist hierbei das α-fache eine fünfziffrige Zahl, so muss natürlich die fünfte Ziffer links zu der ersten rechts der β-fachen Zahl addirt werden; entsprechend ist zu verfahren, falls das α-fache mehr als fünf Ziffern hat.

Will man Dividuen einer Primzahl z durch derartige Zusammenstellungen von zwei Vielfachen einer k-ziffrigen Zahl bilden, so hat man zunächst Paare ganzer Zahlen α und β durch Auflösung der Bedingungsgleichung $\alpha r_0 + \beta r_k = mz$ zu bestimmen. Bezeichnet man mit $\alpha(abc\ldots k)$ und $\beta(abc\ldots k)$ das α- resp. β-fache einer beliebigen k-ziffrigen Zahl und durch Nebeneinanderstellen beider eine $2k$- oder mehrziffrige Zahl, welche durch die in oben angegebener Weise erfolgende Zusammenstellung derselben entsteht, so ist also alsdann $\beta(abc\ldots k)\,\alpha(abc\ldots k)$ stets durch z ohne Rest theilbar. Es mögen hier einige Beispiele solcher Zusammenstellungen für die Theiler 17, 19, 31 und 53 folgen.

$1(ab)\,2(ab)\ldots\; 9(ab)\,1(ab)\ldots\; 1(abc)\,3(abc)$
$8(abc)\,7(abc)\ldots\; 3(abcd)\,5(abcd)$
$4(abcd)\,1(abcd)\ldots\; 7(abcd)\,6(abcd)$
$2(abcde)\,5(abcde)\ldots\; 5(abcde)\,4(abcde)$
$8(abcde)\,3(abcde)\ldots\; 1(abcdef)\,8(abcdef)$

sind durch 17 ohne Rest theilbar.

$2(ab)\,9(ab)\ldots\; 3(ab)\,4(ab)\ldots\; 7(ab)\,3(ab)$
$1(abc)\,7(abc)\ldots\; 3(abc)\,2(abc)$
$2(abcd)\,7(abcd)\ldots\; 3(abcd)\,1(abcd)$
$5(abcd)\,8(abcd)\ldots\; 8(abcd)\,9(abcd)$
$4(abcde)\,7(abcde)\ldots\; 5(abcde)\,4(abcde)$
$6(abcde)\,1(abcde)\ldots\; 1(abcdef)\,8(abcdef)$
$1(abcdefg)\,4(abcdefg)\ldots\; 5(abcdefg)\,1(abcdefg)$

sind durch 19 ohne Rest theilbar.

$4(ab)\,3(ab)\ldots\; 3(abc)\,7(abc)\ldots\; 7(abc)\,6(abc)$
$5(abcd)\,3(abcd)\ldots\; 1(abcde)\,6(abcde)$
$6(abcde)\,5(abcde)\ldots\; 3(abcdefg)\,2(abcdefg)$

sind durch 31 ohne Rest theilbar.

$1(ab)\,6(ab)\ldots\; 9(ab)\,1(ab)\ldots\; 1(abc)\,7(abc)$
$8(abc)\,3(abc)\ldots\; 5(abcde)\,2(abcde)$
$1(abcdef)\,4(abcdef)\ldots\; 4(abcdefg)\,1(abcdefg)$

sind durch 53 ohne Rest theilbar.

Görlitz. Dr. Oscar Kessler.

VIII. Bemerkung über den Ausdruck „Theilung einer Strecke in unendlich kleine Theile“.

In den von mir im 27. Jahrgange publicirten Arbeiten habe ich an mehreren Stellen von Punktmengen gesprochen, welche eine Strecke in lauter unendlich kleine Theile zerlegen. Ich dachte nicht, dass irgend Jemand hierin etwas Anderes finden würde, als eine der Kürze wegen gewählte Ausdrucksweise. Nun ersehe ich aber aus einer Mittheilung, welche ich hierüber erhalte, dass jene Ausdrucksweise an gewisse absonderliche Anschauungen über die Natur des mathematischen Unendlichkleinen erinnert hat, dass es also möglicherweise scheinen könnte, als wenn ich diese Anschauungen theilte. Ich bemerke deshalb, dass, wenn ich sage: eine Strecke ist durch Punkte P in unendlich kleine Theile getheilt, dies nichts Anderes bedeuten soll, als: Kein noch so kleiner Theil der Strecke ist ohne Punkte P und kein noch so kleiner Theil enthält nur Punkte P. — Ferner glaube ich Veranlassung zu haben, zu bemerken, dass meine Abhandlung über die Fourier'sche Reihe (Jahrgang 27 S. 193) im Juni und der Artikel S. 176 im April 1881 eingesandt worden ist, erstere aber schon im Herbste 1880 geschrieben war.

Frankenthal, 30. Oct. 1882. W. Veltmann.

IV.

Die sechzehn Wendeberührungspunkte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Von

Ernst Lange

in Leipzig.

(Schluss.)

---

§ 3. Zusammensetzung der Ebenen zu Tetraedern.

Aus dem Verhalten aller gefundenen Ebenen gegenüber denen des Polartetraeders erkennen wir, dass Tetraeder, welche alle 16 Punkte auf sich tragen, sich nur nach folgenden Angaben zusammensetzen können:

1. aus vier Ebenen der Schaar 48;
2. aus drei Ebenen der Schaar 48 und einer Polartetraederebene;
3. aus zwei Ebenen der Schaar 48 und zwei Polartetraederebenen;
4. aus vier Ebenen der Schaar 64;
5. aus zwei Ebenen der Schaar 64 und zwei Ebenen der Schaar 48.

1. Tetraeder aus vier Ebenen der Schaar 48.

In jede Ecke des Polartetraeders laufen in jeder ihrer Ebenen zwei Verbindungslinien von je zwei Wendeberührungspunkten. Wählen wir als erste Ebene des neu zu construirenden Tetraeders z. B. diejenige, welche durch die Ecke I II III geht und durch die beiden Verbindungslinien $I_{1,4}$ und $II_{1,2}$ bestimmt ist, so müssen wir nothwendig als eine weitere Ebene dieses Tetraeders die durch dieselbe Ecke gehende und durch $I_{2,3}$, $II_{3,4}$ bestimmte wählen. Darnach haben wir noch die acht Punkte der Ebenen III und IV auf ein Paar Ebenen der Schaar 48 anzuordnen. Dies kann, wie wir aus den in die Ecken I III IV und II III IV hineinlaufenden Verbindungslinien je zweier dieser Punkte sehen, auf vier Weisen geschehen. Nach Wahl der ersten Ebene ist also die zweite bestimmt, die dritte kann auf acht verschiedene Weisen gewählt werden, darnach ist die vierte bestimmt. Da wir zur Wahl der ersten Ebene 48 Möglichkeiten haben und bei dieser Zusammensetzung dasselbe Tetraeder auf acht verschiedene Weisen

erhalten, so haben wir das folgende *Resultat:* Es giebt $\frac{48.8}{8} = 48$ Tetraeder, welche aus je vier Ebenen der Schaar 48 so zusammengesetzt sind, dass sie alle 16 Punkte auf sich tragen.

2. Tetraeder aus drei Ebenen der Schaar 48 und einer Polartetraederebene.

Ist die Polartetraederebene für das zusammenzusetzende neue Tetraeder bestimmt, so können wir als übrige Ebenen nur solche aus der Schaar 48 benutzen, welche durch die Gegenecke gehen. Die sechs dort zusammenstossenden Verbindungslinien je zweier Wendeberührungspunkte lassen sich auf acht verschiedene Weisen zu Paaren zusammenfassen, die drei geeignete Ebenen der Schaar 48 bestimmen.

Resultat. Es giebt $4.8 = 32$ Tetraeder der genannten Zusammensetzung, welche alle 16 Punkte auf sich tragen.

3. Tetraeder aus einer Ebene der Schaar 48 und zwei Polartetraederebenen.

Ein Paar von Polartetraederebenen können wir auf sechs Weisen wählen. Die acht ihnen nicht angehörigen Punkte liegen auf vier Ebenenpaaren aus der Schaar 48.

Resultat. Es giebt also $6.4 = 24$ Tetraeder der genannten Zusammensetzung, welche alle 16 Punkte auf sich tragen.

4. Tetraeder aus Ebenen der Schaar 64.

Die Abzählung dieser Tetraeder soll in der Weise geschehen, dass wir successive überlegen, wieviele Ebenen wir als erste, zweite, dritte, vierte für ein zu construirendes Tetraeder wählen können, nachdem über die jeweils vorhergehende bereits verfügt ist.

Die erste Ebene können wir offenbar auf 64 verschiedene Weisen wählen; als zweite sind dann nur alle diejenigen Ebenen brauchbar, die durch keinen der vier schon in der ersten Ebene gelegenen Punkte gehen. Nun verlaufen durch einen beliebigen jener Punkte 16 von den 64 Ebenen, durch zwei der Punkte, die nicht derselben Polartetraederebene angehören, nur 4, durch drei jener Punkte nur eine Ebene aus der Schaar der 64. Um die Zahl der als zweite für das zu construirende Tetraeder brauchbaren Ebenen zu finden, müssen wir zunächst von der Gesammtzahl 64 subtrahiren die Zahl aller der Ebenen, welche durch einen der vier schon verbrauchten Punkte gehen, d. i. 4.16. Dabei haben wir alle Ebenen, welche durch zwei dieser Punkte gehen, doppelt gerechnet; wir müssen ihre Zahl also wieder einmal addiren. Die vier Punkte bilden sechs Paare, durch jedes Paar gehen vier Ebenen; es ist also $4.6 = 24$ die zu addirende Zahl. Die eine, als erste gewählte Ebene ist nun viermal subtractiv und sechs-

mal additiv gerechnet; sie muss also noch dreimal subtractiv gerechnet werden. Als zweite Ebenen sind also brauchbar:

$$64 - 4.16 + 4.6 - 3.1 = 21$$

Ebenen. In derselben Weise zählen wir ab, wieviele Ebenen nach Wahl der beiden ersten noch als dritte brauchbar sind; wir finden dabei:

$$64 - 8.16 + 24.4 - 3.2 - 24.1 + x = 2 + x$$

Ebenen, und es bedeutet hierin x die Zahl derjenigen von den 64 Ebenen, welche durch je vier von den acht Wendeberührungspunkten gehen, die in den beiden ersten gewählten Ebenen gelegen sind.

Diese Zahl ist je nach Wahl der zweiten Ebene verschieden, und wir benutzen, um die möglichen Fälle klar auseinanderzuhalten, wieder die Parametervertheilung an unserer Curve. Es seien jetzt (g_1, g_2), (g_3, u_1), (u_2, g_4), (u_3, u_4) die Benennungen von den vier Punkten der zuerst gewählten Ebene. Vermehren wir dieselben nach einander um (0, 2), (2, 0), (2, 2), so erhalten wir die Benennungen von je vier neuen Punkten, die drei weiteren von den 64 Ebenen angehören. Diese drei Ebenen gehören zu jenen 21 und haben zu der ersten Ebene und zu einander die Beziehung, dass jedes Punktepaar aus einer von ihnen mit einem Punktepaar aus einer andern wieder in einer Ebene der Schaar 64 liegt; man liest dies ohne Weiteres aus den Benennungen ab. Wählen wir also eine dieser drei Ebenen als zweite für das zu construirende Tetraeder, so ist $x = 6$; dann können als dritte also noch acht Ebenen benutzt werden. Durch mehrere an sich einfache zahlentheoretische Ueberlegungen — die sich immer auf die Benennungen der 16 Punkte beziehen — lässt sich zeigen, dass $x = 2$ ist, wenn wir eine der 18 noch übrigen von den 21 Ebenen als zweite für das zu construirende Tetraeder benutzen.

Darnach kann also die dritte nur noch auf vier Weisen gewählt werden. Sind drei Ebenen von den 64 bestimmt, welche zwölf der Punkte auf sich tragen, so zeigt das Abel'sche Theorem, dass die vier noch übrigen Punkte auch auf einer solchen Ebene gelegen sind, die dann die vierte für das neue Tetraeder bilden muss.

Unsere Abzählung zeigt also

$$64.18.4 + 64.3.8$$

Möglichkeiten, Tetraeder zusammenzusetzen, und da wir hierbei jedes Tetraeder 24mal erhalten, so ist die Anzahl der aus den 64 Ebenen zusammensetzbaren Tetraeder, welche alle 16 Punkte tragen, $\frac{64.18.4}{24} + \frac{64.3.8}{24} = 256.$

5. Tetraeder aus je zwei Ebenen der Schaaren 48 und 64.

Bei dieser Abzählung machen wir Gebrauch von dem folgenden Satze, dessen Beweis — da er sich nur aus einfachen zahlentheoretischen Schlüssen bezüglich der Benennungen unserer 16 Punkte zusammensetzt — wir übergehen wollen: Acht Wendeberührungspunkte, die, zu Paaren den vier Polaartetraederebenen angehörig, auf zwei Ebenen der Schaar 48 gelegen sind, gruppiren sich noch zweimal auf Ebenenpaare der Schaar 64. Greifen wir aus der Schaar 48 zwei solche Ebenen heraus, so bleiben noch acht Wendeberührungspunkte übrig, die auf zwei ebensolchen Ebenen gelegen sind. Nach dem obigen Satze giebt es also immer zwei Ebenenpaare aus der Schaar 64, die sich mit einem solchen aus der Schaar 48 zu einem richtigen Tetraeder ergänzen. Da es nun in der Schaar 48

$$\frac{48.8}{2}$$

solcher Ebenenpaare giebt, so erkennen wir das *Resultat:* Die Zahl der Tetraeder, welche aus je zwei Ebenen der Schaaren 48 und 64 bestehen und alle 16 Punkte auf sich tragen, ist $\frac{48.8}{2}.2 = 384$.

Die Zahl aller Tetraeder der verlangten Eigenschaft ist daher $1 + 48 + 32 + 24 + 256 + 384 = 745$.

§ 4. Gruppirung der Ebenen und Tetraeder nach unseren Operationen.

Einleitendes. Jeder der 16 Punkte war bestimmt durch ein Argument

$$r\frac{\omega}{2} + s\frac{\omega'}{2}$$

oder durch die Benennung (r, s). Die Summe der Benennungen von vier Punkten einer Ebene [welche bekanntlich $\equiv (0, 0)$ *mod* $(4, 4)$ ist] hatten wir als Benennung dieser Ebene bezeichnet, und wir können analog für die Summe der Benennungen von vier Ebenen den Namen: Benennung des betreffenden Tetraeders einführen. Wenn diese Sprechweise gestattet ist, so wird es in diesem Paragraphen unsere Aufgabe sein, festzustellen, mit wievielen gleichartigen Gebilden (also Punkten, Ebenen, Tetraedern) ein bestimmtes derselben bei Anwendung unserer Operationen seine Benennung austauscht. Eine solche Gesammtheit von Gebilden bezeichnen wir als eine *Gruppe gegenüber unseren Operationen.*

Um die Gruppirung der Gebilde festzustellen, benutzen wir die Tabelle der ausgezeichneten Untergruppen (Schluss des I. Cap.). Es genügt bekannt-

96.16 — 48.16 — 24.16 — 8.16 — 4.16 — 1.16 — 4 — 1

lich immer, eine einzige oder doch nur eine sehr beschränkte Anzahl von Operationen mit allen denjenigen einer ausgezeichneten Untergruppe zu verbinden, um dadurch alle die übrigen Operationen zu erhalten, welche mit jener ausgezeichneten Untergruppe zusammen die nächst zahlreichere erfüllen. Das System der ausgezeichneten Untergruppen ist für unsere Operationen so verzweigt, dass wir auf verschiedene Weise durch solche aufeinanderfolgende Erweiterungen von der niedrigsten ausgezeichneten Untergruppe, der Identität, zur höchsten, d. h. zur Gesammtgruppe selbst, gelangen können. Da es uns hauptsächlich darauf ankommt, die Gruppirung der Gebilde gegenüber der Gesammtgruppe kennen zu lernen, so wollen wir nur einen einzigen solchen Weg betrachten, und zwar den nebenstehenden, den wir aus dem früheren Schema herauszeichnen.

Für ihn lehrt die folgende Tabelle, welche Operationen den Uebergang von jeder ausgezeichneten Untergruppe zu derjenigen der nächst höheren Ordnung vermitteln. Wir erhalten alle Operationen der ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung q aus derjenigen der Ordnung p durch Verbindung der letzteren mit den Operationen O_i, wo für

$p=1$, $q=4$ die Operationen O_i sind die drei oftgenannten Transformationen der Periode 2;

$p=4$, $q=1.16$ die Operationen O_i sind die Transformationen $v' \equiv v + a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2} \mod 2\omega, 2\omega'$ mit $(a, b) = (0, 1), (1, 0), (1, 1)$;

$p=1.16$, $q=4.16$ die Operationen O_i sind die Substitutionen $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}$;

$p=4.16$, $q=8.16$ die Operationen O_i sind die einzige Substitution $\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}$;

$p=8.16$, $q=24.16$ die Operationen O_i sind: eine beliebige positive Substitution der Periode 3 und ihre zweite Potenz;

$p=24.16$, $q=48.16$ die Operationen O_i sind eine beliebige positive Substitution der Periode 4;

$p=48.16$, $q=96.16$ die Operationen O_i sind eine beliebige negative Substitution.

Es ist leicht zu erkennen, dass die 16 Punkte selbst nur eine einzige Gruppe bilden; schon die Transformationen vermögen ja ihre Benennungen ineinander überzuführen. — Dass ferner die Gruppen der 48 und 64 Ebenen durch unsere Transformationen nicht vermengt werden können, erkennen

wir aus dem verschiedenen Verhalten derselben gegenüber den Polartetraederebenen, wenn wir beachten, dass diese letzteren ihre Benennungen nur untereinander austauschen können.

1. Verhalten der 48 Ebenen.

Wir wissen, dass in jede Ecke des Polartetraeders sechs Verbindungslinien von je zwei Wendeberührungspunkten laufen. Diese Punktepaare haben alle dieselbe Summe der Argumente, also auch der Benennungen. Für die verschiedenen Tetraederecken sind diese Summen verschieden, so dass wir durch sie die Ecken charakterisiren können. Bei der ursprünglichen Darstellung der Curve gehört nämlich zur Ecke:

I II III	die Argumentensumme	ω',	also die Benennung	(0, 2),
I II IV	" "	$\omega+\omega'$,	" " "	(2, 2),
I III IV	" "	ω,	" " "	(2, 0),
II III IV	" "	0,	" " "	(0, 0).

Wenden wir nun der Reihe nach die Transformationen der Periode 2 an, so ändern sich die Benennungen (r_i, s_i) aller Punkte um (0, 2), (2, 0), (2, 2), jene Summen der Benennungen ändern sich aber nicht, und so tauscht jede Ebene der Schaar 48 bei Anwendung dieser Transformationen mit drei anderen Ebenen durch dieselbe Polartetraederecke ihre Benennung aus, so dass der ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung 4 gegenüber die 48 Ebenen in zwölf Gruppen von je vier zerfallen.

Nehmen wir die Transformationen mit $(a, b) = (0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ hinzu, so erreichen wir, dass jene Summen sich vertauschen und dass infolge dessen die eben beschriebenen Gruppen von je vier Ebenen sich zu je vier in Gruppen von 16 Ebenen vereinigen. Bezüglich der Zusammensetzung der letzteren gilt:

die erste Gruppe besteht aus je acht Ebenen mit Punktepaaren aus I und II, III und IV;

die zweite Gruppe besteht aus je acht Ebenen mit Punktepaaren aus I und III, II und IV;

die dritte Gruppe besteht aus je acht Ebenen mit Punktepaaren aus I und IV, II und III.

Die acht positiven Substitutionen von der Periode 2 und 1, deren Verbindungen mit den 16 Transformationen die Untergruppe 8.16 bilden, lassen die Benennungen der Polartetraederebenen unverändert, müssen daher auch die obigen Gruppen unvereinigt lassen. — Eine beliebige positive Substitution der Periode 3 und ihre zweite Potenz lassen nur die Benennung der Polartetraederebene I bestehen, vertauschen dagegen diejenigen von II, III, IV cyklisch und vereinigen also die drei obigen Ebenengruppen zu einer einzigen. Den 24.16 Operationen und allen zahlreicheren

ausgezeichneten Untergruppen gegenüber bilden die 48 Ebenen also nur eine einzige Gruppe.

2. Verhalten der 64 Ebenen.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass ausser der Identität keine von den 16 Transformationen die Benennung einer Ebene aus der Schaar 64 wieder in sich verwandeln kann, dass also diesen Operationen gegenüber sich vier Gruppen von je 16 Ebenen bilden müssen. Durch jeden Wendeberührungspunkt gehen vier Ebenen jeder dieser Gruppen. Um die Gruppirung gegenüber den 4.16 Operationen zu erfahren, genügt es, zu entscheiden, ob eine von den Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ zwei, verschiedenen Gruppen angehörige, Cyklen von vier Ebenen durch denselben Punkt [z. B. den Punkt (0, 0)] vermengen kann. Da dies nicht der Fall ist, bleibt auch dieser Operationsgruppe gegenüber die Gruppirung zu je 16 Ebenen bestehen. — Den 8.16 Operationen gegenüber entstehen Gruppen von 32 Ebenen, da $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ je zwei frühere Gruppen von 16 Ebenen vereinigt. Dieselbe Gruppirung bleibt gegenüber der ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung 24.16, aber schon die 48.16 Operationen vereinigen alle 64 Ebenen zu einer einzigen Gruppe.

3. Verhalten der Tetraeder.

Da unsere Operationen die Gruppen der 4, 48, 64 Ebenen nicht zu vereinigen vermögen, so können sie dies auch nicht thun mit den Gruppen der 1, 48, 32, 24, 256, 384 Tetraeder, wie wir aus deren Zusammensetzung ohne Weiteres erkennen. Es gilt also nur noch zu entscheiden, ob diese Gruppen nicht selbst wieder in kleinere zerfallen. Da die Art und Weise, wie dies festgestellt wird, im Wesentlichen dieselbe ist, wie bei der analogen Aufgabe für die 116 Ebenen, so beschränken wir uns darauf, die Resultate anzugeben.

a) Das Polartetraeder

bildet eine Gruppe für sich.

b) Die 48 Tetraeder

ordnen sich gegenüber der ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung 4 in 24 Gruppen mit je zwei Tetraedern, gegenüber der ausgezeichneten Untergruppe der 16 Transformationen in sechs Gruppen mit je acht Tetraedern. Die letztere Gruppirung bleibt auch den Untergruppen der Ordnungen 4.16 und 8.16 gegenüber. Beim Uebergang von der letzteren zu derjenigen der Ordnung 24.16 vereinigen sich je drei der obigen Gruppen zu einer einzigen mit 24 Tetraedern, und die 48.16 Operationen bereits vermögen die Benennungen aller 48 Tetraeder in einander überzuführen.

c) Die 32 Tetraeder

zerfallen den Transformationsgruppen der Ordnungen 4 und 16 gegenüber in ebenso zahlreiche Gruppen und verlieren diese letztere Gruppirung erst beim Uebergang von den 48.16 zu allen 96.16 Operationen, indem sie alle in eine Gruppe zusammenfallen.

d) Die 24 Tetraeder

ordnen sich den Transformationen der Periode 2 gegenüber in Gruppen mit zwei Tetraedern; gegenüber den ausgezeichneten Untergruppen der Ordnungen 16, 4.16, 8.16 in Gruppen von acht Tetraedern, und den 24.16 Operationen und allen zahlreicheren Untergruppen gegenüber fallen sie in eine einzige Gruppe zusammen.

e) Die 384 Tetraeder

bilden den Transformationsgruppen der Ordnungen 4 und 16 gegenüber ebenso zahlreiche Gruppen,

den 4.16 Operationen gegenüber Gruppen von 32 Tetraedern,
„ 8.16 „ „ „ „ 64 „
„ 24.16 „ „ „ „ 192 „

und endlich den 48.16 und also auch der Gesammtheit aller Operationen gegenüber fallen sie in eine Gruppe zusammen.

f) Die 256 Tetraeder

verlangen eine mehr ins Einzelne gehende Ueberlegung. Wir können nach § 3 Nr. 4 innerhalb der 64 Ebenen 16 Cyklen zu je vier Ebenen unterscheiden, welch' letztere in der gegenseitigen Beziehung stehen, dass jedes Punktepaar aus einer derselben mit je einem Punktepaar aus jeder der drei anderen wieder in einer neuen Ebene der Schaar 64 liegt. Die Ebenen eines solchen Cyklus enthalten zusammen gerade alle 16 Punkte, und so bilden diese Cyklen also 16 von unseren Tetraedern. Da, wie leicht zu sehen, die genannte gegenseitige Beziehung der Ebenen eines solchen Tetraeders sich bei Anwendung unserer Operationen nicht verwischt, so bilden diese Tetraeder innerhalb der 256 eine Gruppe für sich. Sie ordnen sich nach dem Obigen der ausgezeichneten Transformationsgruppe der Ordnung 4 gegenüber in Gruppen von je einem Tetraeder, den Untergruppen der Ordnungen 16 und 4.16 gegenüber in Gruppen zu vier, den 8.16 und 24 16 Operationen gegenüber in Gruppen zu acht Tetraedern, und schon die 48.16 Operationen vereinigen sie in eine einzige Gruppe.

Unter den 256 Tetraedern finden sich ferner 144, welche aus je zwei Ebenen zweier der obengenannten Viercyklen bestehen.

Wählen wir nämlich zur Construction eines Tetraeders zwei Ebenen eines ersten solchen Cyklus aus, so bleiben noch acht Wendeberührungs-

punkte übrig, die sich ausser auf das übrigbleibende Paar desselben Viercyklus noch auf drei Ebenenpaare anordnen (vergl. S. 67). Diese letzteren Paare müssen wieder solchen Viercyklen angehören, wie wir aus dem Umstande erkennen, dass je zwei derselben Polartetraederebene angehörige von den acht noch übrigen Wendeberührungspunkten Argumente besitzen, die sich um dieselben Periodenhälften unterscheiden. Nun giebt es doch 16.6 Paare von Ebenen desselben Viercyklus, und jedes bildet mit drei anderen ein neues Tetraeder; also haben wir, da wir hierbei jedes Tetraeder doppelt zählen,

$$\frac{16.6.3}{2} = 144$$

Tetraeder der angegebenen Art. Sie ordnen sich der ausgezeichneten Untergruppe von

4	Transformationen		gegenüber	in	Gruppen	zu	2	Tetraedern,
16	„		„	„	„	„	8	„
4.16	zusammengesetzt. Operationen		„	„	„	„	8	„
8.16	„	„	„	„	„	„	16	„
24.16	„	„	„	„	„	„	48	„

Diese letzte Gruppirung behalten sie allen höheren ausgezeichneten Untergruppen gegenüber bei, so dass wir in ihnen das erste und einzige Beispiel einer Schaar gleichartig zusammengesetzter Tetraeder erkennen, die nicht zugleich eine Gruppe unseren Operationen gegenüber ist.

Die noch übrigen 96 Tetraeder enthalten Ebenen von vier verschiedenen Viercykeln, denn diese Zusammensetzung ist die einzige, welche innerhalb jener 256 Tetraeder überhaupt noch möglich ist. Sie ordnen sich der ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung

4	gegenüber	in	Gruppen	zu	4	Tetraedern,
16	„	„	„	„	16	„
4.16, 8.16	„	„	„	„	32	„
24.16	„	„	„	„	96	„

Drittes Capitel.
Analytische Folgerungen.

---

§ 1. Einleitendes.

Die bisher gewonnenen Resultate ermöglichen uns, mit wenig Mühe die Gleichungen aller der 112 Ebenen durch vier Wendeberührungspunkte aufzustellen, die wir ausser den Polartetraederebenen noch kennen gelernt haben. Wir erfüllen dadurch nicht nur eine naheliegende analytisch-geo-

metrische Forderung, sondern wir erledigen zugleich eine functionentheoretische Frage, wie das Folgende lehren wird.

Die Killing'sche Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sigma(2v) : \sigma_1(2v) : \sigma_2(2v) : \sigma_3(2v)$$

ist ein besonderer Fall von der Darstellung der Normalcurven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte 1 im Raum von $n-1$ Dimensionen, welche Herr Klein im 17. Bd. der Mathem. Annal., S. 133 gegeben hat. Herr Klein definirt dort eine solche Curve durch Gleichungen der folgenden Art:

$$\begin{aligned}
\varrho x_0 &= \sigma(v-a_1) \,.\, \sigma(v-a_2) \ldots \sigma(v-a_n),\\
\varrho x_1 &= \sigma(v-b_1) \,.\, \sigma(v-b_2) \ldots \sigma(v-b_n),\\
&\;\;\vdots \\
\varrho x_n &= \sigma(v-n_1) \,.\, \sigma(v-n_2) \ldots \sigma(v-n_n),
\end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Summen der Grössen $a, b, \ldots n$ einander gleich, also z. B. alle $=0$ sind, und stützt sich dabei auf zwei Sätze, die Hermite für θ-Functionen aufgestellt hat, die aber ohne Weiteres auch für σ-Functionen gelten. Sie sagen aus, dass

1. alle solche n-gliedrigen σ-Producte sich durch n unabhängige von ihnen linear ausdrücken, und
2. dass die Quotienten aus zwei solchen Producten elliptische Functionen sind.

Dass die Killing'sche Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung hiervon ein besonderer Fall ist, tritt klar hervor, wenn wir dieselbe in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned}
\varrho x_0 &= \sigma(v) \,.\, \sigma(v+\omega+\omega') \,.\, \sigma(v-\omega) \,.\, \sigma(v-\omega'),\\
\varrho x_1 &= \sigma\left(v-\frac{\omega}{2}\right) . \,\sigma\left(v+\frac{\omega}{2}-\omega'\right) . \,\sigma\left(v-\frac{3\omega}{2}\right) . \,\sigma\left(v+\frac{3\omega}{2}+\omega'\right),\\
\varrho x_2 &= \sigma\left(v-\frac{\omega+\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v-\frac{3\omega+3\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v+\frac{\omega}{2}+\frac{3\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\\
\varrho x_3 &= \sigma\left(v-\frac{\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v-\omega+\frac{\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v+\omega+\frac{3\omega'}{2}\right) . \,\sigma\left(v-\frac{3\omega'}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die auf den rechten Seiten stehenden σ-Producte unterscheiden sich von resp. $\sigma(2v)$, $\sigma_1(2v)$, $\sigma_2(2v)$, $\sigma_3(2v)$ nur um constante Factoren, die wir in die Coordinaten aufnehmen können. Diese vier viergliedrigen σ-Producte sind nun von einander unabhängig, und wir können also alle Producte

$$\sigma(v-a_1) . \sigma(v-a_2) . \sigma(v-a_3) . \sigma(v-a_4),$$

für welche

$$a_1+a_2+a_3+a_4=0,$$

durch sie linear ausdrücken. Ein solches Product verschwindet nur in den vier Punkten

$$v = a_1, a_2, a_3, a_4$$

unserer Curve, und da es sich linear durch die vier obigen Producte oder durch $\sigma(2v)$, $\sigma_1(2v)$, $\sigma_2(2v)$, $\sigma_3(2v)$ ausdrückt, so muss es, wenn wir statt der σ-Functionen die ihnen proportionalen Coordinaten einführen und den Ausdruck $= 0$ setzen, die Gleichung der Ebene ergeben, welche durch die vier Punkte

$$v = a_1, a_2, a_3, a_4$$

unserer Curve geht. Uns interessiren hier insbesondere die Ebenen, welche durch je vier von den Wendeberührungspunkten gehen, oder die viergliedrigen σ-Producte der angegebenen Art, welche als Grössen a Periodenviertel besitzen. Es kommt nach dem Obigen im Wesentlichen auf dasselbe hinaus, ob wir die Gleichungen jener Ebenen analytisch bestimmen oder ob wir die entsprechenden σ-Relationen aufstellen. Wir werden Beides thun und in der Uebereinstimmung der Resultate eine Controle erhalten.

In Wirklichkeit brauchen wir aber gar nicht alle jene 112 σ-Relationen oder Ebenengleichungen aufzustellen. Wir haben gesehen, dass sie in zwei getrennte Gruppen zu 48 und 64 zerfallen, und dass durch unsere Operationen die Benennungen aller Ebenen einer und derselben Gruppe in einander übergeführt werden können. Wir werden also (in § 2) aus jeder Gruppe ein Element aufstellen und es im Uebrigen den Operationen überlassen, daraus alle anderen abzuleiten. So ist eine erste Vereinfachung für diese letzte Aufgabe geschaffen.

In unsere σ-Relationen gehen ausser den σ-Functionen nur die Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ ein. Wir werden uns also (in § 3) eine Tabelle aufstellen für die Umwandlungen, die die einzelnen Operationen an den zehn Grössen (vier σ-Functionen und sechs Wurzeln $\sqrt{e_i - e_k}$) herbeiführen, und haben nach dieser Tabelle immer nur unsere σ-Relationen umzugestalten, um die neuen Relationen zu erlangen, die durch die betreffenden Operationen aus den alten hervorgehen.

Hierfür giebt uns aber eine zweite Erleichterung die Gruppentheorie an die Hand. Sie hat uns doch gelehrt, dass wir alle Operationen der Gesammtgruppe aus nur zwei Substitutionen und einer Transformation zusammensetzen können, und also werden wir Nichts weiter zu thun haben, als die Wirkungen dieser drei Operationen auf jene zehn Grössen festzustellen. Darnach ist es eine ganz elementare Arbeit, diese Umwandlungen zusammenzusetzen und in die σ-Relationen einzutragen.

§ 2. Aufstellung zweier σ-Relationen (resp. Ebenengleichungen).

Wir kommen nach diesen einleitenden Ueberlegungen zur Erledigung des ersten Theiles der am Anfang dieses Capitels genannten Aufgabe: zur Aufstellung der beiden σ-Relationen.

Als vier Wendeberührungspunkte, welche einer Ebene der Schaar 48 angehören, können wir z. B. wählen:

$$v=0,\quad v=\omega+\omega',\quad v=\frac{\omega'}{2},\quad v=\omega+\frac{\omega'}{2}.$$

Das in ihnen verschwindende σ-Product hat nach richtiger Normirung der Argumente (welche so geschehen muss, dass die Summe der Subtrahenden 0 ist) die Gestalt:

$$\sigma(v).\sigma(v-\omega-\omega').\sigma\left(v+\frac{3\omega'}{2}\right).\sigma\left(v+\omega-\frac{\omega'}{2}\right)$$

und ist nach dem Hermite'schen Satze gleich einer linearen Function der σ-Functionen vom Argumente $2v$, also

$$\sigma(v).\sigma(v-\omega-\omega').\sigma\left(v+\frac{3\omega'}{2}\right).\sigma\left(v+\omega-\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$=A\sigma(2v)+B\sigma_1(2v)+C\sigma_2(2v)+D\sigma_3(2v).$$

Um die unbekannten Constanten A bis D zu bestimmen, geben wir dem v besondere Werthe. Setzen wir für v zunächst die Argumente ein, für welche je ein Factor der linken Seite der Gleichung verschwindet, so erreichen wir dadurch die Bestimmung jener Coefficienten bis auf eine multiplicative Constante. Für $v=0$ geht die Gleichung über in:

1) $$0=B+C+D;$$

für $v=\omega+\omega'$ in:

2) $$0=B-C+D;$$

für $v=\frac{\omega'}{2}$ in:

$$0=A\sigma(\omega')+B\sigma_1(\omega')+C\sigma_2(\omega'),$$

welche Gleichung wir unter Benutzung der aus der Theorie der σ-Functionen bekannten Formeln:

$$\frac{\sigma_1(\omega')}{\sigma(\omega')}=\sqrt{e_3-e_1},\quad \frac{\sigma_2(\omega')}{\sigma(\omega')}=\sqrt{e_3-e_2}$$

auch schreiben können:

3) $$0=A+B\sqrt{e_3-e_1}+C\sqrt{e_3-e_2}.$$

Setzen wir endlich $v=\omega+\frac{\omega'}{2}$ ein, so erhalten wir:

$$0=A\sigma(2\omega+\omega')+B\sigma_1(2\omega+\omega')+C\sigma_2(2\omega+\omega'),$$

oder

$$0=-A\sigma(\omega')-B\sigma_1(\omega')+C\sigma_2(\omega'),$$

oder unter Anwendung der obigen Formeln:

4) $$0=-A-B\sqrt{e_3-e_1}+C\sqrt{e_3-e_2}.$$

Wir erkennen aus den Gleichungen 1) bis 4) zunächst:

$$C=0,\quad B=-D,$$

und unsere σ-Relation nimmt nun die Gestalt an:

$$\sigma(v).\sigma(v-\omega-\omega').\sigma\left(v+\frac{3\omega'}{2}\right).\sigma\left(v+\omega-\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$=B\left[-\sqrt{e_3-e_1}\,\sigma(2v)+\sigma_1(2v)-\sigma_3(2v)\right].$$

Um endlich den Werth B zu bestimmen, genügt es, in die Formel noch einen besondern Werth für v einzusetzen, für welchen die linke Seite keinen verschwindenden Factor erhält, z. B. $v = \omega$. Wir finden dann:

$$B = \frac{\sigma(\omega).\sigma(\omega').\sigma\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right).\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right) e^{\eta'\omega'}}{2},$$

und damit ist die erste der erstrebten σ-Relationen gewonnen.

Ebenso wählen wir nun die Argumente von vier Wendeberührungspunkten, welche einer Ebene der Schaar 64 angehören, so aus, dass ihre Summe den Werth 0 hat, und erhalten durch den ersten der genannten Hermite'schen Sätze für sie die Relation:

$$\sigma(v).\sigma\left(v + \frac{\omega}{2}\right).\sigma\left(v + \frac{\omega'}{2}\right).\sigma\left(v - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}\right)$$
$$= A.\sigma(2v) + B.\sigma_1(2v) + C.\sigma_2(2v) + D.\sigma_3(2v).$$

Setzen wir in diese für v der Reihe nach die Werthe ein:

$$v = 0, \quad -\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad -\frac{\omega'}{2},$$

so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \qquad\qquad B + C + D,\\
0 &= -A\sigma(\omega) \qquad . \qquad + C\sigma_2(\omega) + D\sigma_3(\omega),\\
0 &= A\sigma(\omega+\omega') + B\sigma_1(\omega+\omega') \quad . \quad + D\sigma_3(\omega+\omega'),\\
0 &= -A\sigma(\omega') + B\sigma_1(\omega') + C\sigma_2(\omega') \quad . \quad ,
\end{aligned}$$

denen wir unter Benutzung der bekannten Formeln:

$$\frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma(\omega)} = \sqrt{e_1 - e_2}, \quad \frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)} = \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \frac{\sigma_1(\omega')}{\sigma(\omega')} = \sqrt{e_3 - e_1},$$
$$\frac{\sigma_2(\omega')}{\sigma(\omega')} = \sqrt{e_3 - e_2}, \quad \frac{\sigma_1(\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} = \sqrt{e_2 - e_1}, \quad \frac{\sigma_3(\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} = \sqrt{e_2 - e_3}$$

die Formen geben können:

$$\begin{aligned}
&1) \quad 0 = \quad . \quad B + C + D,\\
&2) \quad 0 = -A \quad . \quad + C\sqrt{e_1 - e_2} + D\sqrt{e_1 - e_3},\\
&3) \quad 0 = A + B\sqrt{e_2 - e_1} \quad . \quad + D\sqrt{e_2 - e_3},\\
&4) \quad 0 = -A + B\sqrt{e_3 - e_1} + C\sqrt{e_3 - e_2} \quad .
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich die Coefficienten A bis D bis auf einen constanten Factor, und wir gewinnen so die Relation:

$$\sigma(v).\sigma\left(v + \frac{\omega}{2}\right).\sigma\left(v + \frac{\omega'}{2}\right).\sigma\left(v - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}\right)$$
$$\begin{aligned}
= Const.\Big\{&\sigma(2v).\left[-\sqrt{e_1 - e_3}.\sqrt{e_3 - e_2} - \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}.\sqrt{e_3 - e_1}\right]\\
&+ \sigma_1(2v).\left[\sqrt{e_3 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}\right]\\
&+ \sigma_2(2v).\left[-\sqrt{e_3 - e_1} - \sqrt{e_1 - e_3}\right]\\
&+ \sigma_3(2v).\left[-\sqrt{e_3 - e_2} + \sqrt{e_3 - e_1} + \sqrt{e_1 - e_2}\right]\Big\},
\end{aligned}$$

die wir nur durch Berechnung von *Const.* noch zu vervollständigen haben. Wir setzen zu dem Ende in die ursprüngliche Relation noch $\frac{\omega}{2}$ für v ein und erhalten dadurch:

$$Const. = -\frac{\sigma\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right).\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right).\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{2\left[-\sqrt{e_1-e_3}.\sqrt{e_3-e_2}-\sqrt{e_3-e_1}.\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_1-e_3}.\sqrt{e_3-e_1}\right]}$$

Die Gleichungen für die Ebenen durch die gewählten beiden Punktquadrupel ergeben sich, wie wir gesehen haben, wenn wir in die gewonnenen Relationen statt der σ-Functionen die ihnen proportionalen Coordinaten einführen und die rechten Seiten darnach $=0$ setzen. Die Ebene durch die vier Punkte:

$$v=0, \quad v=\omega+\omega', \quad v=\frac{\omega'}{2}, \quad v=\omega+\frac{\omega'}{2}$$

erhält so die Gleichung:

$$0=-x_0\sqrt{e_3-e_1}+x_1-x_3,$$

während die Gleichung der Ebene durch die vier Punkte:

$$v=0, \quad v=\frac{3\omega}{2}, \quad v=\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}, \quad v=\frac{3\omega'}{2}$$

lautet:

$$\begin{aligned}
&x_0\left[-\sqrt{e_1-e_3}.\sqrt{e_3-e_2}-\sqrt{e_3-e_1}.\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_1-e_3}.\sqrt{e_3-e_1}\right]\\
&+x_1\left[\sqrt{e_3-e_2}+\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}\right]\\
&+x_2\left[-\sqrt{e_3-e_1}-\sqrt{e_1-e_3}\right]\\
&+x_3\left[-\sqrt{e_3-e_2}+\sqrt{e_3-e_1}+\sqrt{e_1-e_2}\right]=0.
\end{aligned}$$

Die Controle, ob wir auf analytisch-geometrischem Wege zu denselben Ebenengleichungen gelangen, macht sich äusserst einfach. Wir haben früher die Tabelle für die Coordinaten jener 16 Punkte aufgestellt und ihr entnehmen wir jetzt, dass die vier Punkte der ersten Ebene die Coordinaten besitzen:

$$\begin{aligned}
v&=0, & x_0:x_1:x_2:x_3&=0:1:1:1,\\
v&=\omega+\omega', & x_0:x_1:x_2:x_3&=0:1:-1:1,\\
v&=\frac{\omega'}{2}, & x_0:x_1:x_2:x_3&=1:\sqrt{e_3-e_1}:\sqrt{e_3-e_2}:0,\\
v&=\omega+\frac{\omega'}{2}, & x_0:x_1:x_2:x_3&=-1:-\sqrt{e_3-e_1}:\sqrt{e_3-e_2}:0,
\end{aligned}$$

und ebenso die vier Punkte der zweiten Ebene:

$$\begin{aligned}
v&=0, & x_0:x_1:x_2:x_3&=0:1:1:1,\\
v&=\frac{3\omega}{2}, & x_0:x_1:x_2:x_3&=-1:0:\sqrt{e_1-e_2}:\sqrt{e_1-e_3},
\end{aligned}$$

$$v = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \quad 1 : \sqrt{e_2 - e_1} : \quad 0 \quad : \sqrt{e_2 - e_3},$$
$$v = \frac{3\omega'}{2}, \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = -1 : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_3 - e_2} : \quad 0$$

Nun stimmen die Determinanten aus den Coordinaten dieser beiden Punktquadrupel genau überein mit resp. den Determinanten der beiden Gleichungssysteme 1), 2), 3), 4), aus denen sich die Verhältnisse der Coefficienten A bis D berechneten, und dies lehrt ohne Weiteres, dass wir dieselben Resultate erhalten würden, wollten wir in bekannter Weise jene Ebenengleichungen aufstellen.

§ 3. Aufstellung der Tabelle von Umwandlungen, welche die drei erzeugenden Operationen an den σ-Functionen und den Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ hervorbringen.

Die nun folgende Tabelle bedarf kaum einer Erläuterung. Die darin enthaltenen Formeln sind der Theorie der σ-Functionen entnommen und müssen hier als bekannt gelten; es kommt eben nur darauf an, dieselben hier zusammenzustellen.

Die eine Transformation:

$$v' \equiv +v + \frac{\omega'}{2} \; mod\, 2\omega,\, 2\omega',$$

welche wir als erzeugende benutzt haben, verwandelt

$$\begin{aligned}
\sigma(2v) \text{ in } \sigma(2v+\omega') &= \sigma_3(2v).\sigma(\omega').e^{2\eta' v},\\
\sigma_1(2v) \;\;\text{„}\;\; \sigma_1(2v+\omega') &= \sigma_2(2v).\sigma(\omega').e^{2\eta' v}.\sqrt{e_3 - e_1},\\
\sigma_2(2v) \;\;\text{„}\;\; \sigma_2(2v+\omega') &= \sigma_1(2v).\sigma(\omega').e^{2\eta' v}.\sqrt{e_3 - e_2},\\
\sigma_3(2v) \;\;\text{„}\;\; \sigma_3(2v+\omega') &= -\sigma(2v).\sigma(\omega').e^{2\eta' v}.\sqrt{e_3 - e_1}.\sqrt{e_3 - e_2}.
\end{aligned}$$

Die Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ dagegen werden, da sie nur von den Perioden abhängen, nicht von ihr betroffen.

Als ein Paar erzeugender Substitutionen haben wir kennen gelernt $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ oder in ausführlicher Schreibweise:

$$1) \qquad \omega = -\tilde{\omega}', \quad \omega' = \tilde{\omega},$$
$$2) \qquad \omega = \tilde{\omega} - \tilde{\omega}', \quad \omega' = \tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}'.$$

Sie bewirken Umwandlungen, welche die folgende Tabelle wiedergiebt. Dieselbe besitzt drei Colonnen, an deren Kopf wir die Formeln geschrieben haben, durch welche die in der betreffenden Colonne auftretenden neuen Perioden $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ mit den alten zusammenhängen. Am Kopfe der ersten Colonne stehen Identitäten; sie wollen weiter nichts aussagen, als dass 2ω; $2\omega'$ das ursprüngliche Periodenpaar bilden. Ferner enthält die Tabelle zehn Zeilen; alle Grössen derselben Zeile sind einander gleich: sie sind die ver-

schiedenen Gestalten der einen zu Anfang der Zeile stehenden Function, welche dieselbe je nach Wahl des Periodenpaares annimmt. Bei allen σ-Functionen sind die Perioden, welche für sie zu Grunde gelegt sind, in der Klammer mit angegeben, bei den Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ sind sie als Indices angefügt.

$\omega = \omega,$ $\omega' = \omega'.$	$\omega = -\tilde{\omega}',$ $\omega' = \tilde{\omega}.$	$\omega = \tilde{\omega} - \tilde{\omega}',$ $\omega' = \tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}'.$
$\sigma(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$	$\sigma(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$
$\sigma_1(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_3(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$	$\sigma_2(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$
$\sigma_2(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_2(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$	$\sigma_3(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$
$\sigma_3(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_1(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$	$\sigma_1(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$
$[\sqrt{e_1 - e_2}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_3 - e_2}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$	$[-\sqrt{e_2 - e_3}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$
$[\sqrt{e_1 - e_3}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_3 - e_1}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$	$[\sqrt{e_2 - e_1}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$
$[\sqrt{e_2 - e_3}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_2 - e_1}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$	$[\sqrt{e_3 - e_1}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$
$[\sqrt{e_2 - e_1}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_2 - e_3}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}}$	$[\sqrt{e_3 - e_2}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$
$[\sqrt{e_3 - e_1}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_1 - e_3}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$	$[-\sqrt{e_1 - e_2}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$
$[\sqrt{e_3 - e_2}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_1 - e_2}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$	$-\sqrt{e_1 - e_3}]_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$

Die mittlere Colonne giebt die Umwandlungen für eine Substitution von der Determinante $+1$, wie sie in Vorlesungen über σ-Functionen der Regel nach behandelt werden. Wir wollen nur noch eine ergänzende Bemerkung hinzufügen über die letzte Colonne, weil diese eine Substitution der Determinante -1 enthält, und wir solche Substitutionen in der uns zugänglichen Literatur über σ-Functionen (Abschrift eines nach Vorlesungen des Herrn Weierstrass geführten Collegheftes und ein Theil von: „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen“ von Schwarz) nicht behandelt gefunden haben. Die am Kopfe der dritten Colonne stehende Substitution setzt sich multiplicativ aus einer Substitution der Determinante $+1$ und einer solchen der Determinante -1 — deren Umwandlungen wir sofort übersehen können — wie folgt zusammen, wenn wir die schon mehrfach angewendete kurze Schreibweise benutzen:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Die erste dieser beiden Substitutionen ergiebt die folgende Umwandlungstabelle:

$\omega = \omega,\ \omega' = \omega'.$	$\omega = -\bar{\omega} - \bar{\omega}',\ \omega' = -\bar{\omega} - 2\bar{\omega}'.$
$\sigma(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$
$\sigma_1(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_2(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$
$\sigma_2(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_3(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$
$\sigma_3(2v \mid \omega, \omega')$	$\sigma_1(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$

$\omega = \omega,\ \omega' = \omega'.$	$\omega = -\bar{\omega} - \bar{\omega}',\ \omega' = -\bar{\omega} - 2\bar{\omega}'.$
$[\sqrt{e_1 - e_2}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_2 - e_3}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$
$[\sqrt{e_1 - e_3}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_2 - e_1}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$
$[\sqrt{e_2 - e_3}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_2 - e_3}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$
$[\sqrt{e_2 - e_1}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_3 - e_2}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$
$[\sqrt{e_3 - e_1}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_1 - e_2}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$
$[\sqrt{e_3 - e_2}]_{\omega, \omega'}$	$[\sqrt{e_1 - e_3}]_{\bar{\omega}, \bar{\omega}'}$

Auf die in der zweiten Colonne stehenden Grössen haben wir dann nur noch anzuwenden:

$$\bar{\omega} = -\tilde{\omega}, \quad \bar{\omega}' = \tilde{\omega}',$$

und die Umwandlungen, welche diese Substitution herbeiführt, wollen wir wirklich ausrechnen.

Zunächst erkennen wir aus der Ausgangsdefinition für $\sigma(v)$, welche diese Function als unendliches Product darstellt, dass:

$$\sigma(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}') = \sigma(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}').$$

Ferner finden wir aus den bekannten Formeln:

$$\bar{\eta} = \frac{\sigma'(\bar{\omega})}{\sigma(\bar{\omega})}, \quad \bar{\eta}' = \frac{\sigma'(\bar{\omega}')}{\sigma(\bar{\omega}')}$$

unter Beachtung des Umstandes, dass σ eine ungerade Function ist:

$$\bar{\eta} = -\tilde{\eta}, \quad \bar{\eta}' = \tilde{\eta}'.$$

Dies benutzen wir in der folgenden Berechnung:

$$\sigma_1(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}') = \frac{e^{-2\bar{\eta}v} . \sigma(\bar{\omega} + 2v)}{\sigma(\bar{\omega})} = \frac{e^{2\bar{\eta}v} . \sigma(\bar{\omega} - 2v)}{\sigma(\bar{\omega})}$$

$$= \frac{e^{2\tilde{\eta}v} . \sigma(-\tilde{\omega} + 2v)}{\sigma(-\tilde{\omega})}$$

$$= \frac{e^{2\tilde{\eta}v} . \sigma(\tilde{\omega} - 2v)}{\sigma(\tilde{\omega})} = \sigma_1(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}').$$

In derselben Weise finden wir:

$$\sigma_2(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}') = \sigma_2(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \quad \sigma_3(2v \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}') = \sigma_3(2v \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}').$$

Es genügt, wenn wir eine der Wurzelgrössen $\sqrt{e_i - e_k}$ umformen und für die anderen nur die Resultate angeben:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \left[\sqrt{e_1-e_2}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \frac{\sigma_2(\bar{\omega}\,|\,\bar{\omega},\bar{\omega}')}{\sigma(\bar{\omega}\,|\,\bar{\omega},\bar{\omega}')} \\
&= \frac{\sigma_2(-\tilde{\omega}\,|\,\bar{\omega},\bar{\omega}')}{\sigma(-\tilde{\omega}\,|\,\bar{\omega},\bar{\omega}')} \\
&= \frac{\sigma_2(-\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega},\tilde{\omega}')}{\sigma(-\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega},\tilde{\omega}')} \\
&= -\frac{\sigma_2(\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega},\tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}\,|\,\tilde{\omega},\tilde{\omega}')} = \left[-\sqrt{e_1-e_2}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}, \\
2)\quad & \left[\sqrt{e_1-e_3}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \left[-\sqrt{e_1-e_3}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}, \\
3)\quad & \left[\sqrt{e_2-e_3}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \left[-\sqrt{e_2-e_3}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}, \\
4)\quad & \left[\sqrt{e_2-e_1}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \left[+\sqrt{e_2-e_1}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}, \\
5)\quad & \left[\sqrt{e_3-e_1}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \left[+\sqrt{e_3-e_1}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}, \\
6)\quad & \left[\sqrt{e_3-e_2}\right]_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} = \left[+\sqrt{e_3-e_2}\right]_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}.
\end{aligned}
$$

V.

Ueber verschiedene Wärmecapacitäten und andere in der Wärmelehre vorkommende Grössen.

Von

Prof. Dr. C. Bohn
in Aschaffenburg.

Unter der Wärmecapacität eines Körpers versteht man den Theil der ihm mitzutheilenden Wärmemenge, welcher dazu verwendet und verbraucht wird, unter näher bestimmten Bedingungen eine Veränderung an ihm zu bewirken, deren Maass die Einheit ist, z. B. eine Temperaturerhöhung um 1°. Die Wärmecapacität eines Stoffes ist jene eines Körpers, der aus der Mengeneinheit dieses Stoffes besteht; — meist wird die Gewichtseinheit, zuweilen die Volumeinheit gewählt. Die specifische Wärme eines Stoffes ist seine Wärmecapacität, gemessen durch jene eines Vergleichstoffes, gewöhnlich des reinen Wassers. Die Veränderlichkeit der Grössen wird berücksichtigt und die Definition schärfer, wenn man die Wärmecapacität auffasst als das Verhältniss unendlich kleiner, der Mengeneinheit des Stoffes zugeführter oder mitzutheilender, für Hervorbringung unendlich kleiner Aenderung verwendeter und verbrauchter Wärmemenge zu jener Aenderung, das heisst als Differentialquotient, wie $\frac{\partial Q}{\partial t}, \frac{\partial Q}{\partial v}, \frac{\partial Q}{\partial p}$, wenn, wie üblich, Q eine Wärmemenge, t Temperatur, v Volum der Mengeneinheit, p normalen Oberflächendruck je auf die Flächeneinheit (oder Spannung) bezeichnen.

Der Ausdruck „specifische Wärme“ ist ziemlich nichtssagend und der Ausdruck „Wärmecapacität“ entspricht längst (und mit Recht) verlassenen Vorstellungen, weshalb es an der Zeit sein dürfte, bessere Ausdrücke zu wählen. „Wärmebedarf“ für näher bezeichneten Zweck unter bestimmten Bedingungen, wäre empfehlenswerth, allein die Angabe des Zweckes und der Bedingungen wird immer schleppend. Nun haben sich einige Kunstwörter, wie Schmelzwärme, Verdampfungswärme, Ausdehnungswärme* bereits eingebürgert, nach deren Vorbilde noch

* Das früher allgemein und auch jetzt noch häufig gebrauchte Beiwort „latent“ hat nach den gegenwärtigen Vorstellungen keinen Sinn mehr und ist daher fortzulassen.

andere geformt werden können, welche die in Rede stehenden Grössen möglichst kurz und deutlich benennen. Im absoluten Sinne ist die Ausdehnungswärme eines Körpers jene Wärmemenge, die verbraucht wird, um die für eine bestimmte (aber beliebige) Ausdehnung des Körpers erforderliche innere und äussere Arbeit zu leisten. Relativ genommen versteht man unter Ausdehnungswärme die Grenze des Verhältnisses des für die Mengeneinheit des Stoffes zur Leistung der Ausdehnungsarbeiten erforderlichen Wärmemenge zu der erfolgenden Ausdehnung, also einen Differentialquotienten. In diesem relativen Sinne sollen die Ausdrücke hier immer verstanden werden, also Differentialquotienten bedeuten. Stets bleiben die näheren Bedingungen, unter welchen die Aenderung erfolgen soll, anzugeben, ob z. B. die Ausdehnung bei unverändert bleibender Temperatur, oder bei constantem Drucke, oder sonstwie erfolgen soll.

Es fehlt ein allgemein angenommener kurzer Ausdruck für die ausschliesslich zur Mehrung des Druckes oder der Spannung eines Körpers benöthigte Wärmemenge. Nach Analogie von „Ausdehnungswärme" bildet man *Spannungswärme* (besser als Druckwärme). Folgerichtig schlage ich vor, die ausschliesslich für die Temperaturerhöhung oder Erwärmung dienende Wärmemenge *Erwärmungswärme* zu nennen, so sonderbar, weil ungewohnt, sich dieses Wort ausnimmt. Gestattet man die Beiwörter *gleichwarm*, *gleichdruckig*, *gleichräumig*, um auszusagen, dass bei der Zustandsänderung die Temperatur, beziehungsweise der Druck (Spannung), beziehungsweise das Volum *unverändert* bleiben soll, so lassen sich die sechs hauptsächlich in Betracht kommenden Wärmebedarfe, Wärmecapacitäten oder specifische Wärmen kurz und deutlich bezeichnen. Statt gleichwarm sagt man allgemein *isothermisch*, wie auch ähnliche Worte, isobarisch, isentropisch, isodynamisch u. s. w. sehr üblich sind. Da einige der in der Wärmelehre nöthigen Beiwörter sich rein deutsch nicht wohl geben lassen, ohne in das ganz Ungewöhnliche zu verfallen und gegen berechtigtes Herkommen zu verstossen, auch die aus dem Griechischen genommenen Kunstausdrücke in mehrfacher Hinsicht empfehlenswerth sind, soll statt gleichwarm immer *isothermisch* angewendet werden, statt des bisher nicht üblichen gleichdruckig aber *isopiestisch*. Dieses Wort (sprachlich richtiger wäre isopiesmisch) kommt bei englischen Schriftstellern vor, welche gleichräumig durch isometrisch geben. Allein isometrisch lässt nicht erkennen, *welches* Maass ungeändert bleiben soll, ist also nicht empfehlenswerth. Ich schlage vor, für gleichräumig zu sagen *isochorisch* (von ἡ χωρα oder ὁ χωρος, der Raum, und χωρεω, ich nehme einen Raum ein).

Was man gewöhnlich *specifische Wärme bei constantem Volum* nennt, ist nach meinem Vorschlage zu nennen *isochorische Erwärmungswärme*. Sie ist

$$\frac{\partial Q}{\partial t_v} = A\frac{\partial U}{\partial t_v},$$

wo A ($=\frac{1}{425}$) das Wärmeäquivalent der Arbeit, U wie üblich die Energie des Körpers bedeuten, während nach bekanntem Vorgange die einfache Hinsetzung eines Zeichens rechts unten (als Anhängsel) ausdrücken soll, die durch den angehängten Buchstaben bezeichnete Grösse habe constant zu bleiben. (Vollständiger, aber weitläufiger wäre anzuhängen $v = Const.$)

Es ist $dt = dT$ und es sagt $t = const.$ dasselbe, wie $T = const.$, d. h. wenn die Temperatur nach Celsiusgraden (t) ungeändert bleibt, dann auch die sogenannte absolute Temperatur (T). Da nun t in den Formeln besser zu v, p passt, soll stets t angewendet werden, wann und wo es T ersetzen kann.

Die Grösse $\frac{\partial U}{\partial t_v}$ ist die isochorische Erwärmungswärme, in mechanischem Arbeitsmaass ausgedrückt, und man kann sie füglich die isochorische Erwärmungsenergie nennen. Aehnlich ist $\frac{\partial U}{\partial t_p}$ die isopiestische Erwärmungsenergie zu nennen, ferner $\frac{\partial U}{\partial v_t}$ und $\frac{\partial U}{\partial v_p}$ isothermische und isopiestische Ausdehnungsenergie, $\frac{\partial U}{\partial p_t}$ und $\frac{\partial U}{\partial p_v}$ isothermische und isochorische Spannungsenergie. In der mechanischen Wärmelehre kommen vor die Differentialquotienten $\frac{\partial E}{\partial v_t}$ und $\frac{\partial E}{\partial v_p}$, dann $\frac{\partial E}{\partial p_t}$ und $\frac{\partial E}{\partial p_v}$, worin E die Entropie* bedeutet. Diese Grössen sind zu benennen: isothermische und isopiestische Ausdehnungsentropie, dann isothermische und isochorische Spannungsentropie. Das Zeichen E soll die ganze Entropie bezeichnen, e den Unterschied der Entropie eines Körpers in dem betrachteten Zustande gegen die Entropie dieses Körpers bei gewissen Normalverhältnissen, so dass also $E = e + const.$, ähnlich, wie ist $T = t + const.$ Dem nach ist de gleichbedeutend mit dE und e sagt als Index genau dasselbe wie E. Der bessern Uebereinstimmung in den Zeichen halber soll immer e, nicht E verwendet werden, um isentropische** Grössen anzudeuten. Endlich sind noch einige, theilweise schon ziemlich allgemein gebrauchte Benennungen aufzustellen.

$\frac{\partial v}{\partial t_p}$ und $\frac{\partial v}{\partial t_e}$ sind der isopiestische und der isentropische Ausdehnungscoefficient; $\frac{\partial p}{\partial t_v}$ und $\frac{\partial p}{\partial t_e}$ sind der isochorische und

* Clausius verwendet für Entropie das Zeichen S, aus später zu erwähnenden Gründen weiche ich hiervon ab.

** Wohl auch adiabatische genannt.

der isentropische Spannungscoefficient; $\frac{\partial p}{\partial v_t}$ und $\frac{\partial p}{\partial v_e}$ sind der isothermische und der isentropische Elasticitätscoefficient; $\frac{\partial v}{\partial p_t}$ und $\frac{\partial v}{\partial p_e}$ sind der isothermische und der isentropische Compressionscoefficient.

Noch nützlicher, als die systematische Benennung der so vielfach in der Wärmelehre vorkommenden Grössen ist es, eine systematische Bezeichnung derselben an Stelle der schwankenden, durch allerlei Zufälligkeiten entstandenen zu setzen. Die Sätze der Wärmelehre kommen dadurch in eine viel übersichtlichere Gestalt und sind dem Gedächtnisse leichter einzuprägen.

Ich schlage vor, zur Hauptbezeichnung der verschiedenen Wärmebedarfe den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes für die Grösse, welche durch die Wärmezufuhr verändert werden soll, zu wählen. Da die lateinischen Buchstaben die Grösse (Temperatur, Volum, Druck) selbst bedeuten, so muss ein anderes Schriftzeichen genommen werden; zunächst mag das kleine gothische Schrift sein. Demgemäss wird Erwärmungswärme durch $\mathfrak{t}$, Ausdehnungswärme durch $\mathfrak{v}$ und Spannungswärme durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden. Die nähere Unterscheidung besorgt der Index in kleiner lateinischer Schrift, und wird durch denselben, wie an den partiellen Differentialquotienten, angedeutet, welche Grösse unverändert bleiben soll.

Somit sind die isopiestische und die isochorische Erwärmungswärme, da die Temperatur zu ändern ist, darzustellen durch $\mathfrak{t}_p$ und $\mathfrak{t}_v$. Man hat diese Grössen bisher genannt: specifische Wärme bei constantem Drucke und specifische Wärme bei constantem Volum, was weder kurz, noch erschöpfend ist. Die häufigste Bezeichnung ist c_p und c_v oder c' und c, oder C und c.

Die isothermische und die isopiestische Ausdehnungswärme sind, da das Volum v zu ändern ist, darzustelllen durch $\mathfrak{v}_t$ und $\mathfrak{v}_p$. Man hat die erste gewöhnlich latente Ausdehnungswärme genannt und mit l bezeichnet; sie war durch die Benennung nicht unterschieden von der zweiten, für die bisher kein Name vorgeschlagen war und die mit λ bezeichnet zu werden pflegte.

Die isothermische und die isochorische Spannungswärme sind, da die Spannung *(pressio)* p zu ändern ist, darzustellen durch $\mathfrak{p}_t$ und $\mathfrak{p}_v$. Namen für diese beiden Grössen sind meines Wissens bisher nicht gebraucht worden. Die erste hat man gewöhnlich mit h bezeichnet (dieses Zeichen aber auch noch anderweit in der mechanischen Wärmelehre verwendet) und die zweite wohl mit k (obgleich man fast allgemein das Verhältniss der isopiestischen zur isochorischen Erwärmungswärme durch k darstellt). In meinen „Ergebnissen physikalischer For-

schung“ (Leipzig 1878) habe ich die isochorische Spannungswärme mit χ bezeichnet, weil dieser Buchstabe dem h etwa so entspricht, wie λ dem l.

Folgende Zusammenstellung der wichtigsten, für alle homogenen, einem gleichmässigen, normal zur Oberfläche wirkenden Drucke unterworfenen Körper geltenden Formeln der mechanischen Wärmelehre und deren Uebersetzung in Worte werden die Vortheile erkennen lassen, welche die vorgeschlagene Bezeichnungs- und Benennungsweise bieten.

$$1)\quad \mathfrak{t}_v = A\,\frac{\partial U}{\partial t_v} = -A.T\,\frac{\partial p}{\partial t_v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t_e} = -A.T\,\frac{\partial E}{\partial v_t}\cdot\frac{\partial v}{\partial t_e} = +A.T\,\frac{\partial E}{\partial v_t}\cdot\frac{\partial E}{\partial p_v},$$

$$2)\quad \mathfrak{t}_p = A\left(\frac{\partial U}{\partial t_p}+p\,\frac{\partial v}{\partial t_p}\right) = +A.T\,\frac{dv}{\partial t_p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_e} = -A.T\,\frac{\partial E}{\partial p_t}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_e} = -A.T\,\frac{\partial E}{\partial p_t}\cdot\frac{\partial E}{\partial v_p},$$

$$3)\quad \mathfrak{p}_v = A\,\frac{\partial U}{\partial p_v} = -A.T\,\frac{\partial v}{\partial t_e} = +A.T\,\frac{\partial E}{\partial p_v},$$

$$4)\quad \mathfrak{v}_p = A\left(\frac{\partial U}{\partial v_p}+p\right) = +A.T\,\frac{\partial p}{\partial t_e} = +A.T\,\frac{\partial E}{\partial v_p},$$

$$5)\quad \mathfrak{v}_t = A\left(\frac{\partial U}{\partial v_t}+p\right) = +A.T\left(\frac{\partial p}{\partial t_e}-\frac{\partial v}{\partial t_e}\cdot\frac{\partial p}{\partial v_t}\right) = +A.T\left(\frac{\partial E}{\partial v_p}+\frac{\partial E}{\partial p_v}\cdot\frac{\partial p}{\partial v_t}\right) = +A.T\left(\frac{\partial E}{\partial v_p}+\frac{\partial E}{\partial v_t}\right),$$

$$6)\quad \mathfrak{p}_t = A\left(\frac{\partial U}{\partial p_t}+p\,\frac{\partial v}{\partial p_t}\right) = -A.T\left(\frac{\partial v}{\partial t_e}-\frac{\partial p}{\partial t_e}\cdot\frac{\partial v}{\partial p_t}\right) = +A.T\left(\frac{\partial E}{\partial p_v}+\frac{\partial E}{\partial v_p}\cdot\frac{\partial v}{\partial p_t}\right) = +A.T\left(\frac{\partial E}{\partial p_v}+\frac{\partial E}{\partial p_t}\right)$$
$$= -A.T\,\frac{\partial v}{\partial t_p},$$

$$7)\quad \mathfrak{t}_p - \mathfrak{t}_v = \mathfrak{v}_t\,.\,\frac{\partial v}{\partial t_p} = -\mathfrak{p}_t\,.\,\frac{\partial p}{\partial t_v}, \qquad 10)\quad \mathfrak{v}_t : \mathfrak{p}_t = \frac{\partial p}{\partial v_t}, \qquad 13)\quad \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{t}_v}{\partial v} = A\,\frac{\partial p}{\partial t_v},$$

$$8)\quad \mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_p = \mathfrak{p}_v\,.\,\frac{\partial p}{\partial v_t} = -\mathfrak{t}_v\,.\,\frac{\partial t}{\partial v_p}, \qquad 11)\quad \mathfrak{t}_v : \mathfrak{p}_v = \frac{\partial p}{\partial t_v}, \qquad 14)\quad \frac{\partial \mathfrak{t}_p}{\partial p} - \frac{\partial \mathfrak{p}_t}{\partial t} = A\,\frac{\partial v}{\partial t_p},$$

$$9)\quad \mathfrak{p}_t - \mathfrak{p}_v = \mathfrak{v}_p\,.\,\frac{\partial v}{\partial p_t} = -\mathfrak{t}_p\,.\,\frac{\partial t}{\partial p_v}, \qquad 12)\quad \mathfrak{t}_p : \mathfrak{v}_p = \frac{\partial v}{\partial t_p}, \qquad 15)\quad \frac{\partial \mathfrak{v}_p}{\partial p} - \frac{\partial \mathfrak{p}_v}{\partial v} = A.$$

Die Symmetrie der Formeln und Sätze fällt sofort auf und es ergiebt sich eine Mnemonik von selbst. Die Formeln sind grösstentheils altbekannte in neuem Gewande, theils sind sie (wie ich wenigstens glaube) noch nicht aufgestellt gewesen, aber unschwer rein algebraisch ableitbar aus den bekannten, welche in meinen „Ergebnissen physikalischer Forschung“ in §§ 448—452* mitgetheilt sind, und aus den von Clausius in „Mechanische Wärmetheorie“ I. S. 196 gegebenen:

$$\frac{d_S T}{dv} = -\frac{T}{C_v} \cdot \frac{d_v p}{dT}, \qquad \frac{d_S T}{dp} = \frac{T}{C_p} \cdot \frac{d_p v}{dT},$$

welche nach calorischen Maassen umgerechnet und in der vorgeschlagenen Bezeichnungsweise sind:

$$\frac{\partial t}{\partial v_e} = -\frac{A T}{\mathfrak{t}_v} \cdot \frac{\partial p}{\partial t_v}, \qquad \frac{\partial t}{\partial p_e} = \frac{A T}{\mathfrak{t}_p} \cdot \frac{\partial v}{\partial t_p}.$$

Die von mir für neu gehaltenen Formeln habe ich zunächst mit Hilfe der gewählten Bezeichnungen rein nach Symmetrie- und Analogiegesetzen aufgestellt und dann erst ihre Richtigkeit durch Rückführung auf bekannte Formeln geprüft. Diese einfachen Ableitungen hier mitzutheilen scheint überflüssig.

Die zusammengestellten Formeln lauten (in Worten):

1. Die isochorische Erwärmungswärme ist gleich

A mal der isochorischen Erwärmungsenergie;**

oder

minus A mal dem isochorischen Spannungscoefficienten mal dem isentropischen Ausdehnungscoefficienten;

oder

minus AT mal der isothermischen Ausdehnungsentropie mal dem isentropischen Ausdehnungscoefficienten;

oder

AT mal der isothermischen Ausdehnungsentropie mal der isochorischen Spannungsentropie.

---

* Sei es gestattet, hier die in § 450, S. 275 leider stehen gebliebenen Irrthümer zu berichtigen: Den dritten Theilen der Doppelgleichungen für $l - \lambda$ und $h - \chi$ fehlt das Minuszeichen und statt $\chi\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ sollte $\chi\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_\tau$ in der Gleichung für $l - \lambda$ stehen. Entsprechend sind die Wortübertragungen zu ändern.

** Der Kürze halber wird gesagt „A mal“ statt „multiplicirt mit dem Wärmeäquivalent der Arbeit“, ebenso „T mal“ statt „multiplicirt mit der absoluten Temperatur“. Lässt man den Coefficienten A fort, so ist alles in Arbeits- statt in Wärmemaass ausgedrückt.

2. Die isopiestische Erwärmungswärme ist gleich

A mal der Summe aus isopiestischer Erwärmungsenergie und der mit dem isopiestischen Ausdehnungscoefficienten multiplicirten Drucke;

oder

AT mal dem isopiestischen Ausdehnungscoefficienten mal dem isentropischen Spannungscoefficienten;

oder

minus AT mal der isothermischen Spannungsentropie mal dem isentropischen Spannungscoefficienten;

oder

minus AT mal der isothermischen Spannungsentropie mal der isopiestischen Ausdehnungsentropie.

3. Die isochorische Spannungswärme ist gleich

A mal der isochorischen Spannungsenergie;

oder

minus AT mal dem isentropischen Ausdehnungscoefficienten;

oder

AT mal der isochorischen Spannungsentropie.

4. Die isopiestische Ausdehnungswärme ist gleich

A mal der Summe aus isopiestischer Ausdehnungsenergie u. Druck;

oder

AT mal dem isentropischen Spannungscoeffic.;

oder

AT mal der isopiestischen Ausdehnungsentrop.

5. Die isothermische Ausdehnungswärme ist gleich

A mal der Summe aus isothermischer Ausdehnungsenergie u. Druck;

oder

AT mal d. Differenz aus isentropischem Spannungscoefficient u. dem Producte des isentropischen Ausdehnungscoeffic. mit dem isothermischen Elasticitätscoeffic.;

oder

AT mal der Summe aus isopiestischer Ausdehnungsentropie u. dem Producte der isochorischen Spannungsentropie mit dem isothermischen Elasticitätscoeffic.;

oder

AT mal der Summe aus isopiestischer und isothermischer Ausdehnungsentrop.

6. Die isothermische Spannungswärme ist gleich

A mal der Summe aus isothermischer Spannungsenergie und dem mit dem isothermischen Compressionscoeffic. multiplicirten Drucke;

oder

minus AT mal dem isopiestischen Ausdehnungscoeffic.;

oder

minus AT mal der Differenz aus isentropischem Ausdehnungscoeffic. u. dem Producte des isentropischen Spannungscoeffic. mit dem isothermischen Compressionscoeff.;

oder

AT mal der Summe aus isochorischer Spannungsentropie u. dem Producte der isopiestischen Ausdehnungsentrop. mit dem isothermischen Compressionscoeffic.;

oder

AT mal der Summe aus isochorischer und isothermischer Spannungsentropie.

7. Der Unterschied der isopiestischen und der isochorischen Erwärmungswärme ist

gleich der isothermischen Ausdehnungswärme mal dem isopiestischen Ausdehnungscoefficienten;

oder

entgegengesetzt gleich der isothermischen Spannungswärme mal dem isochorischen Spannungscoefficienten.

8. Der Unterschied der isothermischen und der isopiestischen Ausdehnungswärme ist

gleich der isochorischen Spannungswärme mal dem isothermischen Elasticitätscoefficienten;

oder

entgegengesetzt gleich der isochorischen Erwärmungswärme, divid. durch den isopiestischen Ausdehnungscoefficienten.

9. Der Unterschied der isothermischen und der isochorischen Spannungswärme ist

gleich der isopiestischen Ausdehnungswärme mal dem isothermischen Compressionscoefficienten;

oder

entgegengesetzt gleich der isopiestischen Erwärmungswärme, divid. durch den isochorischen Spannungscoefficienten.

10. Das Verhältniss der isothermischen Ausdehnungswärme u. Spannungswärme ist

gleich dem isothermischen Elasticitätscoefficienten.

11. Das Verhältniss der isochorischen Erwärmungswärme u. Spannungswärme ist gleich dem isochorischen Spannungscoefficienten.

12. Das Verhältniss der isopiestischen Erwärmungswärme u. Ausdehnungswärme ist gleich dem isopiestischen Ausdehnungscoefficient.

13. Der Unterschied der Geschwindigkeiten der Aenderungen der isothermischen Ausdehnungswärme mit der Temperatur und der isochorischen Erwärmungswärme mit dem Volum ist gleich
A mal dem isochorischen Spannungscoefficienten.

14. Der Unterschied der Geschwindigkeiten der Aenderungen der isopiestischen Erwärmungswärme mit dem Drucke und der isothermischen Spannungswärme mit der Temperatur ist gleich
A mal dem isopiestischen Ausdehnungscoefficienten.

15. Der Unterschied der Geschwindigkeiten der Aenderungen der isopiestischen Ausdehnungswärme mit dem Drucke und der isochorischen Spannungswärme mit dem Volum ist gleich
A, dem Wärmeäquivalent der Arbeit.

Aus den sechs ersten mehrfachen Gleichungen der oben gegebenen Zusammenstellung lassen sich leicht einige interessante Beziehungen ableiten.

Aus 1. folgt:

16. $$\frac{\partial E}{\partial v_t} = \frac{\partial p}{\partial t_v}, \text{ d. h.:}$$

Die isothermische Ausdehnungsentropie ist gleich dem isochorischen Spannungscoefficienten.

Aus 2. folgt:

17. $$\frac{\partial E}{\partial p_t} = -\frac{\partial v}{\partial t_p}, \text{ d. h.:}$$

Die isothermische Spannungsentropie ist entgegengesetzt gleich dem isopiestischen Ausdehnungscoefficienten.

Aus 3. wie aus 1. folgt:

18. $$\frac{\partial E}{\partial p_v} = -\frac{\partial v}{\partial t_e}, \text{ d. h.:}$$

Die isochorische Spannungsentropie ist entgegengesetzt gleich dem isentropischen Ausdehnungscoefficienten.

Aus 4. wie aus 2. folgt:

19. $$\frac{\partial E}{\partial v_p} = \frac{\partial p}{\partial t_e}, \text{ d. h.:}$$

Die isopiestische Ausdehnungsentropie ist gleich dem isentropischen Spannungscoefficienten.

Aus 17. und 18. folgt:

20. $$\frac{\partial E}{\partial p_t} : \frac{\partial E}{\partial p_v} = \frac{\partial v}{\partial t_p} : \frac{\partial v}{\partial t_e}, \text{ d. h.:}$$

Das Verhältniss der isothermischen zur isochorischen Spannungsentropie ist gleich dem Verhältnisse des isopiestischen zum isentropischen Ausdehnungscoefficienten.

Aus 16. und 19. folgt:

21. $$\frac{\partial E}{\partial v_t} : \frac{\partial E}{\partial v_p} = \frac{\partial p}{\partial t_v} : \frac{\partial p}{\partial t_e}, \text{ d. h.:}$$

Das Verhältniss der isothermischen zur isopiestischen Ausdehnungsentropie ist gleich dem Verhältnisse des isochorischen zum isentropischen Spannungscoefficienten.

Aus 5. folgt:

22. $$\frac{\partial p}{\partial v_t} = \frac{\partial E}{\partial v_t} : \frac{\partial E}{\partial p_v}$$

und aus 6. folgt:

23. $$\frac{\partial p}{\partial v_t} = \frac{\partial E}{\partial v_p} : \frac{\partial E}{\partial p_t},$$

welche zwei Formeln in Worten lauten:

Der **isothermische Elasticitätscoefficient** ist gleich

22. dem Verhältnisse der isothermischen Ausdehnungsentrop. zur isochorischen Spannungsentropie

oder gleich

23. dem Verhältnisse der isopiestischen Ausdehnungsentrop. zur isothermischen Spannungsentropie.

Aus 22. und 23. folgt:

24. $$\frac{\partial E}{\partial p_v} : \frac{\partial E}{\partial p_t} = \frac{\partial E}{\partial v_t} : \frac{\partial E}{\partial v_p}, \text{ d. h.:}$$

Das Verhältniss der isochorischen zur isothermischen Spannungsentropie ist gleich dem Verhältnisse der isothermischen zur isopiestischen Ausdehnungsentropie.

Aus 5. und aus 6. folgt:

25. $$\frac{\partial E}{\partial v_p} : \frac{\partial E}{\partial p_v} = -\frac{\partial p}{\partial t_e} : \frac{\partial v}{\partial t_e}, \text{ d. h.:}$$

Das Verhältniss des isentropischen Spannungs- und Ausdehnungscoefficienten ist entgegengesetzt gleich dem Ver-

hältnisse der isopiestischen Ausdehnungsentropie zur isochorischen Spannungsentropie.

In der mechanischen Wärmelehre sind bei verschiedenen Gelegenheiten ausser den vorstehend benannten und bezeichneten sechs Wärmebedarfen noch einige andere specifische Wärmen oder Wärmecapacitäten betrachtet worden.

So die specifische Wärme des gesättigten Dampfes, worunter verstanden wird die Wärmemenge, „welche gesättigter Dampf zur Erwärmung bedarf, wenn er zugleich so stark zusammengedrückt wird, dass er sich bei der erhöhten Temperatur wieder in gesättigtem Zustande befindet" (Clausius, Mech. Wärmetheorie, S. 131).

Es soll sich wieder um die Mengeneinheit Dampf und um das Verhältniss der unendlich kleinen Wärmemenge zur entsprechenden unendlich kleinen Temperaturerhöhung handeln. Auch dieser Wärmebedarf lässt sich nach dem vorgeschlagenen System bezeichnen. Da eine Temperaturerhöhung die Wirkung ist, liegt eine Erwärmungswärme vor und die Hauptbezeichnung ist folglich ein $\mathfrak{t}$. Die im Anhängsel anzugebende besondere Bedingung der Erwärmung lautet entweder: der Druck soll stets gleich dem Sättigungsdrucke sein, und wenn man diesen, wie zuweilen geschieht, durch ε (Expansion) bezeichnet, so ist jene Grösse, die Clausius durch $H.A = h$ darstellt,* nach meinem Vorschlage $\mathfrak{t}_{p=\varepsilon}$ und kann Erwärmungswärme bei Sättigungsdruck genannt werden. Oder die gleichwerthige Bedingung lautet: das Volum soll stets gleich dem specifischen Volum des gesättigten Dampfes sein, und wenn man dieses durch s bezeichnet, so wird das Symbol $\mathfrak{t}_{v=s}$ und als Name kann man wählen Erwärmungswärme bei Sättigungsdichte. Selbstverständlich ist

$$\mathfrak{t}_{p=\varepsilon} = \mathfrak{t}_{v=s}.$$

Hierzu ist zu bemerken, dass der Druck und das Volum nicht die Maximalspannkraft und das Minimalvolum des Dampfes bei der Temperatur t, sondern bei der erhöhten Temperatur $t + dt$ sind, und wenn für die Temperatur t jene Grössen durch ε und s bezeichnet werden, so müssten die Anhängsel in der Bezeichnung der betreffenden Erwärmungswärme eigentlich heissen:

$$p = \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt}dt \quad \text{und} \quad v = s + \frac{ds}{dt}dt.$$

Es kommt ferner vor die specifische Wärme eines Stoffes in tropfbarflüssigem (oder in festem) und in dampfförmigem Aggregatzustande, welche „sich bezieht auf den Fall, wo mit der Temperatur der Druck in der Weise wächst, wie das Maximum der Spannkraft des gesättigten Dampfes" (Clausius a. a. O. S. 131 oben). Der hier gemeinte Wärme-

* Nicht zu verwechseln mit dem h Anderer, welches die isothermische Spannungswärme $\mathfrak{p}_t$ bedeutet.

bedarf ist für den Dampf die bereits besprochene Grösse und mit $\mathfrak{t}_{p=\varepsilon}$ zu bezeichnen. Ist tropfbare Flüssigkeit oder ein fester Stoff gemeint, so bleibt das Anhängsel $p=\varepsilon$ dasselbe und die Hauptbezeichnung soll dem Anfangsbuchstaben von „Temperatur" entsprechen; sie darf aber, wenn angezeigt werden soll, dass eine andere Aggregatform, als die gasige gemeint ist, nicht $\mathfrak{t}$ sein. Ich schlage vor, für tropfbare Flüssigkeit τ zu nehmen und für festen Stoff $\mathfrak{T}$, so dass die Erwärmungswärme der Flüssigkeit bei Dampfsättigungsdruck durch $\tau_{p=\varepsilon}$ und die Erwärmungswärme des festen Stoffes bei Sättigungsdruck durch $\mathfrak{T}_{p=\varepsilon}$ dargestellt wird. Clausius hat das Volum der Gewichtseinheit des gesättigten Dampfes mit s bezeichnet, das Volum der Gewichtseinheit der tropfbaren Flüssigkeit mit σ (S. 130); diesem entsprechend wähle ich $\mathfrak{t}$ für Dampf (und Gas), τ für tropfbare Flüssigkeit. Ich bezeichne consequenterweise das Volum der Gewichtseinheit des festen Stoffes mit S und wähle $\mathfrak{T}$ für die Erwärmungswärme festen Stoffes. Clausius hat S verwendet, um die Entropie zu bezeichnen, und muss deshalb einen andern Buchstaben (τ) für das specifische Volum des festen Stoffes wählen (S. 170). Um dieser Unbequemlichkeit vorzubeugen, habe ich, abweichend von Clausius, die Entropie mit E bezeichnet, beziehungsweise mit e, und glaube diese Abweichung um so mehr gerechtfertigt, als S keine mir erkennbare Beziehung zur Entropie hat. Der Buchstabe E wird von Clausius für das mechanische Aequivalent der Wärme (425), das die Engländer als ein Compliment für Joule gern mit J bezeichnen, verwendet. Allein ein Zeichen für diese Grösse ist ganz entbehrlich, wenn man die umgekehrte, das calorische Aequivalent der Arbeit ($\frac{1}{425}$), durch einen Buchstaben — in diesem Aufsatze, wie auch sonst gebräuchlich, durch A — bezeichnet.

Gelegentlich der Untersuchungen über Verdampfung und Schmelzung kommen Mengen des Stoffes im dampf(gas-)förmigen, im tropfbarflüssigen und im festen Zustande vor. Nachdem vorstehend die kleinen Buchstaben für die Gase, die grossen für feste Körper und griechische für tropfbare Flüssigkeiten verwendet wurden, ist es folgerichtig, die Menge (oder das Gewicht) Dampf mit m, die Menge der tropfbaren Flüssigkeit mit μ, die des festen Stoffes mit M zu bezeichnen. Clausius hat das Gewicht des Dampfes zwar auch mit m, aus anderen Erwägungen aber das der tropfbaren Flüssigkeit mit $M-m$ bezeichnet (S. 128). Gelegentlich der Untersuchung des Schmelzens dient hingegen bei Clausius m zur Bezeichnung des Gewichts des tropfbaren und $M-m$ zur Bezeichnung des Gewichts des festen Theiles (S. 169). Ersinnt man ein Zeichen für die Verdampfungswärme (bei Clausius r) und giebt diesem als Anhängsel t (bedeutend $t = const.$), so lassen sich die auf die Dampfbildung bezüglichen Hauptgleichungen sehr bequem in der vorgeschlagenen systematischen Art darstellen.

Nicht minder gut geht das für die auf den Schmelzvorgang bezüglichen Gleichungen. Bei dessen Untersuchung kommen Wärmebedarfe in Betracht „für den Fall, wo mit der Temperatur der Druck sich in der Weise ändert, wie es geschehen muss, wenn die Temperatur immer die zu dem Drucke gehörige Schmelztemperatur sein soll" (Clausius a. a. O. S. 170). Nach meinem Vorschlage sind diese Erwärmungswärmen durch τ oder $\mathfrak{T}$ zu bezeichnen, je nachdem tropfbare Flüssigkeit oder fester Stoff gemeint ist, und der Doppelindex $\left\{\begin{matrix} t=y \\ p=z \end{matrix}\right\}$ zu gebrauchen, wenn y die Schmelztemperatur und z den zugehörigen Druck (diese Buchstaben sollen nicht gerade besonders empfohlen werden) bedeuten.

Gelegentlich der Untersuchung der Temperaturveränderung bei dem Verlängern eines Stabes durch einseitigen Zug kommen Wärmebedarfe oder specifische Wärmen vor bei constanter Spannung P und bei constanter Länge l, welche Clausius (a. a. O. S. 200, 201) durch c_P und c_l bezeichnet und die nach der hier vorgeschlagenen Art durch $\mathfrak{T}_p$ und $\mathfrak{T}_l$ dargestellt sind.

Der Zustand eines homogenen Körpers von durchgängig gleicher Temperatur, der unter einem gleichmässig normal gerichteten Oberflächendrucke steht, ist durch zwei unabhängige Veränderliche bestimmt. Trägt man deren zusammengehörige Werthe als Coordinaten auf, so erhält man in der zuerst von Clapeyron ausgeführten Art die Curve der Zustandsänderungen. Jeder gegebenen solchen Curve entspricht im Allgemeinen ein besonderer Wärmebedarf. Ist die eine der den jeweiligen Körperzustand bezeichnenden Grössen x, so gelangt man mit Hilfe der Formel

$$dQ = A(dU + p\,dv)$$

($p\,dv$ ist bei dem vorausgesetzten Oberflächendrucke die äussere Arbeit) zu den Ausdrücken

$$26. \qquad \mathfrak{t}_x = A\left(\frac{\partial U}{\partial t_x} + p\frac{\partial v}{\partial t_x}\right),$$

$$27. \qquad \mathfrak{v}_x = A\left(\frac{\partial U}{\partial v_x} + p\right),$$

$$28. \qquad \mathfrak{p}_x = A\left(\frac{\partial U}{\partial p_x} + p\frac{\partial v}{\partial p_x}\right),$$

und es lassen sich noch Ausdrücke ableiten, die den übrigen in 1., 2., 3. oben angegebenen entsprechen. Wählt man für x die Entropie E oder $e + const.$, so erhält man

$$29. \qquad \mathfrak{t}_e = A\left(\frac{\partial U}{\partial t_e} + p\frac{\partial v}{\partial t_e}\right),$$

$$30. \qquad \mathfrak{v}_e = A\left(\frac{\partial U}{\partial v_e} + p\right),$$

$$31. \qquad \mathfrak{p}_e = A\left(\frac{\partial U}{\partial p_e} + p\frac{\partial v}{\partial p_e}\right).$$

Die drei hier dargestellten Wärmebedarfe sind aber Null; denn $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p}$ bedeuten $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial v}$, $\frac{\partial Q}{\partial p}$ und $e = const.$ oder $E = const.$ heisst $dE = 0$; aber

$$dE = \frac{dQ}{T},$$

also folgt auch $dQ = 0$ und somit sind die isentropische Erwärmungswärme, Ausdehnungswärme und Spannungswärme jede gleich Null. Und daraus folgt schliesslich:

$$32. \qquad \frac{\partial U}{\partial t_e} = -p \frac{\partial v}{\partial t_e},$$

$$33. \qquad \frac{\partial U}{\partial v_e} = -p,$$

$$34. \qquad \frac{\partial U}{\partial p_e} = -p \frac{\partial v}{\partial p_e}.$$

In Worten:

32. Die isentropische Erwärmungsenergie ist entgegengesetzt gleich dem mit dem isentropischen Ausdehnungscoefficienten multiplicirten Drucke.
33. Die isentropische Ausdehnungsenergie ist entgegengesetzt gleich dem Drucke.
34. Die isentropische Spannungsenergie ist entgegengesetzt gleich dem mit dem isentropischen Compressionscoefficienten multiplicirten Drucke.

Das Grundsätzliche der in diesem Aufsatze empfohlenen Bezeichnungs- und Benennungsweise habe ich schon 1877 in meinen „Ergebnissen physikalischer Forschung“ § 450 vorgeschlagen.

VI.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Von

Dr. NIEMÖLLER,

Lehrer an der Handelsschule in Leipzig.

Hierzu Taf. II Fig. 1 u. 2.

Obige Differentialgleichung stellt bekanntlich das Potential einer elektrischen Strömung in einer Fläche dar, deren Leitungsfähigkeit im Punkte P dem Abstande dieses Punktes von der y-Axe proportional ist. Die Integration obiger Gleichung dürfte schon deshalb nicht ohne Interesse sein, weil sich eine experimentelle Prüfung der in einer solchen Fläche stattfindenden elektrischen Strömung leicht ausführen lässt. Die Leitungsfähigkeit einer dünnen Flüssigkeitsschicht ist bekanntlich in jedem Punkte P der Dicke der Schicht in diesem Punkte proportional; soll die Leitungsfähigkeit dem Abstande des Punktes P von der y-Axe proportional wachsen, so muss die Flüssigkeitsschicht einen sehr scharfen Keil bilden, mit dessen scharfer Kante die y-Axe zusammenfällt. Die nähere Ausführung des Versuches werde ich weiter unten angeben.

I.

Um das allgemeine Integral von $\Delta u = 0$ zu finden, suchen wir zunächst ein partielles von der Form XY, wo X eine Function von x, Y eine Function von y ist. Es muss dann sein:

$$\frac{1}{xX}\frac{\partial}{\partial x}(xX') + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Setzen wir

$$1) \qquad Y'' = -C^2 Y, \text{ so ist } X'' + \frac{1}{x}X' - C^2 X = 0,$$

wo C eine beliebige Constante ist.

Wir erhalten hieraus $Y = e^{Ciy}$, und für X das Bessel'sche Integral $X = \int_0^\pi e^{Cx \cos\varphi}\, d\varphi$. Ein partielles Integral von $\Delta u = 0$ ist also

$$u_\nu = \int_0^\pi A_\nu e^{C_\nu (x \cos\varphi + iy)}\, d\varphi.$$

Setzen wir noch $e^{x \cos\varphi + iy} = z$, so ist

$$\int_0^\pi \sum_\nu A_\nu z^{C_\nu}$$

ein sehr allgemeines Integral von $\Delta u = 0$, wenn für A_ν und C_ν der Reihe nach beliebige Constanten gesetzt werden. Die Summe unter dem Integralzeichen ist aber eine Function von z, deshalb ist

$$u = \int_0^\pi d\varphi\, f(x \cos\varphi + iy) \tag{2}$$

ein allgemeines Integral unserer Differentialgleichung. Man kann sich leicht *a posteriori* überzeugen, dass die Formel 2) der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt.

Ist $u - C = 0$ die Gleichung einer Schaar von isoelektrischen Curven, so bilden die rechtwinkligen Trajectorien dieser Schaar die Strömungscurven der Elektricität. Die Gleichung dieser Strömungscurven lässt sich leicht aufstellen. Ist nämlich $v = 0$ die Gleichung einer solchen, so muss v der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Genügt nun u der Gleichung $\Delta u = 0$, so giebt es eine Function v derart, dass

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x\frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Es ist dann

$$v = \int x\left(\frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy\right). \tag{4}$$

Da nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ist, so ist das Integral unter 4) ausführbar. v gleich einer Constanten gesetzt, liefert aber eine Strömungscurve, da die Gleichung 3) befriedigt ist. Wählt man für u den imaginären Theil des bestimmten Integrals in 2), so ist v der reelle Theil des Integrals

$$v = \int_0^\pi x \cos\varphi\, f(x \cos\varphi + iy)\, d\varphi. \tag{4a}$$

wie man leicht aus 2) und 4) findet. Man sieht, dass v der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$$

genügt.

II.

Es soll nun der specielle Fall behandelt werden, dass die Elektricität im Punkte c eintritt und in d die Fläche verlässt. u muss dann in c und d logarithmisch unendlich werden, und zwar muss die Summe der Residuen in beiden Punkten verschwinden. Ferner müssen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in allen übrigen Punkten endlich und eindeutig bleiben, und $\frac{\partial u}{\partial x}$ muss auf der y-Axe verschwinden. Es habe nun c die rechtwinkligen Coordinaten $\frac{A}{2}$ und y_0, so dass A den doppelten Abstand des Punktes c von der y-Axe bedeutet, so sei $c=\frac{A}{2}+y_0 i$.

In 2) setzen wir:

$$f(x\cos\varphi+iy)\,d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{x\cos\varphi+iy-c}},$$

und wählen für u den imaginären Theil des elliptischen Integrals

$$5)\qquad J_c=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{x\cos\varphi+iy-c}}.$$

Es verschwindet dann der Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial x}$ auf der y-Axe. In 5) setzen wir $x+iy=z$, ferner $-x+iy=z'$, so dass z' einen Punkt bezeichnet, der symmetrisch zu z liegt in Bezug auf die y-Axe. Setzen wir dann noch $\cos\varphi=2\sin^2\psi-1$, so findet sich leicht

$$5\text{a})\qquad J_c\sqrt{z'-c}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\psi}},$$

wo $a^2=\frac{z-c}{z'-c}$ ist. Wird die Integration über die reelle Axe von ψ erstreckt, so wird das Integral nur logarithmisch unendlich für $a=0$ oder $z=c$. In allen übrigen Punkten auf der positiven Seite der y-Axe ist J_c endlich, es kann auch leicht eindeutig definirt werden. Für die numerische Berechnung von J_c ist der Umstand vortheilhaft, dass der absolute Betrag von a auf der positiven Seite der y-Axe kleiner als Eins ist und nur auf der y-Axe selbst gleich Eins wird.

Wir können deshalb zur Berechnung des Integrals in 5) die Reihe anwenden, die sich in Schlömilch's Compendium S. 316 findet. Um diese Reihe auf eine Form zu bringen, die in unserem Falle eine leichte Berechnung zulässt, bezeichnen wir mit l_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$6) \qquad 0 = \log 4 - 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{4} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{6} - \ldots.$$

Dann ist

$$7) \quad J_c \sqrt{z' - c} = \log \frac{4}{a} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\log \frac{1}{a} + l_2\right) a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\log \frac{1}{a} + l_4\right) a^4 + \ldots.$$

Ist noch

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4 + \ldots,$$

$$S' = \log 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_2 a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 l_4 a^4 + \ldots,$$

so ist

$$8) \qquad J_c \sqrt{z' - c} = S \log \frac{1}{a} + S'.$$

Wir müssen nun untersuchen, wie $\log \frac{1}{a}$ zu definiren ist, damit das Integral J_c überall auf der positiven Seite der y-Axe endlich bleibt, ausser in $a = 0$. Wir setzen $z - c = r e^{\varphi i}$, $z' - c = r' e^{\varphi' i}$, wo φ und φ' beide zwischen 0 und 2π liegen sollen. Dann ist $a^2 = \frac{r'}{r} e^{(\varphi - \varphi') i}$. $\varphi - \varphi'$ ist absolut genommen gleich dem Winkel, den die von c nach z und z' gezogenen Strecken r und r' mit einander bilden. Dieser Winkel wird 0, wenn z auf die y-Axe rückt, da dann z und z' zusammenfallen. Aus diesem Umstande folgt, dass

$$9) \qquad \log \frac{1}{a} = \tfrac{1}{2} \log \frac{r}{r'} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} i$$

zu setzen ist, dass aber kein Vielfaches von $2\pi i$ hinzugefügt werden darf. Liegt nämlich z auf der y-Axe, so ist $a = 1$, S wird logarithmisch unendlich, $\log \frac{1}{a}$ wird Null nach 9), also ist in 8) $S \log \frac{1}{a} = 0$ auf der y-Axe. S' bleibt endlich für $a = 1$, die Convergenz von S' lässt sich für $a = 1$ aus den gewöhnlichen Kriterien herleiten, wenn man bedenkt, dass $l_{2n} = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3} + \frac{2}{2n+5} - \ldots$, also $l_{2n} < \frac{2}{2n+1}$ ist.

J_c ist also nach 8), wenn $\sqrt{z' - c} = \sqrt{r'}\, e^{\frac{\varphi' i}{2}}$ gesetzt wird, $=$

$$10) \qquad J_c = \frac{e^{-\frac{\varphi' i}{2}}}{\sqrt{r'}} \left(S \log \frac{1}{a} + S'\right).$$

Rückt nun z nach c, so rückt z' nach einem Punkte c', der symmetrisch zu c in Bezug auf die y-Axe gelegen ist. Es ist dann $r' = A$, $\varphi' = \pi$, $S = 1$, also wird nach 10) J_c in c unendlich wie $-\frac{i}{2\sqrt{A}} \log(z - c)$.

Es ströme nun die Elektricität in einem Punkte d aus, der die Coordinaten $\frac{B}{2}$ und y_1 habe, so dass $d = \frac{B}{2} + y_1 i$ sei. Es sei ferner $z - d = \varrho e^{\psi i}$, $z' - d = \varrho' e^{\psi' i}$, und J_d sei auch durch 10) definirt, wo aber statt c, φ, φ', r, r' die Grössen d, ψ, ψ', ϱ, ϱ' zu setzen sind. Dann ist endlich der reelle Theil u von

$$w = 2i\, J_c \sqrt{A} - 2i\, J_d \sqrt{B} \tag{11}$$

das gesuchte Integral, welches, gleich einer Constanten gesetzt, eine Curve gleichen Potentials definirt.

III.

Die numerische Berechnung des reellen Theiles von w in 11) würde im allgemeinen Falle sehr weitläufig werden. Einigermassen einfach gestaltet sie sich, wenn man annimmt, dass die Abstände $\frac{A}{2}$ und $\frac{B}{2}$ der Punkte c und d gross sind, während die Punkte, für welche w berechnet werden soll, nahe bei c und d liegen. Es ist dann der absolute Betrag von a^2, nämlich $\frac{r}{r'}$, klein, und in 10) kann man höhere Potenzen als a^2 vernachlässigen. Nach 10) ist dann

$$J_c = \frac{e^{-\frac{\varphi' i}{2}}}{2\sqrt{r'}} \left(\log \frac{16}{a^2} + \frac{a^2}{4} \log \frac{16}{a^2 e^2} \right), \tag{12}$$

worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. In dieser Gleichung ist $a^2 = \frac{r}{r'} e^{(\varphi - \varphi')i}$ und nach 9) $\log \frac{1}{a^2} = \log \frac{r'}{r} + (\varphi' - \varphi)\, i$.

Benutzt man noch die Abkürzung $p = \frac{r}{A}$, wo p klein gegen 1 ist, so kann man in erster Annäherung, wie aus Fig. 1 ersichtlich, für r' setzen $A + r\cos\varphi = A(1 + p\cos\varphi)$, für φ' aber $\pi - p\sin\varphi$. Setzt man diese Werthe in 12) ein und vernachlässigt alle höheren Potenzen von p ausser der ersten, so findet man nach leichter Rechnung, dass der reelle Theil von $2i\sqrt{A}\, J_c$ gleich

$$\log M - \tfrac{1}{4} p \sin\varphi (\pi - \varphi) - \tfrac{3}{4} p \cos\varphi \log \frac{M}{e^2} \tag{13}$$

ist, wo $M = \frac{16A}{r}$ ist. Ist ferner $N = \frac{16B}{\varrho}$, $q = \frac{\varrho}{B}$, wo q klein gegen 1 ist, so ist der reelle Theil von $2i\sqrt{B}\, J_d$ gleich

$$\log N - \tfrac{1}{4} q \sin\psi (\pi - \psi) - \tfrac{3}{4} q \cos\psi \log \frac{N}{e^2}.$$

Subtrahirt man 14) von 13), so liefert die rechte Seite, gleich einer Constanten gesetzt, nach Gleichung 11) eine Curve gleichen Potentials, wenn dieselbe in der Nähe von c und d verläuft.

Es sollen nun die Punkte c und d gleichen Abstand von der y-Axe haben, so dass $A = B$ ist. Wir setzen ferner $x = \frac{A}{2} + \xi$, dann ist $p \cos\varphi = q \cos\psi = \frac{\xi}{A}$, und die gesuchte Function wird =

$$u = \left(1 - \frac{3\xi}{4A}\right) \log\frac{r}{\varrho} + C,$$

wo

15) $$C = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{r \sin\varphi(\pi - \varphi)}{A} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\varrho \sin\psi(\pi - \psi)}{A}$$

ist. C und $\frac{3\xi}{4A}$ sind kleine Grössen. Setzen wir u gleich einer Constanten, gleich $\log m$, so ist

$$\left(1 - \frac{3\xi}{4A}\right) \log\frac{r}{\varrho} = \log m - C$$

eine Curve gleichen Potentials. Dividiren wir durch $1 - \frac{3\xi}{4A}$, vernachlässigen Grössen zweiter Ordnung, so findet sich

$$\frac{r^2}{\varrho^2} = m^2 e^{\frac{3\xi}{2A}\log m - 2C}.$$

Ist noch

16) $$\delta = \varrho^2 m^2 \left(\frac{3\xi}{4A} \log m - C\right),$$

so ist in erster Annäherung

17) $$r^2 = m^2 \varrho^2 + 2\delta.$$

Aus 17) erkennt man, dass die Curve nicht viel von einem Kreise abweicht. Wenn die kleine Grösse δ in 17) fehlte, so würde die Curve ein Kreis sein, der die durch c und d gelegte Gerade in zwei Punkten schneidet, die harmonisch zu c und d liegen. Ein solcher Kreis, der in Fig. 2 durch K bezeichnet ist, hat den Radius $R_0 = \frac{sm}{1 - m^2}$, wo s den Abstand von c und d bezeichnet, und sein Centrum O liegt um $-\frac{sm^2}{1 - m^2}$ von c entfernt, wo das $-$Zeichen angiebt, dass O nicht zwischen c und d liegt, wenn $m < 1$ ist. Die Curve 17) soll nun durch Polarcoordinaten R und α ausgedrückt werden, deren Pol in O liegt. Dann wird

$$r^2 = R^2 + \frac{s^2 m^4}{(1 - m^2)^2} - \frac{2Rcm^2}{1 - m^2} \sin\alpha \quad \text{und} \quad \varrho^2 = R^2 + \frac{s^2}{(1 - m^2)^2} - \frac{2Rs}{1 - m^2} \sin\alpha.$$

Die Gleichung 17) geht dann über in

$$R^2 = R_0^2 + \frac{2\delta}{1 - m^2},$$

oder angenähert

17a) $$R = R_0 + \frac{\delta}{R_0(1 - m^2)}.$$

In dieser Gleichung hat δ den Werth:

$$\text{18)} \qquad \delta = \frac{m^2 \varrho^2}{4A} (3 \xi \log m - r \sin \varphi (\pi - \varphi) + \varrho \sin \psi (\pi - \psi)).$$

Es ist schon bemerkt, dass die Curve 17a) nicht viel von dem der Constanten m entsprechenden Kreise K abweicht. Zieht man also von irgend einem Punkte 1 der gesuchten Curve einen Radius $1O$ nach O, so wird dieser den Kreis K in einem Punkte 2 schneiden, dessen Entfernung von 1 klein ist in Vergleich zu R_0, und durch $21 = \varepsilon = \frac{\delta}{R_0(1-m^2)}$ dargestellt wird. Deshalb ist es erlaubt, statt der Werthe, welche die Grössen r, ϱ, ξ, φ, ψ im Punkte 1 annehmen, diejenigen in δ (Gleichung 18) einzusetzen, die dem zu 1 gehörigen Punkte 2 auf K entsprechen.

Die Berechnung einer Curve gleichen Potentials geschieht also folgendermassen: Nach Annahme einer Grösse m zeichne man den Kreis K, berechne für irgend einen Punkt 2 auf K die Grösse $\varepsilon = \frac{\delta}{R_0(1-m^2)}$, verlängere den nach 2 gezogenen Radius R_0 um ε, so ist der neue Endpunkt ein Punkt der gesuchten Curve 17a).

IV.

Um die Richtigkeit der Formel 17a) experimentell zu prüfen, wurde eine Curve berechnet, indem $m = 0,5$, der Abstand s von c und d $= 50$ mm, und $\frac{A}{2}$, der Abstand von c oder d von der y-Axe, gleich 200 mm gesetzt wurde. Es ist dann $R_0 = 33,33$ mm. Die Grösse ε wurde für 12 Punkte der Peripherie des Kreises K, welche den Winkeln $\alpha = 0^0$, 30^0, 60^0, ... 330^0 entsprechen, berechnet, indem ν, ϱ, ξ, φ, ψ direct gemessen wurden. ε war für alle Punkte positiv und hatte folgende Werthe in Millimetern:

$\alpha =$	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0,
$\varepsilon =$	0,5	0,9	0,4	0,3	0,9	2,5	4,8,
$\alpha =$	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0,		
	6,5	6,7	4,9	2,7	1,0.		

Nach Eintragung der 12 Curvenpunkte wurde die Curve mit freier Hand ausgezogen. Sie findet sich in Fig. 2 gezeichnet; sie weicht auf der Seite am meisten vom Kreise ab, auf welcher die Leitungsfähigkeit der Fläche abnimmt.

Um eine Fläche herzustellen, deren Leitungsfähigkeit dem Abstande von der y-Axe proportional zunimmt, wurde eine ungefähr 700 mm breite und 1300 mm lange Glasplatte etwa 1 Grad gegen den Horizont geneigt auf einen Tisch gelegt, so dass die eine Kante genau horizontal lag.

Eine Verbiegung der Platte wurde verhindert durch untergeschobene Keile. Die Platte wurde rings herum mit einem etwa 5 mm hohen Rande von Fensterkitt versehen, mit Natronlauge gereinigt und dann mit Wasser bedeckt, welches den grössten Theil der Platte benetzte. Nach einiger Zeit war die Grenzlinie zwischen Glas und Wasser ziemlich scharf ausgebildet. Unter die Glasplatte wurde dann die gezeichnete Curve geschoben, so dass die Verbindungsgerade der Einströmungspunkte *c* und *d* parallel der scharfen Kante des gebildeten Flüssigkeitskeiles war und von dieser den Abstand 200 mm hatte.

Durch die Flüssigkeit wurde nun der Strom einer Inductionsmaschine geleitet, welcher genau über *c* ein- und über *d* austrat. Eine Parallaxe war unmöglich, weil man das in dem Glase gespiegelte Auge ziemlich scharf wahrnehmen konnte. Mit Hilfe eines Telephons liess sich nun genau prüfen, ob zwei Punkte der gezeichneten Curve gleiches Potential hatten. Es verschwand das Geräusch im Telephon vollständig, wenn die vom Telephon kommenden Drahtenden genau oberhalb irgend zweier Punkte der gezeichneten Curve in die Flüssigkeit tauchten; bei einer kleinen Abweichung des einen Endes von der Curve stellte sich das Geräusch sofort ein.

Da die benutzte Glasplatte gross war gegen die Dimensionen der Curve, so kann das angestellte Experiment als Bestätigung der Formel 17a) gelten.

Die Berechnung der Strömungscurven aus 4a) will ich nicht anführen; es findet sich, dass der Ausdruck

$$(\psi-\varphi)\left(1+\frac{\xi}{4A}\right)-\frac{3r}{4A}\sin\varphi\log\frac{16A}{r}+\frac{3\varrho\sin\psi}{4A}\log\frac{16A}{\varrho}$$

gleich einer Constanten gesetzt eine Stromcurve definirt. Die Gleichung zeigt z. B., dass die Verbindungsgerade *cd* keine Stromcurve ist; die Elektricität, welche aus *c* in der Richtung nach *d* ausströmt, wählt einen Weg nach *d*, auf welchem der Widerstand kleiner ist. Die Stromcurve weicht von *cd* ab nach der Seite der Fläche hin, auf welcher die Leitungsfähigkeit zunimmt.

VII.

Ueber die Auflösung des Doppelpunktes einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume, und ein mit dieser Curve zusammenhängendes Problem der Mechanik.

Von

Dr. V. Schlegel

in Waren.

Hierzu Taf. II Fig. 3—8.

Herr Hoppe hatte vor einiger Zeit durch Rechnung gezeigt, dass eine, einen unauflöslichen Knoten enthaltende, geschlossene Raumcurve durch stetige Aenderung ihrer Gestalt in eine Kreislinie transformirt, also von diesem Knoten befreit werden könnte, wenn es möglich wäre, sie zu diesem Zwecke in das vierdimensionale Gebiet hinaustreten zu lassen. Herr Durège hat nun neuerdings dieses Verfahren genauer untersucht (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 82, Juni 1880) und insofern verbessert, als er eine Gestalt der Curve angab, welche beim Durchgang durch den vierdimensionalen Raum geschlossen bleibt, was bei dem von Herrn Hoppe gegebenen Beispiel nicht der Fall war.

So überzeugend nun auch dieses Verfahren in analytischer Hinsicht ist, so dürfte doch das selbst in den Kreisen der Mathematiker noch weit verbreitete Misstrauen gegen Untersuchungen, welche uns aus dem Gebiete des Erfahrungsraumes hinausführen, auch diesem Resultate sich entgegenstellen. Es scheint mir allerdings als unzweifelhaft, dass der der letzten Hälfte des gegenwärtigen Jahrhunderts vorbehaltene Ausbau der vierdimensionalen Geometrie, zu welchem in jährlich wachsender Zahl die Bausteine zusammengetragen werden, in nicht ferner Zeit alle Vorurtheile überwinden wird, und dass alsdann der Schritt, mit welchem die Mathematik die Jahrtausende hindurch als unübersteiglich angesehenen Schranken des Weltraumes durchbrochen hat, als eine der kühnsten Thaten des menschlichen Geistes wird angesehen werden. Gegenwärtig aber, wo das Material noch höchst zerstreut und lückenhaft ist, scheint es mir von grosser Wichtigkeit zu sein, dem wesentlichen Mangel abzu-

helfen, dass die Resultate solcher vierdimensionalen Untersuchungen sich nicht durch Anschauung controliren lassen. Hierzu bietet sich aber folgendes Mittel. Jede analytisch-geometrische Untersuchung lässt sich in analoger Weise in Gebieten von verschiedener Dimensionenzahl durchführen. Wird also das Analogon einer vierdimensionalen Untersuchung im dreidimensionalen Raume durchgeführt, so kann der die letztere Rechnung begleitende geometrische Vorgang als Bild des unserer Anschauung entzogenen entsprechenden Vorganges im vierdimensionalen Gebiete betrachtet werden; und ganz ebenso, wie die ebenen Zeichnungen räumlicher Gebilde uns als Abbildungen einen Ersatz für die Anschauung der Gebilde selbst gewähren können, so können auch Raumconstructionen, als Projection vierdimensionaler Gebilde und Vorgänge betrachtet, unserem Auge als Ersatz für jene dienen. Hierbei findet nur der Unterschied statt, dass im ersten Falle unsere Phantasie dem Auge, welches thatsächlich nur ein ebenes Bild erfasst, zu Hilfe kommt, indem sie in das vom Auge geschaute ebene Bild die Vorstellung des Räumlichen hineinträgt, während im zweiten Falle diese Ergänzung fehlt. Dieser Mangel ist aber kein wesentlicher, da das Urtheil uns ja sagt, als was wir jene räumliche Construction anzusehen haben.

Ich will demnach im Folgenden eine mit der von den Herren Hoppe und Durège behandelten analoge Untersuchung im nächstniederen Gebiete anstellen, um von dem Verlaufe einer solchen Fadentransformation an der Hand der Rechnung ein (projicirtes) Bild zu geben.

1.

Ein im Gebiete der Ebene befindlicher Linienzug von der Gestalt einer 8 kann, ohne das Gebiet der Ebene zu verlassen, durch Aenderung seiner Gestalt (etwa mittelst eines Parameters) den vorhandenen Doppelpunkt nicht verlieren. Ein den Linienzug durchlaufender variabler Punkt passirt den Doppelpunkt bei jedem Umlauf stets zweimal. Das Zeitintervall zwischen beiden Vorgängen und der demselben entsprechende Bogen können allerdings verschwinden, wenn durch Transformation die eine Halbfläche der 8 verschwindet; aber das geometrische Verschwinden des Doppelpunktes involvirt für unsere Untersuchung ebenso das Zustandekommen eines „ebenen Knotens", wie die Zusammenziehung der Schlinge in der obenerwähnten Raumcurve das Zustandekommen eines räumlichen Knotens. Dies wird besonders deutlich, wenn wir als genaues Analogon zu dem körperlichen Faden einen Flächenstreifen betrachten. (Fig. 3 zeigt denselben in der ursprünglich gedachten Gestalt, Fig. 4 zum „ebenen Knoten" zusammengezogen.) Der Doppelpunkt verschwindet nun aus dem Linienzuge offenbar sofort, wenn man letzteren in eine Raum-

curve transformirt. Diese letztere kann dann in eine geschlossene ebene Curve ohne Doppelpunkt transformirt und in die Ebene zurückversetzt werden, wodurch die Aufgabe, den ebenen Knoten zu entfernen, gelöst ist.

Um nun diese Transformationen und die Curven selbst näher zu bestimmen, specialisiren wir die Aufgabe, wie folgt: Unter Voraussetzung eines dreiaxigen rechtwinkligen Coordinatensystems soll eine geschlossene Raumcurve gesucht werden, deren Projection auf die XY-Ebene ein Kreis ist, während ihre Projection auf die Ebene der XZ eine noch näher zu bestimmende Curve von der Gestalt einer 8 ist. Man sieht nun unmittelbar, auf welchem Wege die letztere Projectionscurve durch Ausdehnung in die Raumcurve, und dann durch Zusammenziehung in den Kreis transformirt werden kann. Dass der letztere sich in einer andern Ebene befindet, wie die gegebene Curve, ist offenbar unwesentlich.

Die für diese Transformation geeignete Curve (deren Ursprung und Bedeutung, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, erst nachher auseinandergesetzt werden soll) ist durch die Gleichung bestimmt:

1) $$\varrho^4 z^2 + 4r^2x^2(x^2-\varrho^2) = 0 \quad \text{(s. Fig. 5)}.$$

Ist ferner

2) $$x^2+y^2=\varrho^2$$

die Gleichung des Kreises, in welchen dieselbe verwandelt werden soll, so bestimmen die Gleichungen 1) und 2) die Raumcurve als Durchschnitt zweier cylindrischer Flächen. Durch Elimination von x^2 zwischen 1) und 2) erhält man

3) $$\varrho^4 z^2 + 4r^2y^2(y^2-\varrho^2) = 0.$$

Hiernach giebt die Raumcurve auf der YZ-Ebene dieselbe Projection, wie auf der XZ-Ebene.

Noch einfacher wird die Bestimmung dieser Curve, wenn man das XY-System durch Drehung um den Winkel α transformirt, so dass

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \quad y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha,$$

und dann $\alpha = 45^0$ annimmt, so dass

$$x = \frac{x_1-y_1}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{x_1+y_1}{2}\sqrt{2}.$$

Durch diese Substitutionen bleibt die Form der Gleichung 2) ungeändert, während 3) übergeht in

$$z^2\varrho^4 + 4r^2\frac{(x_1+y_1)^2}{2}\left[\frac{(x_1+y_1)^2-2\varrho^2}{2}\right] = 0$$

oder, mit Benutzung von 2):

$$z^2\varrho^4 + r^2[\varrho^4 + 4\varrho^2x_1y_1 + 4x_1^2y_1^2 - 2\varrho^2(\varrho^2+2x_1y_1)] = 0,$$
$$z^2\varrho^4 + r^2(4x_1^2y_1^2 - \varrho^4) = 0$$

oder, indem man y_1^2 mittelst 2) eliminirt:

$$z^2\varrho^4 = r^2(4x_1^4 + \varrho^4 - 4x_1^2\varrho^2).$$

Durch Quadratwurzelausziehung erhält man endlich

4) $$z\varrho^2 = r(2x_1^2 - \varrho^2),$$
die Gleichung einer Parabel, deren Axe der Z-Axe parallel ist. Eliminirt man hieraus wieder x_1^2 mittelst 2), so folgt:

5) $$-z\varrho^2 = r(2y_1^2 - \varrho^2),$$
die Gleichung einer mit der ersten congruenten Parabel, deren Axe aber die entgegengesetzte Richtung hat.

Aus dem Zerfallen der gegebenen Gleichung vierten Grades in zwei identische Gleichungen folgt, dass die Projectionen unserer Raumcurve auf die Ebenen der X_1Z und Y_1Z aus je zwei sich deckenden Parabelbogen bestehen.

Hiernach ist unsere Raumcurve nichts Anderes, als die Schnittcurve zweier parabolischer Cylinder,* deren Scheitellinien der X_1- und Y_1-Axe parallel sind und die Z-Axe in den Abständen $+r$ und $-r$ vom Anfangspunkte schneiden. [Aus den Gleichungen 4) und 5) folgen nämlich für $x_1 = y_1 = 0$ die Werthe $z = \mp r$.] Die Scheitellinie jedes der beiden Cylinder schneidet die Fläche des andern in denjenigen beiden Punkten der Raumcurve, welche von der X_1Y_1-Ebene am weitesten (nach oben oder nach unten) entfernt sind. Während also die Constante ϱ als Radius des durch die Raumcurve gehenden gemeinen Cylinders die Weite derselben angiebt, misst die Constante r die Erhebung der Curve über die Ebene X_1Y_1.

2.

Um nun schliesslich die Entstehung und Bedeutung der Curve 1) klarzulegen, betrachten wir die mechanische Aufgabe: Welche Curve beschreibt ein Punkt X in einer Ebene, wenn seine Projectionen auf den Schenkeln eines rechten Winkels hin- und herschwingen, und die schwingende Bewegung durch dasselbe Gesetz, wie die des Mittelpunktes einer schwingenden Saite, bestimmt ist?

Es ist bekanntlich sehr leicht, solche Curven aus einzelnen ihrer Punkte herzustellen. Sind $2r$ und 2ϱ die auf den Schenkeln des rechten Winkels vom Scheitel aus abgetragenen Strecken, auf welchen die Projectionen des Punktes X sich hin und her bewegen (Fig. 5), so beschreibt man über beiden Strecken als Durchmessern nach aussen Halbkreise, theilt dieselben in m, resp. n gleiche Theile, zieht durch die Theilpunkte jedes Halbkreises Parallelen zu dem Durchmesser des andern, und erhält so zwischen den Schenkeln des rechten Winkels ein Netz von Rechtecken. Die Curve geht dann, von einem beliebigen Schnittpunkte auf einem der Durchmesser ausgehend, jedesmal nach der gegenüberliegenden Ecke eines Rechtecks, geht dann stets in das Scheitelrechteck, und nur am Rande des Netzes in das Nebenrechteck über. Die

* S. Fig. 6, wo die Ebene des Papieres als XZ-Ebene angesehen werden kann und der verdeckt liegende Theil der Curve punktirt gezeichnet ist.

Curve bricht ab, wenn sie eine Ecke des Netzes erreicht oder davon ausgeht; andernfalls ist sie geschlossen. Die obengenannten Zahlen m und n geben die Zeiten an, in denen die beiden Projectionspunkte halbe Schwingungen vollenden.

Die analytische Behandlung der Aufgabe mag hier in aller Kürze ausgeführt werden. Wählt man die Halbirungslinie der mit ϱ und r beschriebenen Halbkreise resp. als X- und Y-Axe, so sind die Gleichungen der ganzen Kreise:

$$(x-r)^2+y^2=\varrho^2, \quad (y-\varrho)^2+x^2=r^2.$$

Nun weiss man, dass, wenn ein Punkt mit gleichmässiger Geschwindigkeit auf der Peripherie eines Halbkreises sich bewegt, die Geschwindigkeit seiner Projection auf dem Durchmesser in jedem Orte der Länge der Projectionslinie proportional ist. Demnach werden die Bewegungscomponenten des Punktes X durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\frac{dx}{dt}=c(y-\varrho); \quad \frac{dy}{dt}=c_1(x-r)$$

oder

$$c\,dt=\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad c_1\,dt=\frac{dy}{\sqrt{\varrho^2-y^2}}.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$ct+c'=arc\sin\frac{x}{r}, \quad c_1t+c'_1=arc\sin\frac{y}{\varrho}.$$

Durch Elimination von t zwischen diesen Gleichungen erhält man die allgemeine Gleichung der Curve:

$$c_1\,arc\sin\frac{x}{r}-c\,arc\sin\frac{y}{\varrho}=c_1c'-cc'_1.$$

Um die Constanten zu bestimmen, betrachten wir die componirenden Bewegungen der Projectionspunkte gesondert. In derselben Zeit m, welche der eine Punkt gebraucht, um den Durchmesser $2r$ zu durchlaufen, beschreibt der Punkt auf der Peripherie den Halbkreis $r\pi$. Die constante Geschwindigkeit des letzteren ist also $\frac{r\pi}{m}$. Die Geschwindigkeit des ersteren hat ihr Maximum im Mittelpunkte und ist dort einerseits gleich cr (nach dem zu Grunde liegenden Bewegungsgesetz), andererseits ebenso gross, wie die in diesem Augenblicke gleichgerichtete Geschwindigkeit $\frac{r\pi}{m}$ des Peripheriepunktes. Es ist also

$$c=\frac{\pi}{m},$$

und entsprechend

$$c_1=\frac{\pi}{n},$$

wenn n die Zeit ist, in welcher der zweite Punkt den Durchmesser 2ϱ durchläuft. Hieraus folgt:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{n}{m},$$

und nun geht die Curvengleichung über in

$$arc\sin\frac{x}{r} - \frac{n}{m}\,arc\sin\frac{y}{\varrho} = c' - \frac{n}{m}c'_1.$$

Wenn wir ferner die Zeit von dem Augenblicke an zählen, wo der zweite Punkt den Mittelpunkt des Kreises ϱ erreicht hat, so ist gleichzeitig $t=0$ und $y=0$; also folgt aus der Gleichung $c_1 t + c'_1 = arc\sin\frac{y}{\varrho}$:

$$c'_1 = arc\sin 0 = 2\varkappa\pi$$

oder, da die Bewegung erst beginnt, und daher $\varkappa = 0$ zu setzen ist:

$$c'_1 = 0.$$

Ist ferner ξ der Werth, den x für $t=0$ hat, so folgt aus der Gleichung $ct + c' = arc\sin\frac{x}{r}$:

$$c' = arc\sin\frac{\xi}{r}.$$

Durch Substitution dieser Werthe von c' und c'_1 erhält die Curvengleichung die definitive Form

$$arc\sin\frac{x}{r} - \frac{n}{m}\,arc\sin\frac{y}{\varrho} = arc\sin\frac{\xi}{r}$$

oder

$$arc\sin\left(\frac{\xi}{r^2}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x}{r^2}\sqrt{r^2-\xi^2}\right) = \frac{n}{m}\,arc\sin\frac{y}{\varrho}.$$

Um nunmehr die Gleichung von den Arcusfunctionen zu befreien, setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\xi}{r^2}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x}{r^2}\sqrt{r^2-\xi^2} = f, \quad \frac{y}{\varrho} = \varphi,$$

wodurch die Gleichung übergeht in

$$m\,arc\sin f = n\,arc\sin\varphi.$$

Wird ferner gesetzt

$$arc\sin f = u, \quad arc\sin\varphi = v,^*$$

also

---

* Die Bedeutung der Winkel u und v ergiebt sich durch folgende Betrachtung: Zunächst ist $y = \varrho\varphi = \varrho\sin v$, also $\sin v = \frac{y}{\varrho}$. Setzt man ferner in dem Ausdrucke für f die Grösse $\xi = r.\cos\lambda$, so erhält man

$$\frac{\cos\lambda}{r}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x}{r}\sin\lambda = \sin u$$

oder

$$\cos\lambda\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} - \sin\lambda.\frac{x}{r} = \sin[(u+\lambda)-\lambda].$$

Mithin ist

$$\frac{x}{r} = \cos(u+\lambda). \quad \text{(Vergl. Fig. 7.)}$$

$$\sin u = f, \quad \sin v = \varphi,$$

so geht die Gleichung über in

$$m u = n v.$$

Hieraus folgt:

$$\cos(m u) = \cos(n v),$$

oder entwickelt:

$$\cos^m u - m^{\cdot 2} \cos^{m-2} u \sin^2 u + m^{\cdot 4} \cos^{m-4} u \sin^4 u - \ldots$$
$$= \cos^n v - n^{\cdot 2} \cos^{n-2} v \sin^2 v + n^{\cdot 4} \cos^{n-4} v \sin^4 v - \ldots$$

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Ist das Verhältniss $\frac{m}{n}$ irrational, so bleibt die Gleichung offenbar transcendent, und dasselbe gilt von der durch sie dargestellten Curve, welche in endlosen Windungen den rechteckigen Raum des Netzes ausfüllt. Ist das Verhältniss $\frac{m}{n}$ rational, so kann man m und n als ganze, und sogar als gerade Zahlen ansehen, da man andernfalls den Bruch $\frac{m}{n}$ nur mit 2 zu erweitern hat. Setzen wir hiernach in der letzten Gleichung $2m$ für m, und $2n$ für n, so folgt:

$$\cos^{2m} u - (2m)^{\cdot 2} \cos^{2m-2} u \sin^2 u + (2m)^{\cdot 4} \cos^{2m-4} u \sin^4 u - \ldots$$
$$= \cos^{2n} v - (2n)^{\cdot 2} \cos^{2n-2} v \sin^2 v + (2n)^{\cdot 4} \cos^{2n-4} v \sin^4 v - \ldots$$

oder, wenn man

$$\sin^2 u = f^2, \quad \sin^2 v = \varphi^2,$$
$$\cos^2 u = 1 - f^2, \quad \cos^2 v = 1 - \varphi^2$$

benutzt:

$$(1-f^2)^m - (2m)^{\cdot 2}(1-f^2)^{m-1} f^2 + (2m)^{\cdot 4}(1-f^2)^{m-2} f^4 - \ldots$$
$$= (1-\varphi^2)^n - (2n)^{\cdot 2}(1-\varphi^2)^{n-1} \varphi^2 + (2n)^{\cdot 4}(1-\varphi^2)^{n-2} \varphi^4 - \ldots$$

Da f und φ algebraische Functionen von x und y, m und n ganze positive Zahlen sind, so ist hierdurch der algebraische Charakter der letzten Gleichung und der durch sie dargestellten Curven festgestellt.

Der Grad der in x und y ausgedrückten Gleichung ist abhängig von der Zahl der Potenzirungen, welche zur Entfernung der in f auftretenden Irrationalität $\sqrt{r^2 - x^2}$ erforderlich sind.

Was nun die speciellen Fälle betrifft, so kann man in erster Linie über das Verhältniss $\frac{m}{n}$, in zweiter über den Werth ξ verfügen. Die einfachsten Fälle sind folgende:

Erster Fall: $\frac{n}{m} = 1$.

Form der Gleichung:

$$r^2 y^2 + 2\varrho\sqrt{r^2 - \xi^2}\, x y + \varrho^2 x^2 = \varrho^2 \xi^2.$$

Die Curve ist also eine Ellipse, deren Mittelpunkt in den Coordinatenanfang fällt. Für $\xi = r$ fallen die Axen der Ellipse mit denen des Systems zusammen. Für $\xi = r = \varrho$ erhält man die Gleichung eines Kreises, und für $\xi = 0$ die einer doppelten Geraden.

Zweiter Fall: $\frac{n}{m} = 2$.

Die Gleichung der Curve wird

$$\varrho^2 \xi \sqrt{r^2 - x^2} - \varrho^2 x \sqrt{r^2 - \xi^2} = 2 r^2 y \sqrt{\varrho^2 - y^2},$$

und ist daher in Bezug auf y vom achten Grade.

Für $\xi = r$ erhält man

$$\varrho^4 r^2 - \varrho^4 x^2 = 4 r^2 \varrho^2 y^2 - 4 r^2 y^4$$

oder

$$y^4 - \varrho^2 y^2 + \frac{\varrho^4}{4} = \frac{\varrho^4 x^2}{4 r^2},$$

daher durch Radicirung

$$y^2 - \frac{\varrho^2}{2} = \pm \frac{\varrho^2 x}{2 r}.$$

Die Gleichung stellt also in diesem Falle eine doppelte Parabel dar.

Für $\xi = 0$ endlich erhält man

$$\varrho^4 x^2 = 4 r^2 y^2 \varrho^2 - 4 r^2 y^4$$

oder

$$\varrho^4 x^2 + 4 r^2 y^2 (y^2 - \varrho^2) = 0,$$

welches die Gleichung unserer oben betrachteten, die Form einer 8 zeigenden Projectionscurve ist. Diese Curve wird also von einem Punkte beschrieben, dessen Projection auf der Strecke $2r$ doppelt so schnell schwingt, als diejenige auf 2ϱ, unter der Voraussetzung, dass die erste Bewegung erst beginnt, wenn von der zweiten bereits eine Achtelschwingung vorüber ist.*

Beachtenswerth ist noch ein specieller Fall dieser Curve (Fig. 5). Setzen wir

$$\varrho = 2 r = 2 a$$

und vertauschen die beiden Axen, so geht die letzte Gleichung über in

$$4 a^2 x^4 - 16 a^4 x^2 + 16 y^2 a^4 = 0$$

oder wenn man mittelst der Formeln

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

zu Polarcoordinaten übergeht:

$$r^4 \cos^4 \vartheta - 4 a^2 r^2 \cos^2 \vartheta + 4 a^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 0,$$

oder

$$r^2 \cos^4 \vartheta = 4 a^2 \cos 2 \vartheta,$$

oder

$$\frac{r}{2} \cos^2 \vartheta = \pm a \sqrt{\cos 2 \vartheta}.$$

* Ebenso, wie die für $\xi = 0$ erhaltene Gleichung mit der Gleichung 1) des ersten Abschnittes, so stimmt auch die für $\xi = r$ erhaltene Parabelgleichung mit der dort unter 4) stehenden überein. Der Grund liegt darin, dass durch die Transformation, welche 1) in 4) verwandelte, die mit ξ identische Abscisse des Doppelpunktes von 0 in r übergeht.

Ist nun (Fig. 8) O der Pol, OX die Axe des Systems, P ein Punkt der Curve, Q die Mitte des Radius vector OP, und sind P_1 und Q_1 die Projectionen der Punkte P und Q auf die Axe, und P_2 und Q_2 die Projectionen der Punkte P_1 und Q_1 auf den Radius vector, so ist

$$O Q_2 = Q Q_1 \cos\vartheta, \quad O Q_1 = O Q \cos\vartheta,$$

daher

$$O Q_2 = O Q \cos^2\vartheta = \frac{r}{2} \cos^2\vartheta.$$

Setzen wir nun

$$\frac{r}{2} \cos^2\vartheta = r_1,$$

so geht die Gleichung unserer Curve über in

$$r_1 = \pm a \sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Dies ist aber die Polargleichung einer Lemniscate mit der Axe a, und Q_2 ist ein Punkt dieser Curve. Da ferner P_2 aus P durch dieselbe Construction hervorgeht, wie Q_2 aus Q, so ist auch P_2 ein Punkt einer Lemniscate mit der Axe $2a$. Nennt man zur Abkürzung P_2 die zweite Projection von P, so kann man das letzte Resultat in dem Satze aussprechen:

Bewegt sich ein Punkt auf der in Rede stehenden Projectionscurve, so beschreibt seine zweite Projection (auf dem Radius vector) eine Lemniscate mit gleicher Axe.

Einige andere verhältnissmässig einfache Specialfälle der allgemeinen Gleichung sind folgende:

$\frac{n}{m}$.	ξ.	Gleichung.
3	0	$y^3 - \frac{3}{4}\varrho^2 y - \frac{1}{16}\frac{\varrho^3}{r} x = 0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{r}{2}$	$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x - \frac{1}{2}\frac{r^3}{\varrho^2} y^2 + \frac{1}{4} r^3 = 0$
$\frac{1}{3}$	r	$\frac{y^2}{\varrho^2} = \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^3$

Wir wollen schliesslich noch untersuchen, unter welchen Bedingungen die allgemeine Gleichung

$$\arcsin\left(\frac{\xi\sqrt{r^2 - x^2} - x\sqrt{r^2 - \xi^2}}{r^2}\right) = \frac{n}{m} \arcsin\frac{y}{\varrho}$$

eine offene, und wann eine geschlossene Curve repräsentirt. Da ein die Curve beschreibender Punkt nur dann zur Umkehr gezwungen wird, wenn er in eine Ecke des Netzes kommt, so muss die Gleichung einer offenen Curve jedenfalls durch die Werthe

$$x = \pm r, \quad y = \pm \varrho$$

erfüllt werden. Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$arc\,sin\left(\pm\sqrt{1-\frac{\xi^2}{r^2}}\right) = \frac{n}{m}\,arc\,sin(\pm 1) = \frac{n}{m}(2p+1)\pi,$$

oder

$$sin\left[\frac{n}{m}(2p+1)\pi\right] = \sqrt{1-\frac{\xi^2}{r^2}},$$

oder

$$\xi = \pm r\,cos\left[\frac{n}{m}(2p+1)\pi\right],$$

worin p eine beliebige ganze Zahl ist.

Diese Bedingung ist in besonders einfacher Weise dann erfüllt, wenn m ungerade und ausserdem entweder n gerade und $\xi = r$, oder n ungerade und $\xi = 0$ ist. Man kann nämlich alsdann stets p so wählen, dass $2p+1$ gegen den ungeraden Nenner m sich hebt, worauf $cos\,n\pi$ bei geradem n gleich 1, bei ungeradem gleich 0 ist. Hierher gehört auch der Fall, dass $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl, also $m = 1$ ist.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Zur Theorie der Krümmung ebener Curven.

Die gebräuchliche Formel für den Krümmungshalbmesser ϱ einer ebenen, auf ein System von Parallelcoordinaten (x, y) bezogenen Curve geht durch eine einfache Umformung* in die bemerkenswerthe Formel

$$1)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{d \sin \tau}{dx} = -\frac{d \cos \tau}{dy}$$

über, in welcher τ den Winkel zwischen Tangente und x-Axe bedeutet.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass man auch bei Voraussetzung von Polarcoordinaten r, Θ die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ in analoger Weise als Differentialquotient darstellen kann.

Zu diesem Zwecke ersetzt man in der gebräuchlichen Formel

$$\varrho = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

$r' = \frac{dr}{d\Theta}$ durch die rechte Seite der bekannten Gleichung

$$2)\qquad \frac{dr}{d\Theta} = -r \tan \psi,$$

in welcher ψ den Winkel zwischen Radius vector und Normale bedeutet.

Man erhält dann zunächst

$$\frac{r}{\varrho} = \cos \psi + \cos \psi \frac{d\psi}{d\Theta},$$

und setzt man hierin nach Gleichung 2)

$$\cos \psi \frac{d\psi}{d\Theta} = r \frac{d \cos \psi}{dr},$$

so folgt

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{d(r.\cos \psi)}{dr}$$

oder, wenn man mit q die Grösse r^2 bezeichnet,

$$3)\qquad \frac{1}{\varrho} = 2\frac{d(r.\cos \psi)}{dq}.$$

Es ist mithin die Krümmung dargestellt als doppelter Differentialquotient der Projection des Radius vector auf die Richtung des Krümmungsradius.

* O. Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium d. höh. An. 3. Aufl. S. 76.

Formel 3) kann man wie Formel 1) mit Vortheil zur Lösung vieler, die Krümmung ebener Curven betreffender Aufgaben aus der Theorie der Differentialgleichungen verwenden, von denen hier nur zwei bisher noch nicht allgemein gelöste kurz behandelt werden sollen.

I. Bezeichnet man die Projection des Radius vector auf die Normale mit p, so dass

$$4)\qquad p=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

so erhält man, wenn es sich um die Bestimmung der Curven handelt, für welche allgemein

$$\varrho=\varphi(p),$$

die Polargleichungen der gesuchten Curven nach 3) und 4) in folgender Gestalt:

$$\Theta=\int\frac{p.\varphi(p)\,dp}{r^2\sqrt{r^2-p^2}}+Const_1,\qquad r^2=2\int\varphi(p)\,dp+Const_2.$$

II. Wenn es sich ferner um die Bestimmung derjenigen ebenen Curven handelt, bei welchen der Krümmungshalbmesser ϱ eine vorgeschriebene Function der Polarnormale n ist, so hat man die Gleichung 3) zunächst etwas umzuformen.

Es ist nämlich

$$5)\qquad p=r\cos\psi=\frac{r^2}{n},$$

also nach 3)

$$6)\qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{2}{n}-\frac{r}{n^2}\,\frac{dn}{dr}.$$

Ist demnach $\varrho=f(n)$ die vorgeschriebene Beziehung zwischen ϱ und n, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen 4), 5), 6) die erforderlichen beiden Integrationen leicht allgemein durchführen und ergeben als die Polargleichungen der gesuchten Curven

$$\Theta=\int\frac{r\,f(n)\,dn}{n(2f(n)-n)\sqrt{n^2-r^2}}+Const_1,\qquad lr=\int\frac{f(n)\,dn}{n(2f(n)-n)}+Const_2,$$

wo mit lr der natürliche Logarithmus von r bezeichnet ist.

Ajaccio. O. Zimmermann.

X. Ueber Rouletten und Polbahnen ebener kinematischer Systeme.

§ 1. Den nachstehenden Betrachtungen sind folgende elementare Sätze der kinematischen Geometrie zu Grunde gelegt.

1. In jedem Augenblicke der Bewegung eines ebenen geometrischen Gebildes in seiner Ebene $\mathfrak{E}'$ findet eine Drehung desselben um einen veränderlichen Punkt der Ebene — den Pol der Bewegung oder das Momentancentrum — statt (Satz von Bernoulli).

2. Jeder Punkt des geometrischen Gebildes beschreibt eine Curve — Roulette —; die Verbindungslinie des beschreibenden Punktes mit dem Pol steht dabei senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Punktes oder der Tangente an die Roulette. Jede Curve (resp. Gerade) des geometrischen Gebildes umhüllt eine andere Curve; die Verbindungslinie des Berührungspunktes der beiden Hüllcurven mit dem Pol steht dabei senkrecht auf der gemeinsamen Tangente der beiden Hüllcurven.

3. Der augenblickliche Berührungspunkt zweier Hüllcurven hat eine veränderliche Lage sowohl in der festen Ebene $\mathfrak{E}'$, als auch in einer Ebene $\mathfrak{E}$, die mit dem geometrischen Gebilde fest verbunden ist und sich mit demselben auf der ersteren Ebene bewegt. Die Geschwindigkeit, welche er in der Ebene $\mathfrak{E}$ hat, nennt man seine relative Geschwindigkeit, diejenige, welche er mit dem zusammenfallenden beschreibenden Punkte von $\mathfrak{E}$ gemein hat, seine Führungsgeschwindigkeit, und diejenige, welche er in der Ebene $\mathfrak{E}'$ hat, seine absolute Geschwindigkeit. Die absolute Geschwindigkeit eines solchen Punktes ist gleich der algebraischen Summe aus seiner relativen und seiner Führungsgeschwindigkeit. Ein beschreibender Punkt A der beweglichen Ebene $\mathfrak{E}$ hat keine relative Geschwindigkeit, seine Führungsgeschwindigkeit ist gleich seiner absoluten Geschwindigkeit. Der Pol der Bewegung hat keine Führungsgeschwindigkeit, seine relative Geschwindigkeit ist gleich seiner absoluten.

4. Die Curve, welche der Pol in der festen Ebene $\mathfrak{E}'$ beschreibt, nennt man die Polbahn, diejenige, welche er in der beweglichen Ebene $\mathfrak{E}$ beschreibt, die Polcurve. Da die relative Geschwindigkeit des Poles gleich seiner absoluten $\left(\frac{ds}{dt}=\frac{ds'}{dt}\right)$ ist, so rollt die Polcurve auf der Polbahn (sie überträgt jedes ihrer Bogenelemente auf ein gleich grosses Bogenelement der Polbahn).

5. Princip der Umkehrung. Denkt man sich dem System der ursprünglich als fest angenommenen Ebene $\mathfrak{E}'$ und der auf ihr in Bewegung befindlichen Ebene $\mathfrak{E}$ eine Bewegung derart ertheilt, dass $\mathfrak{E}$ zum Stillstand gebracht wird, so führt $\mathfrak{E}'$ eine Bewegung gegen $\mathfrak{E}$ aus. Jede Curve in $\mathfrak{E}'$, die bei der früheren Bewegung als Roulette beschrieben worden ist, gleitet jetzt durch einen festen Punkt von $\mathfrak{E}$. Jede Curve in $\mathfrak{E}'$, die vorher von einer Curve in $\mathfrak{E}$ umhüllt worden ist, umhüllt jetzt umgekehrt diese Curve. Polbahn und Polcurve vertauschen ebenfalls ihre Rollen, sind also in ihrer kinematischen Bedeutung nicht von einander unterschieden und werden daher auch mit dem gemeinsamen Namen der Polbahnen bezeichnet.

§ 2. **Die Aronhold'schen Gleichungen der Polbahnen.*** Ein Punkt A der Ebene $\mathfrak{E}$, die sich auf der festen Ebene $\mathfrak{E}'$ bewegt, beschreibe in der letzteren eine gewisse Roulette, während $\mathfrak{E}$ sich um A mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit drehe. Ist für jede Lage von A der Winkel ϑ gegeben, den eine durch A gezogene Gerade L der Ebene $\mathfrak{E}$ mit der X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems in $\mathfrak{E}'$ bildet, so ist die Bewegung von $\mathfrak{E}$ dadurch vollständig bestimmt. Die Roulette von A sei durch die Gleichungen

$$x = f_1(\vartheta), \quad y = f_2(\vartheta)$$

definirt. Nach einer gewissen Zeit t habe A die Coordinaten x und y, die Tangentialgeschwindigkeit v, deren Richtung mit der X-Axe den Winkel τ bilde und die Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol $\mathfrak{P}$. Dann ist

$$\mathfrak{P}A = r = \frac{v}{\omega} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\vartheta}{dt}} = \frac{ds}{d\vartheta},$$

wenn mit ds das Bogenelement der Roulette von A bezeichnet wird, und es sind die Coordinaten von $\mathfrak{P}$

$$X' = x - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right), \quad Y' = y + r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$$

oder

$$\text{a)} \quad X' = x - \frac{dy}{d\vartheta} = f_1(\vartheta) - f'_2(\vartheta), \quad Y' = y + \frac{dx}{d\vartheta} = f_2(\vartheta) + f'_1(\vartheta).$$

Durch Elimination von ϑ aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Gleichung der Polbahn. Es sei nun ferner die Polcurve auf das rechtwinklige Coordinatensystem in $\mathfrak{E}$ bezogen, dessen Anfangspunkt A und dessen X-Axe die Gerade L ist. Für den Winkel φ, den $\mathfrak{P}A = r$ mit der Y-Axe dieses Coordinatensystems bildet, folgt alsdann

$$\varphi = \vartheta - \tau$$

und für die Coordinaten von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf dieses System

$$X = r\sin\varphi = r\cos\tau\sin\vartheta - r\sin\tau\cos\vartheta,$$
$$Y = r\cos\varphi = r\cos\tau\cos\vartheta + r\sin\tau\sin\vartheta$$

oder

$$\text{b)} \quad \begin{cases} X = \frac{dx}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\cos\vartheta = f'_1(\vartheta)\sin\vartheta - f'_2(\vartheta)\cos\vartheta, \\ Y = \frac{dx}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{dy}{d\vartheta}\sin\vartheta = f'_1(\vartheta)\cos\vartheta + f'_2(\vartheta)\sin\vartheta. \end{cases}$$

Durch Elimination von ϑ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die Gleichung der Polcurve.

---

* Veröffentlicht in der Abhandlung des Unterzeichneten: „Ueber Rouletten und Polbahnen ebener kinematischer Systeme" im Programm der kgl. Gewerbeschule zu Elberfeld, Ostern 1882. Zahlreichere Anwendungen resp. Bewegungsaufgaben siehe ebendaselbst.

Die Roulette eines beliebigen Punktes P, der in Bezug auf das Coordinatensystem in 𝔈 die Coordinaten $+m$ und $+n$ hat, lässt sich durch diejenige des Punktes A aus den Gleichungen

$$x' = x + m\cos\vartheta - n\sin\vartheta, \quad y' = y + m\sin\vartheta + n\cos\vartheta$$

bestimmen. Die Curven, welche von den zu L parallelen resp. senkrechten Geraden der Ebene 𝔈 umhüllt werden, lassen sich ebenfalls durch die Roulette des Punktes A bestimmen. Der augenblickliche Berührungspunkt einer Geraden L_1, die in der Entfernung $+n$ zu L parallel ist, mit ihrer Enveloppe ist nach Satz 2) der Fusspunkt des von 𝔓 auf L_1 gefällten Lothes. Hat dieser Fusspunkt in Bezug auf das Coordinatensystem in 𝔈′ die Coordinaten x'', y'', dann ergiebt sich, da seine Coordinaten in 𝔈 bez. X und n sind,

$$x'' = x + X\cos\vartheta - n\sin\vartheta = x + \frac{dx}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\cos^2\vartheta - n\sin\vartheta,$$

$$y'' = y + X\sin\vartheta + n\cos\vartheta = y + \frac{dx}{d\vartheta}\sin^2\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + n\cos\vartheta,$$

woraus durch Elimination von x, y und ϑ die Gleichung der Enveloppe folgt. Entsprechend ergeben sich für die Enveloppe einer Geraden L_2, die in der Entfernung $+m$ von A zu L senkrecht steht, die Gleichungen

$$x''' = x - Y\sin\vartheta + m\cos\vartheta = x - \frac{dx}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\sin^2\vartheta + m\cos\vartheta,$$

$$y''' = y + Y\cos\vartheta + m\sin\vartheta = y + \frac{dx}{d\vartheta}\cos^2\vartheta + \frac{dy}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + m\sin\vartheta.$$

Die Gleichungen für die Enveloppen der Coordinatenaxen in 𝔈 erhält man aus den obigen Gleichungen, indem man n resp. m gleich 0 setzt.

§ 3. **Die Polbahn sei eine Gerade** (X-Axe des Coordinatensystems in 𝔈′); **die Polcurve sei durch die Gleichung** $F(X, Y) = 0$ (auf das Coordinatensystem in 𝔈 bezogen) **gegeben.** Für diesen Fall lässt sich aus den Gleichungen a) und b) eine einfache lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten. Ist nämlich die Gleichung der Polbahn $Y' = 0$, so erhält man aus a) für die Roulette des Punktes A

$$y + \frac{dx}{d\vartheta} = 0$$

und aus b)

$$X = -y\sin\vartheta - \frac{dy}{d\vartheta}\cos\vartheta, \quad Y = -y\cos\vartheta + \frac{dy}{d\vartheta}\sin\vartheta,$$

also durch Differentiation

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + y = -\frac{dX}{\cos\vartheta\, d\vartheta} = \frac{dY}{\sin\vartheta\, d\vartheta}.$$

Nun ist $\frac{dY}{dX} = -tg\,\vartheta$ der Richtungscoefficient der Tangente an die Polcurve, welcher sich mit Hilfe der Gleichung $F(X, Y) = 0$ als Function von X resp. Y ausdrücken lässt. Umgekehrt lässt sich also auch $\frac{dX}{d\vartheta}$ resp. $\frac{dY}{d\vartheta}$ als Function von ϑ ausdrücken, so dass man erhält

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + y = \Phi(\vartheta),$$

eine Gleichung, die in Vereinigung mit der Gleichung

$$y + \frac{dx}{d\vartheta} = 0$$

die Gleichungen der Roulette $x = f_1(\vartheta)$, $y = f_2(\vartheta)$ liefert.

Beispiel. Die Evolute einer Ellipse rolle auf einer Geraden.

Gleichung der Polbahn: $Y' = y + \frac{dx}{d\vartheta} = 0$,

Gleichung der Polcurve: $\left(\frac{X}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Aus der letzteren folgt

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{a}{b}\,\frac{\left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}} = -tg\,\vartheta,$$

also

$$\frac{dY}{d\vartheta} = 3\,a^2 b^2 c^2 \frac{\sin^2\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)^5}}$$

und

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + y = 3\,a^2 b^2 c^2 \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)^5}}.$$

Die Integration mit Hilfe der Variation der Constanten ergiebt hieraus die Gleichung

$$y = -\frac{c^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} + C\sin\vartheta + C_1\cos\vartheta.$$

Durch nochmalige Integration in Berücksichtigung der Gleichung für die Polbahn folgt

$$x = -\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta} + C\cos\vartheta - C_1\sin\vartheta + C_2.$$

Durch Differentiation erhält man endlich noch

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{b^2c^2\sin^4\vartheta - a^2c^2\cos^4\vartheta}{\sqrt{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)^3}} + C\cos\vartheta - C_1\sin\vartheta.$$

Diese Gleichungen definiren die Rouletten beliebiger Punkte.

a) Roulette des Mittelpunktes. Für $\vartheta = 0$ sei $x = 0$ und $y = 0$, also ist, da alsdann der auf der positiven X-Axe liegende Rück-

kehrpunkt der Evolute Pol der Bewegung ist, $\frac{dy}{dt} = -\frac{c^2}{a}\frac{d\vartheta}{dt}$ oder $\frac{dy}{d\vartheta} = -\frac{c^2}{a}$; folglich $C=0$, $C_1=0$, $C_2=a$. Für die Roulette des Mittelpunktes ergeben sich daher die Gleichungen

$$y = -\frac{c^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}}, \quad x = a - \sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}.$$

Verschiebt man die Y-Axe im Sinne der positiven x um a und eliminirt ϑ, so erhält man für die Roulette des Mittelpunktes die Gleichung vierten Grades

$$x^2y^2 + (x^2-a^2)(x^2-b^2) = 0.$$

b) Roulette eines andern Punktes. Sind die Coordinaten desselben in der beweglichen Ebene der Evolute $+m$ und $+n$, so sind die Gleichungen seiner Roulette (siehe § 2)

$$y = -\frac{c^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} + m\sin\vartheta + n\cos\vartheta,$$

$$x = a - \sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta} + m\cos\vartheta - n\sin\vartheta.$$

Für die Bewegung eines Brennpunktes ($m=c$, $n=0$) folgen also die Gleichungen

$$y = c\sin\vartheta - \frac{c^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}},$$

$$x = a + c\cos\vartheta - \sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta},$$

aus denen sich durch die unter *a)* eingeführte Transformation und Elimination von ϑ die Gleichung sechsten Grades

$$(x^2+y^2)(x^2+b^2)^2 + 4a^2x^4$$

für die Roulette des Brennpunktes ableiten lässt. Für die Bewegung eines Scheitels (z. B. $m=a$, $n=0$) folgen entsprechende Gleichungen, aus denen sich durch Elimination von ϑ eine Gleichung achten Grades ergiebt.

c) Enveloppe der X-Axe. Für dieselbe erhält man aus den Gleichungen der Roulette des Mittelpunktes und den bez. in § 2 entwickelten allgemeinen Gleichungen eine Gleichung zehnten Grades in x und y. Entsprechend ergeben sich die Gleichungen für die Curven, welche von den Parallelen zur X- resp. Y-Axe umhüllt werden.

Anmerkung. Im 11. Bd. (II. Ser.) der Nouvelles Annales de l'École Polyt., p. 133 und 500, leitet Moret-Blanc die Gleichungen gewisser Rouletten und Enveloppen bei der Bewegung einer Parabel resp. Ellipse ab, wenn letztere durch einen festen Punkt geht und fortwährend dieselbe durch diesen festen Punkt gezogene Gerade berührt. Die Polbahnen einer solchen Bewegung ergeben sich durch folgende Ueberlegung: Gleitet eine Curve derart durch einen festen Punkt A einer Geraden L,

dass diese letztere fortwährend Tangente der Curve ist, so dreht sich die Curve um ihren Krümmungsmittelpunkt. Dieser ist daher der Pol der Bewegung. Da er stets auf demselben Lothe zu L liegt, so ist die Polbahn eine Gerade (senkrecht zu L). Die Polcurve wird durch Umkehrung der Bewegung erhalten. Alsdann gleitet der Punkt A auf der gegebenen Curve so, dass die durch ihn gezogene Gerade L fortwährend Tangente an diese Curve ist. Da sich hierbei L fortwährend um den Krümmungsmittelpunkt der gegebenen Curve dreht, so ist letzterer der Pol und die Evolute der Curve die Polbahn dieser inversen, also die Polcurve der ursprünglichen Bewegung. Daraus folgt der Satz:

Rollt die Evolute einer Curve auf einer Geraden, so gleitet die Curve selbst derart durch einen festen Punkt dieser Geraden, dass sie stets von derselben durch diesen Punkt gezogenen (und zur ersteren Geraden senkrechten) Geraden berührt wird. — Oder mit anderen Worten: Rollt eine Curve auf einer Geraden, so gleitet jede ihrer Evolventen derart durch einen festen Punkt dieser Geraden, dass sie stets von derselben durch diesen Punkt gezogenen (und zur ersteren Geraden senkrechten) Geraden berührt wird.

§ 4. **Die Roulette eines Punktes A sei eine Gerade L (X-Axe des Coordinatensystems in $\mathfrak{E}'$); die Polbahn sei durch die Gleichung $F(X', Y') = 0$ gegeben.** Da $\mathfrak{P}A$ senkrecht auf L steht, so ist

$$\mathfrak{P}A = Y' = \frac{dX'}{d\vartheta}.$$

Nun ist $Y' = r$ gleichzeitig der Radius vector der Polcurve und ϑ gleich dem Winkel dieses Radius vector mit der Y-Axe des Coordinatensystems in $\mathfrak{E}$. Eliminirt man daher X' aus der Gleichung für $Y' = r$ und derjenigen für die Polbahn, so erhält man die Gleichung der Polcurve in Polarcoordinaten.

Beispiel. Die Polbahn sei eine Cykloide (und ein Punkt A bewege sich auf der Basis derselben).

$$\text{Gleichungen der Polbahn:} \quad \begin{cases} X' = a(\varphi - \sin\varphi), \\ Y' = a(1 - \cos\varphi); \end{cases}$$

daher ist

$$dX' = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

und

$$\vartheta = \int \frac{dX'}{Y'} + Const. = \varphi,$$

wenn $\varphi = 0$ ist für $\vartheta = 0$. Somit ist

$$r = a(1 - \cos\vartheta)$$

die Gleichung der Polcurve. Letztere ist also eine Kardioide, deren Grundkreis den Radius $\frac{a}{2}$ hat.

§ 5. **Die Roulette eines Punktes** A **sei eine Gerade** L (X-Axe des Coordinatensystems); **die Polcurve sei durch die Polargleichung** $r=f(\vartheta)$ **gegeben** (r werde von A aus gerechnet). Aus der letzteren und der Beziehung

$$r=Y'=\frac{dX'}{d\vartheta}$$

folgt, dass

$$X'=\int f(\vartheta)\,d\vartheta+Const.$$

ist. Durch Elimination von ϑ aus dieser Gleichung und derjenigen für $Y'=r$ erhält man die Gleichung der Polbahn.

Beispiel. Die Polcurve sei eine Hyperbel (der eine Brennpunkt beschreibe die X-Axe).

Gleichung der Polcurve: $r=Y'=\dfrac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\vartheta)}$ (worin $\varepsilon>1$);

dann folgt nach Ausführung der Integration

$$X'=b\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,tg\,\frac{\vartheta}{2}}{1-\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,tg\,\frac{\vartheta}{2}}+Const.$$

Ist für $\vartheta=0$ auch $X'=0$, so ergiebt sich nach Elimination von ϑ die Gleichung

$$Y'+a=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{X'}{b}}+e^{-\frac{X'}{b}}\right)\quad(\text{worin } c=\sqrt{a^2+b^2})$$

für die Polbahn. Die letztere ist somit eine der Kettenlinie verwandte Curve (Gewölblinie).

Elberfeld. Dr. Richard Sellentin.

XI. Ueber den Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen.

(Hierzu Taf. II Fig. 9 u. 10.)

Die allgemeine Form einer ganzen algebraischen Function von z vom Grade m ist

$$f(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_mz^m$$

oder, wenn man allgemein setzt

$$z=\varrho(\cos\omega+i\sin\omega),\qquad A_\mu=a_\mu(\cos\alpha_\mu+i\sin\alpha_\mu):$$

$$f(z)=a_0[\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0]+a_1\varrho[\cos(\alpha_1+\omega)+i\sin(\alpha_1+\omega)]+\ldots$$
$$\ldots+a_m\varrho^m[\cos(\alpha_m+m\omega)+i\sin(\alpha_m+m\omega)].$$

$f(z)$ besteht also aus $(m+1)$ complexen Summanden mit den Moduln

$$a_0,\quad a_1\varrho,\quad\ldots\quad a_m\varrho^m$$

und den bezüglichen Argumenten

$$\alpha_0, \quad (\alpha_1 + \omega), \quad \ldots \quad (\alpha_m + m\omega).$$

Jeden Zustand der Function kann man sich nach der Summationsmethode complexer Grössen versinnlichen durch einen Punkt in einem rechtwinkligen Coordinatenfelde. Wenn ω von 0 an wächst, so kann ϱ für jedes einzelne ω noch alle möglichen Werthe von 0 bis ∞ haben.

Man denke sich nun zunächst, ϱ habe für jedes einzelne ω einen und denselben bestimmten Werth ϱ'; dann beschreibt $f(z)$ bei wachsendem ω eine bestimmte Curve.

Ist $\omega = 0$, so ist $f(z)$ gleich der Summe von $m+1$ complexen Grössen mit den Moduln

$$a_0, \quad a_1\varrho', \quad \ldots \quad a_m\varrho'^m$$

und den bezüglichen Argumenten

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots \quad \alpha_m.$$

Die Summation dieser Grössen gebe den Punkt A'.

Wächst nun ω von 0 bis ω', so bleibt das Argument α_0 unverändert. α_1 wächst um ω', α_2 um $2\omega'$, ..., α_m um $m\omega'$. Die einzelnen Moduln bleiben dieselben (Fig. 9). Dies heisst geometrisch betrachtet:

Der Modul a_0 bleibt constant in seiner Lage; um seinen Endpunkt dreht sich der Modul $a_1\varrho'$ um $\angle\,\omega'$; um den sich bewegenden Endpunkt des Moduls $a_1\varrho'$ dreht sich zu gleicher Zeit der Modul $a_2\varrho'^2$ um $\angle\,2\omega'$ u. s. f.; endlich um den sich bewegenden Endpunkt des Moduls $a_{m-1}\varrho'^{m-1}$ dreht sich Modul $a_m\varrho'^m$ um $\angle\,m\omega'$.

Wächst ω von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ oder ist $\omega' = \frac{2\pi}{m}$, so macht der Modul $a_m\varrho'^m$ eine ganze Umdrehung oder der Endpunkt des Modul-Polygonzuges wird eine von A' ausgehende und in A'' endende Schleife beschreiben, wenn A'' den Zustand der Function für $\omega = \frac{2\pi}{m}$ bezeichnet.

Die Grösse der Schleife ist abhängig von der Grösse von ϱ'.

Man denke sich jetzt ϱ' einen so grossen Werth beigelegt, dass in der Reihe der Moduln

$$a_0, \quad a_1\varrho', \quad \ldots \quad a_m\varrho'^m,$$

$$a_m\varrho'^m > a_0 + a_1\varrho' + \ldots + a_{m-1}\varrho'^{m-1}.$$

In diesem Falle wird die von $f(z)$ beschriebene Schleife, vom Quadrant I (Fig. 10) aus betrachtet, jenseits um O herumgehen müssen.

Man lasse nunmehr ϱ' um $d\varrho'$ abnehmen, alsdann wird jeder einzelne der Moduln $a_1\varrho'$, ... $a_m\varrho'^m$ um eine unendlich kleine Grösse abnehmen. Folglich wird man z. B. anstatt des Punktes $A' = x + iy$ einen unendlich naheliegenden Punkt $A''' = (x - dx) + i(y - dy)$ erhalten und so für jeden andern Punkt, woraus man erkennt, dass bei stetig abnehmendem ϱ' die gebildeten Schleifen stetig in einander übergehen und sich in den Quadrant I hinein zurückziehen, bis sie für $\varrho = lim\,\frac{1}{\omega}$ $(\omega = \infty)$ in den Endpunkt des constanten Moduls a_0 zusammenfallen.

Nimmt nun ϱ von ϱ' an stetig ab, so wird es einen so kleinen Werth ϱ'' erreichen müssen, dass in der Reihe der Moduln

$$a_0,\quad a_1\varrho'',\quad \ldots\quad a_m\varrho''^m$$

der constante Modul

$$a_0 > a_1\varrho'' + \ldots + a_m\varrho''^m.$$

In diesem Falle kann die Schleife, vom Quadranten I aus betrachtet, nicht mehr jenseits um O herumgehen. Sie muss also bereits in den Quadranten I übergegangen sein, welcher Uebergang bei der Stetigkeit der Bewegung nur mittelst Durchgangs durch O geschehen konnte.

Es giebt also zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{m}$ nothwendig einen und zwar nur einen Winkel ω_1 und ebenso zwischen $\varrho = \varrho'$ und $\varrho = \varrho''$ einen Werth ϱ_1, so dass

$$\varrho_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1)$$

eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist.

Der analoge Vorgang wiederholt sich innerhalb des Intervalls $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$, so oft ω sich um $\frac{2\pi}{m}$ dreht und zugleich ϱ von ω bis ∞ variirt; im Ganzen also $n \cdot$mal.

Wächst ω über 2π hinaus, so wiederholen sich die m vorhergehenden Vorgänge identisch. Hieraus folgt:

dass eine algebraische Gleichung $f(z) = 0$ vom Grade m nothwendig m, aber auch nur m verschiedene Wurzeln besitze, q. e. d.

Zürich. H. Hocks, Stud. phil.

XII. Ueber die Vertheilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder.

Ein homogener elastischer Kreiscylinder sei durch zwei feste zu seiner Axe senkrechte Wände begrenzt. Auf seine Mantelfläche mögen unter beliebiger Neigung gegen dieselbe Druckkräfte wirken, welche senkrecht zur Cylinderaxe und von der dieser Axe parallelen Coordinate unabhängig sind. Alsdann lässt sich die Vertheilung der Kräfte im Innern in geschlossener Form von so bemerkenswerther Einfachheit darstellen, dass dieselbe trotz der Beschränktheit des Problems von Interesse ist.

Es sei F der Druck, welcher auf dem Element ds der Mantelfläche lastet; f die Richtung dieses Druckes; es sei ferner durch M_n bezeichnet die Componente in Richtung der m des Druckes, welcher auf einem der Cylinderaxe parallelen Flächenelement lastet, dessen Normale die Richtung n hat; unter m, n sei verstanden der Winkel, welchen die Richtung m mit der Richtung n bildet; unter r der Radius vector, welcher das in

Betracht gezogene Flächenelement mit dem Element ds des Mantels verbindet; unter ϱ die Senkrechte, welche von dem Element ds auf die Cylinderaxe gefällt ist; endlich unter R der Radius des Cylinders. Unter dieser Bezeichnung ist

$$1)\qquad \begin{aligned} M_n &= -p\cos n,m + \frac{2}{\pi}\int F.\frac{\cos f,r\,\cos n,r\,\cos m,r}{r}\,ds,\\ p &= \frac{1}{2R\pi}\int F\cos f,r\,ds. \end{aligned}$$

Die Integrationen sind um den ganzen Umfang des Mantels zu erstrecken.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der Ausdruck 1) ein mögliches System von Druckkräften darstellt. Sind x und y rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, welche zur Axe des Cylinders senkrecht ist, so bilden die Drucke X_x, Y_y, Y_x, da sie von der dritten Coordinate unabhängig sind, dann ein mögliches System, wenn sie den Differentialgleichungen genügen:

$$2)\qquad 0=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_x}{\partial y},\qquad 0=\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 X_y}{\partial y\,\partial x}.$$

Es seien nun ϱ und ω Polarcoordinaten, nämlich $\varrho\cos\omega = x$, $\varrho\sin\omega = y$ und es bezeichne gleichzeitig in den Druckcomponenten P_ϱ, P_ω, Ω_ω ω die Richtung, welche senkrecht zur Richtung von ϱ ist; es ist dann das Drucksystem

$$3)\qquad P_\varrho=\frac{\cos\omega}{\varrho},\quad P_\omega=0,\quad \Omega_\omega=0$$

ein solches, welches den Gleichungen 2) genügt. Man weist dies nach, indem man die aus 3) folgenden Werthe der X_x, Y_y, Y_x berechnet und dieselben in 1) einsetzt. Die drei Gleichungen 3) können ersetzt werden durch die eine:

$$M_n=\frac{\cos\omega\,\cos n,\varrho\,\cos m,\varrho}{\varrho}=\frac{\cos x,\varrho\,\cos n,\varrho\,\cos m,\varrho}{\varrho}.$$

Auch eine Summe solcher M_n mit verschiedenen Polen und mit beliebigen Constanten multiplicirt wird ein den Differentialgleichungen 2) genügendes System darstellen. Nun ist das in Gleichung 1) vorkommende Integral eine solche Summe und da der vor dem Integralzeichen stehende Ausdruck nur einen gleichmässig durch den Cylinder verbreiteten constanten Druck p darstellt, so ist das durch Gleichung 1) angedeutete System ein mögliches.

Wir beweisen zweitens, dass, wenn wir uns der Mantelfläche unendlich nähern und die Richtung der Normale n mit der Richtung des Cylinderradius ϱ zusammenfallen lassen, dass dann M_n zusammenfällt mit der Componente von F in der Richtung von m, dass also dann wird $M_n = F\cos m,n$. Wir zerlegen zu dem Ende das Integral in zwei Theile, deren einer sich bezieht auf die dem betrachteten Element unendlich

naben Theile der Grenze, der andere auf die entfernteren. Für diesen letztgenannten, und zwar nur für diesen, ist

$$r = 2R\cos\varrho, r, \quad \frac{\cos\varrho, r}{r} = \frac{\cos n, r}{r} = \frac{1}{2R},$$

also wird dieser Theil des Integrals

$$= \frac{1}{R\pi}\int F\cos f, r\cos m, r\,ds$$

$$= \frac{1}{2R\pi}\int \{F\cos f, m + F\cos(f.\varrho - m, \varrho)\}\,ds,$$

da $f, \varrho + m, r = f, m$; $f, r - m, r = f, \varrho - m, \varrho$.

Nun ist, da die Kräfte F weder eine Verschiebung des Cylinders in der Richtung m, noch eine Drehung um die Axe hervorbringen sollen, $\int F\cos f, m\,ds = 0$, $\int F\sin f, \varrho\,ds = 0$. Es wird daher der untersuchte Theil des Integrals $= \frac{1}{2R\pi}\cos m, \varrho\int F\cos f, \varrho\,ds$, er hebt sich daher gegen das erste Glied in M_n fort, und M_n reducirt sich daher auf den Theil des Integrals, welcher von der benachbarten Mantelfläche herrührt. Hier haben wir $r\,d\varrho, r = ds\cos\varrho, r$, also $\frac{\cos n, r}{r}ds = \frac{\cos\varrho, r}{r}ds = d\varrho, r$, und also, da wir F und f in dem unendlich kleinen Theile als Constante ansehen können:

$$M_n = \frac{2}{\pi}F\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos f, r\cos m, r\,d\varrho, r$$

$$= \frac{2}{\pi}F\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos(r, \varrho - f, \varrho)\cos(r, \varrho - m, \varrho)\,d\varrho, r$$

$$= \frac{F}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos(2r, \varrho - f, \varrho)\,d\varrho, r + \frac{F}{\pi}\cos f, m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}dr, \varrho$$

$= F\cos f, m$, was zu beweisen war.

Bei Berechnung des ersten der Theile, in welche wir das Integral zerlegten, hätten wir streng genommen die dem Element naheliegenden Theile der Mantelfläche von der Integration ausschliessen müssen; eine einfache Betrachtung lehrt, dass der begangene Fehler verschwindend klein ist.

Beispiel. Die Anwendung unserer Formel ist besonders bequem in dem Falle, dass nur an einzelnen Stellen des Cylindermantels Druckkräfte angreifen. Denken wir uns beispielsweise einen Cylinder zwischen zwei ebene parallele Platten gebracht und letztere mit dem Drucke P gegen einander gepresst. In solcher Lage befinden sich angenähert die Walzen, welche häufig die Unterlagen eiserner Brücken bilden. Wir legen die x-Axe durch die Berührungspunkte der Cylinder und der Platten, machen ihren Schnittpunkt mit der Cylinderaxe zum Nullpunkt, nennen die zu den x senkrechten Coordinaten y und bezeichnen mit r_1 den Abstand des betrachteten Elementes von dem einen, mit r_2 den Abstand von dem andern Berührungspunkte. Alsdann erhalten wir die Druckcomponente N_n, welche in Richtung der Normalen des betrachteten Elements entfällt:

$$N_n = -\frac{P}{R\pi} + \frac{2P}{\pi}\left\{\frac{\cos r_1 x \cos^2 r_1 n}{r_1} + \frac{\cos r_2 x \cos^2 r_2 n}{r_2}\right\}.$$

Bestimmen wir die Richtung n so, dass bei festgehaltenen r_1 und r_2 N_n ein Maximum oder Minimum wird, so erhalten wir die Werthe und Richtungen der Hauptdrucke für den Punkt $r_1 r_2$. Diese Rechnung lässt sich ausführen. Für die x- und y-Axe fallen die Richtungen der Hauptdrucke mit den Richtungen der Axen zusammen, hierdurch erhält man leicht für diese Axen:

für die x-Axe $X_x = \frac{P}{R\pi}\,\frac{3R^2+x^2}{R^2-x^2}, \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi},$

für die y-Axe $X_x = \frac{P}{R\pi}\,\frac{3R^4-2R^2y^2-y^4}{R^4+2R^2y^2+y^4}, \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi}\cdot\left(\frac{R^2-y^2}{R^2+y^2}\right)^2.$

Die Elemente der Axen sind sämmtlich gedrückt in Richtung der x, gespannt in der dazu senkrechten Richtung. Im Mittelpunkt ist der Druck in Richtung der x $\frac{6}{\pi}$-mal so gross, als wenn sich der Druck P gleichmässig über den ganzen Querschnitt $2R$ vertheilte. Uebrigens erhellt, dass schon in diesem einfachsten Falle die Vertheilung der Drucke eine äusserst complicirte ist.

Berlin. Dr. H. Hertz.

VIII.

Ueber den Einstellungsspielraum am Fernrohr und die Parallaxe.

Von

Prof. Dr. C. Bohn

in Aschaffenburg.

Hierzu Taf. III Fig. 1.

Erfahrungsgemäss wird beim Beobachten durch Fernrohr oder Mikroskop das Auge fast immer einer kurzen, häufig nahezu der kleinstmöglichen Sehweite accomodirt. Diese, vielfach Kurzsichtigkeit erzeugende Gewohnheit ist aber keine Nothwendigkeit; dem bewaffneten Auge ist die Fähigkeit, sich verschiedenen Entfernungen anzupassen, nicht genommen.

Ist $+f$ die Brennweite des Augenglases am Instrumente und e', beziehungsweise e die Entfernung des Auges von dem Augenglase, so muss nach bekannter Theorie der Lupe die Linse um

$$\frac{f(a-e')}{f+a-e'}\text{ oder }\frac{f(i-e)}{f+i-e}$$

hinter dem vom Objectiv entworfenen reellen Bilde (oder dem Fadenkreuze) stehen, je nachdem das virtuelle Bild in der grössten, für das beobachtende Auge zulässigen Entfernung a oder in der kleinsten i entstehen soll. Derselbe Beobachter kann daher bei derselben Gegenstandsweite das Ocular eines Fernrohrs (Mikroskopes) verschieden weit ausziehen. Der Unterschied der eben angegebenen Abstände der Lupe vom reellen Bilde ist der Einstellungsspielraum. Als Variation der Fernrohrlänge werde er mit δl bezeichnet und ein Index deute die Art des angewendeten Oculars an. Hier ist zunächst eine einfache Linse als Ocular oder ein sogenanntes Kepler'sches Fernrohr angenommen. Die Differenz der vorstehenden Entfernungen berechnet sich:

$$\delta l_K = f^2\,\frac{(a-e')-(i-e)}{(f+a-e')(f+i-e)}.$$

Rückt die äussere Accomodationsgrenze unendlich hinaus, so wird der Ausdruck

$$\delta l_K = f^2 \frac{1}{f + i - e} \quad (\text{für } a = \infty).$$

Der Einstellungsspielraum bei einfachem oder Kepler-Ocular wird kleiner:

wenn die Brennweite f kleiner wird

und

wenn der Augenabstand e kleiner wird.

Beispielsweise sind die Zahlenwerthe — Alles in Centimeter — für einige Sehweitegrenzen einmal für das schwache Ocular $f = 2$ cm, dann für das bei Vermessungsfernrohren vielfach vorkommende Ocular $f = 1$ cm berechnet worden.

Einstellungsspielraum bei Kepler-Ocular.

$i - e$.	$a - e'$.					$a - e'$.					$i - e$.
	∞.	10000.	1000.	500.	100.	∞.	10000.	1000.	500.	100.	
25	0,148	0,148	0,144	0,140	0,109	0,038	0,038	0,037	0,036	0,028	25
20	0,182	0,181	0,178	0,174	0,143	0,048	0,048	0,046	0,046	0,038	20
15	0,235	0,235	0,231	0,227	0,196	0,062	0,062	0,062	0,060	0,052	15
10	0,333	0,333	0,329	0,326	0,294	0,091	0,090	0,089	0,089	0,081	10
8	0,400	0,399	0,396	0,392	0,361	0,111	0,111	0,110	0,109	0,101	8
6	0,500	0,499	0,496	0,492	0,461	0,143	0,143	0,142	0,141	0,131	6
5	0,571	0,571	0,567	0,563	0,532	0,167	0,166	0,166	0,165	0,155	5
	δl_K für $f = 1$.					δl_K für $f = 2$.					

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man sehr leicht, dass die Accomodationstiefe $(a - i)$ des Auges den geringeren Einfluss auf den Einstellungsspielraum übt, dass dieser hingegen rasch wächst, wenn die innere Grenze der Sehweite (i) abnimmt. (Für den besondern Fall $e = f$ umgekehrt proportional mit i^2.) In den angeführten Beispielen beträgt der Einstellungsspielraum am Kepler-Fernrohr für Normalsichtige weniger als 2 mm, beziehungsweise etwa ½ mm, für stark Kurzsichtige erreicht er 5 mm, beziehungsweise 1½ mm.

Die äussere Grenze der deutlichen Sehweite lässt sich mittelst einer concaven Brille leicht auf unendlich bringen, wodurch zugleich die innere Grenze etwas hinausgeschoben wird.

Benutzt man eine Brille von der Zerstreuungsweite a, so werden die grösste und die kleinste Entfernung, auf die noch deutlich gesehen werden kann,

$$a' = \infty \text{ und } i' = \frac{ai}{a - i},$$

und der Einstellungsspielraum am Kepler-Fernrohre wird, wenn zur Vereinfachung $e' = e$ gesetzt wird,

$$\delta l_K = f^2 \frac{a-i}{(f-e)(a-i)+ai}.$$

Die Untersuchung dieses Ausdruckes lehrt, dass, so lange $e<f$ — und dies ist der praktisch wichtige Fall — der Einstellungsspielraum des Fernrohrs etwas grösser ist, wenn das Auge mit der schwächsten, zum Sehen in unendliche Entfernung ausreichenden Brille bewaffnet ist, als wenn keine Brille benutzt wird. Umgekehrt ist das für $e>f$.

Wählt man die Zerstreuungsweite der Brille gleich der innern Sehweitegrenze (i), so geht dem Auge jede Accomodationstiefe verloren, da nur parallele Strahlen zum Bilde auf der Netzhaut vereinigt werden, und der Einstellungsspielraum δl wird Null.

Eine so starke Brille ist unbequem (und schädlich), weil bei ihrer Anwendung das Auge beständig dem Zwange unterworfen ist, auf die kleinstmögliche Entfernung angepasst zu sein.

Zur Vermeidung dieser schädlichen Anstrengung des Auges wähle man $i+\varepsilon$ zur Zerstreuungsweite der Brille. Die Grenzen der Sehweite werden dann

$$a'' = \infty \quad \text{und} \quad i'' = i\left(1+\frac{i}{\varepsilon}\right),$$

folglich der Einstellungsspielraum

$$\delta l_K = f^2 \frac{\varepsilon}{(f-e)\varepsilon + i(i+\varepsilon)}.$$

Die Untersuchung dieses Ausdruckes zeigt, dass

$$\varepsilon < \frac{(a-i)i^2}{(f+i-e)^2}$$

sein muss, wenn die Anwendung der Brille den Einstellungsspielraum verringern soll. Zu grösserer Schonung des Auges braucht man ε nicht sehr klein zu nehmen, der Einstellungsspielraum wird doch gering, wie die nachfolgenden ausgerechneten Beispiele zeigen:

$f = 2$ cm	$i = 20$ cm,	$\varepsilon = 1$ cm,	$\delta l = 0{,}095$ mm;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$ cm,	$\delta l = 0{,}049$ mm,
$e = 1$ „	$i = 10$ „	$\varepsilon = 1$ „	$\delta l = 0{,}36$ „ ;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$ „	$\delta l = 0{,}19$ „
$f = 1$ cm	$i = 20$ cm,	$\varepsilon = 1$ cm,	$\delta l = 0{,}024$ mm;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$ cm,	$\delta l = 0{,}012$ mm,
$e = 0{,}7$ „	$i = 10$ „	$\varepsilon = 1$ „	$\delta l = 0{,}090$ „ ;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$ „	$\delta l = 0{,}047$ „

Von dem Kepler'schen Fernrohr mit einfachem Ocular, das bisher betrachtet wurde, macht sich der Uebergang leicht zu einem Fernrohr mit Collectivglas, wenn dieses, wie bei dem sogenannten positiven Oculare, wirklich ein Theil des Oculars ist, nicht wie bei der negativen Ocularen eigentlich einen Bestandtheil des Objectivs bildet.

Unter dem Ramsden-Ocular wird hier* eines verstanden, das aus zwei Linsen im Abstande von $\frac{4}{5}f$, d. h. $\frac{4}{5}$ der Brennweite des Augenglases,

* In französischen Werken wird zuweilen eine andere Combination als Ramsden-Ocular bezeichnet.

besteht, das Collectiv von der Brennweite $\frac{3}{2}f$. (Es sind, worauf es hier nicht ankommt, planconvexe Linsen, welche ihre gewölbten Seiten einander zukehren.)

Eine einzige Linse von $\frac{9}{10}f$ Brennweite, um $\frac{3}{5}f$ näher am Objectiv stehend als das Augenglas des Ramsden-Oculars, ist — abgesehen von den hier nicht in Rede stehenden Verminderungen der Aberrationen — vollkommen äquivalent dem zusammengesetzten Ocular. Wird also in den vorigen Ausdrücken $\frac{9}{10}f$ an Stelle von f und $e+\frac{3}{5}f$ an Stelle von e gesetzt, so erhält man den Einstellungsspielraum des Fernrohrs mit Ramsden-Ocular:

$$\delta l_R = 3{,}24 f^2 \frac{(a-e')-(i-e)}{(f+2(a-e'))(f+2(i-e))}.$$

Wächst die äussere Grenze der Sehweite ins Unendliche, so wird

$$\delta l_R = 1{,}62 f^2 \frac{1}{f+2(i-e)} \quad (\text{für } a=\infty).$$

Das Verhältniss des Einstellungsspielraums bei Ramsden- und bei einfachem Ocular ergiebt sich unter Voraussetzung gleicher Augabstände (e):

$$\frac{\delta l_R}{\delta l_K} = 3{,}24 \frac{(f+a-e')(f+i-e)}{(f+2(a-e'))(f+2(i-e))} \quad (\text{allgemein})$$

und

$$\frac{\delta l_R}{\delta l_K} = 1{,}62 \frac{f+i-e}{f+2(i-e)} \quad (\text{für } a=\infty).$$

Je nachdem f kleiner, gleich oder grösser ist als $\frac{12}{31}(i-e)$, wird das letztangeführte Verhältniss kleiner, gleich oder grösser als Eins. Aehnliche, aber nur schwerfällig ausdrückbare Bedingung gilt hinsichtlich der Werthe des ersten Verhältnisses. Nun muss bei einem Ramsden-Ocular die Brennweite (f) des Augenglases kleiner sein als der vierte Theil der um den Augenabstand verminderten Sehweite, wenn das Ocular als ein positives wirken, d. h. wenn das vom Objectiv entworfene reelle Bild (und das Fadenkreuz) vor dem Collectiv liegen soll. Das kann aus der Theorie der Lupe leicht gefolgert werden. Für $f \leqq \frac{i-e}{4}$ werden obige Verhältnisse kleiner als Eins $\left(\text{während für } f=\frac{a-e}{4} \text{ das erste Verhältniss grösser als Eins wird}\right)$.

Der Einstellungsspielraum eines Ramsden-Oculars ist also immer kleiner als der eines einfachen Oculars, dessen Brennweite gleich jener des Augenglases am Ramsden-Ocular ist.

Der Einstellungsspielraum am Ramsden-Ocular wird kleiner:

wenn die Brennweite (f) des Augenglases kleiner wird

und

wenn der Augenabstand e kleiner wird.

Nachstehend die für $a = \infty$ und $f = 2$ cm, dann für $f = 1$ cm für verschiedene Sehweitegrenzen berechneten Werthe des Einstellungsspielraums des Ramsden-Oculars, denen zur bessern Vergleichung in Klammern die bereits angegebenen für einfaches Ocular zugefügt sind.

Einstellungsspielraum bei Ramsden-Ocular.

$f = 2$ cm	$i - e =$	25 cm	20	15	10	8	6	5
	$\delta l_R =$	0,124	0,154	0,203	0,295	0,360	0,463	0,540
	$\delta l_K =$	(0,148)	(0,182)	(0,235)	(0,333)	(0,400)	(0,500)	(0,571),
$f = 1$ cm	$i - e =$	25 cm	20	15	10	8	6	5
	$\delta l_R =$	0,032	0,040	0,052	0,077	0,095	0,125	0,147
	$\delta l_K =$	(0,038)	(0,048)	(0,062)	(0,091)	(0,111)	(0,143)	(0,167).

Die Verschiebung eines positiven Oculars ändert nicht den Ort des reellen Bildes, da dieses durch das Objectiv allein entworfen wird. Hingegen wird durch Verschiebung eines negativen Oculars dieser Bildort geändert, da das Collectiv zur Entwerfung des reellen Bildes mitwirkt. Die Berechnung des Einstellungsspielraumes wird daher für negative Oculare weniger einfach als für positive. Sie soll für das Campani-Ocular (auch Huyghens-Ocular genannt) gemacht werden, dessen Augenglas die Brennweite f habe, dessen Collectiv die Brennweite $3f$ und den Abstand $2f$ vom Augenglas hat. Es ist am gebräuchlichsten, zwei planconvexe Linsen anzuwenden, welche beide die gewölbte Seite gegen das Objectiv kehren. Für die Richtigkeit der Bilder ist es zweckmässiger, das Collectiv biconvex gleichseitig und nur das Augenglas planconvex zu wählen. Um die Verzerrungen am Rande des Gesichtsfeldes möglichst gering zu machen, empfiehlt es sich, das Collectiv concavconvex $(+r_1 : -r_2 = 4:11)$ und das Augenglas biconvex $(r_1 : r_2 = 1:6)$ zu nehmen, immer die stärker gewölbten Seiten vom Auge abgewendet. (Airy, Phil. Mag. [4] 25, S. 155). Bei gegenwärtiger Untersuchung kommen nur die Brennweiten und der Abstand in Betracht. Das Verhältniss dieser Grössen ist immer 1 : 3 : 2.

Das zwischen den beiden Ocularlinsen gelegene reelle Bild muss nach der Theorie der Lupe von dem Augenglase im Abstande $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$ liegen, wenn d diejenige deutliche Sehweite ist, auf die gerade angepasst wurde. Mit Hilfe der Linsenformel und der angegebenen Abmessungen des Campani-Oculars findet man dann, dass die aus dem Objectiv tretenden Strahlenbüschel, ehe sie durch das Collectiv nochmals gebrochen werden, convergiren nach Punkten in einer Ebene, die um

$$3f \cdot \frac{2f + d - e}{f + 2(d-e)}$$

hinter dem Collectivglase liegt. Das Collectiv muss also vor dieser Objectivbildebene um

$$3f\frac{2f+i-e}{f+2(i-e)} \quad \text{oder um} \quad 3f\frac{2f+a-e'}{f+2(a-e')}$$

stehen, je nachdem das Auge bei genauer Einstellung des Oculars auf die kleinste deutliche Sehweite i oder auf die grösstmögliche a angepasst ist. Der Unterschied dieser Abstände von Collectiv und Objectivbildebene ist der Einstellungsspielraum bei Campani-Ocular:

$$\delta l_C = 9f^2\frac{(a-e')-(i-e)}{(f+2(a-e'))(f+2(i-e))}.$$

Rückt die äussere Grenze der Sehweite ins Unendliche, so ist

$$\delta l_C = \tfrac{9}{2}.f^2.\frac{1}{f+2(i-e)} \qquad (\text{für } a=\infty).$$

Auch bei Campani-Ocular (wie bei Ramsden- und einfachem) wird der Einstellungsspielraum kleiner:

wenn die Brennweite (f) des Augenglases kleiner wird
und
wenn der Augenabstand e kleiner wird.

Das Verhältniss des Einstellungsspielraums bei Campani-Ocular und einfachem, dessen Brennweite f jener des Augenglases des ersten gleich ist, findet sich, gleichen Augenabstand e vorausgesetzt:

$$\frac{\delta l_C}{\delta l_K} = 9\frac{(f+a-e')(f+i-e)}{(f+2(a-e'))(f+2(i-e))} \qquad (\text{allgemein})$$

und

$$\frac{\delta l_C}{\delta l_K} = \tfrac{9}{2}\frac{f+i-e}{f+2(i-e)} \qquad (\text{für } a=\infty).$$

Somit ist der Einstellungsspielraum eines Campani-Oculars immer erheblich grösser als der eines einfachen, dessen Brennweite mit jener des Campani-Augenglases übereinstimmt.

Das Verhältniss der Einstellungsspielräume eines Campani- und eines Ramsden-Oculars mit Augengläsern gleicher Brennweite ist bei gleichem Augenabstand constant, gleich $\frac{25}{9}$.

Beispielsweise ist die Grösse des Einstellungsspielraums (in Centimetern) für ein Campani-Ocular, dessen Augenglas die Brennweite $f=2$ cm, beziehungsweise 1 cm hat und für die Sehweitegrenzen und Augenabstände, die schon in dem Beispiele für das einfache Ocular gewählt waren, berechnet und folgendermassen gefunden worden:

Einstellungsspielraum bei Campani-Ocular.

$i-e$.	$a-e'$. ∞.	10000.	1000.	500.	100.	$a-e'$. ∞.	10000.	1000.	500.	100.	$i-e$.
25	0,346	0,345	0,337	0,328	0,257	0,088	0,088	0,086	0,084	0,066	25
20	0,429	0,428	0,420	0,411	0,339	0,109	0,109	0,107	0,105	0,089	20
15	0,562	0,562	0,554	0,545	0,473	0,145	0,145	0,143	0,141	0,128	15
10	0,818	0,817	0,809	0,800	0,729	0,214	0,214	0,212	0,209	0,192	10
8	1,000	0,999	0,991	0,982	0,911	0,265	0,264	0,262	0,260	0,242	8
6	1,286	1,285	1,277	1,268	1,197	0,346	0,346	0,344	0,341	0,323	6
5	1,500	1,499	1,491	1,482	1,411	0,409	0,409	0,407	0,405	0,387	5
	δl_C für $f=2$.					δl_C für $f=1$.					

Für Normalsichtige beträgt in diesem Beispiele der Einstellungsspielraum über 4 mm, beziehungsweise 1 mm, für stark Kurzsichtige erreicht er fast 15 mm, beziehungsweise 4 mm.

Was gelegentlich der Untersuchung des einfachen Oculars über den Einfluss einer das Auge für unendliche Entfernung anpassenden Brille auf den Einstellungsspielraum im Allgemeinen gesagt wurde, gilt auch für das Ramsden- und für das Campani-Ocular.

Bei Anwendung einer Brille von der Zerstreuungsweite $i+\varepsilon$ berechnet sich der Einstellungsspielraum des Campani-Oculars zu

$$\delta l_C = \tfrac{9}{2} f^2 \frac{\varepsilon}{(f-2e)\varepsilon + 2i(i+\varepsilon)}.$$

So lange

$$\varepsilon < \frac{4i^2(a-i)}{(f+2(i-e))^2},$$

wird durch den Gebrauch der Brille der Einstellungsspielraum kleiner, als wenn keine Brille verwendet wird. Beispielsweise berechnet sich

$f=2\text{cm}$, $e=1$ „ $\begin{cases} i=20\text{cm}, & \varepsilon=1\text{cm}, & \delta l_C=0{,}214\text{mm}; & \varepsilon=\frac{1}{2}\text{cm}, & \delta l_C=0{,}109\text{mm}, \\ i=10 \text{ „} & \varepsilon=1 \text{ „} & \delta l_C=0{,}817 \text{ „ };& \varepsilon=\frac{1}{2} \text{ „} & \delta l_C=0{,}429 \text{ „} \end{cases}$

$f=1\text{cm}$, $e=0{,}7\text{m}$ $\begin{cases} i=20\text{cm}, & \varepsilon=1\text{cm}, & \delta l_C=0{,}054\text{mm}; & \varepsilon=\frac{1}{2}\text{cm}, & \delta l_C=0{,}027\text{mm}, \\ i=10 \text{ „} & \varepsilon=1 \text{ „} & \delta l_C=0{,}205 \text{ „ };& \varepsilon=\frac{1}{2} \text{ „} & \delta l_C=0{,}107 \text{ „} \end{cases}$

Diese verbleibenden Einstellungsspielräume sind etwa doppelt so gross, als unter ähnlichen Verhältnissen bei dem einfachen Ocular. Durch Anwendung einer Brille, deren Zerstreuungsweite weniger von der innern Grenze der Sehweite verschieden ist (kleineres ε), kann man den Einstellungsspielraum kleiner machen.

Bisher wurden verglichen Fernrohre mit gleicher Brennweite f des Augenglases. Bei gleicher Brennweite des Objectivs und gleicher Gegenstandsweite sind aber die Vergrösserungen dieser Fernrohre, je nachdem

sie mit einfachem (Kepler-) oder mit Ramsden- oder mit Campani-Ocular versehen sind, ungleich. Begnügt man sich mit den gewöhnlichen Annäherungen, so stehen die Vergrösserungen der drei Fernrohre, wenn d die benutzte deutliche Sehweite des Beobachters ist, in dem Verhältnisse

$$f + d - e : \tfrac{5}{9}(f + 2(d-e)) : \tfrac{1}{3}(f + 2(d-e))$$

(Kepler) (Ramsden) (Campani).

Für künstlich unendlich weitsichtig gemachtes Auge und unendlich fernen Gegenstand sind diese Vergrösserungsverhältnisse genau

$$1 : \tfrac{10}{9} : \tfrac{2}{3}.$$

Sollen die Vergrösserungen gleich ausfallen, so müssen sich die Brennweiten der Augengläser verhalten:

$$1 : \tfrac{10}{9} : \tfrac{2}{3}.$$

Genügend annähernd ist das, welches strenge richtig nur für unendliche Weitsichtigkeit und Gegenstandsweite ist, auch giltig bei beliebiger Sehweite und Gegenstandsweite, — beide nicht gar zu klein angenommen. Bei der Wahl eines Beobachtungsfernrohrs wird (ausser Schärfe und Helligkeit des Bildes) vorwiegend die Vergrösserung berücksichtigt und es ist daher nützlich, die Vergleichung der Einstellungsspielräume der drei Fernrohre gleicher Vergrösserung (bei gleichem Objectiv und Gegenstandsweite) zu machen, d. h. (annähernd) jener mit den Augenglasbrennweiten f, $\frac{10}{9}f$ und $\frac{2}{3}f$.

Der Einstellungsspielraum des Ramsden-Oculars, dessen Augenglas die Brennweite $\frac{10}{9}f$ hat, ist (für $a = \infty$)

$$\delta l_{R'} = 9f^2 \frac{1}{5f + 9(i-e)},$$

also $\dfrac{50}{9}\,\dfrac{f + 2(i-e)}{5f + 9(i-e)}$-mal so gross als der des Ramsden-Oculars, dessen Augenglas die Brennweite f hat, d. h. etwas grösser.

Der Einstellungsspielraum des Campani-Oculars, dessen Augenglas die Brennweite $\frac{2}{3}f$ hat, ist (für $a = \infty$)

$$\delta l_{C'} = 3f^2 \frac{1}{f + 3(i-e)},$$

also $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{f + 2(i-e)}{f + 3(i-e)}$-mal so gross als der des Campani-Oculars, dessen Augenglas die Brennweite f hat, d. h. kleiner, wenn, wie bei dem Campani-Ocular erforderlich, $f < (i-e)$ ist.

Für gleich stark vergrössernde Fernröhre, mit derselben Objectivbrennweite, der gleichen Gegenstandsweite und unendlich weitsichtig gemachtem Auge ist (immer gleichen Augenabstand e vorausgesetzt) daher der Einstellungsspielraum bei Anwendung des Ramsden-Oculars $9\dfrac{f + i - e}{5f + 9(i-e)}$-mal so gross (d. h. grösser) als

bei Anwendung des einfachen Oculars und $3\frac{f+3(i-e)}{5f+9(i-e)}$-mal so gross (d. h. kleiner) als bei Anwendung des Campani-Oculars.

Und der Einstellungsspielraum ist bei Anwendung des Campani-Oculars $3\frac{f+i-e}{f+3(i-e)}$-mal so gross (also grösser) als bei Anwendung des einfachen Oculars.

Für gegebene Objectivbrennweite, Gegenstandsweite und Vergrösserung ist also der Einstellungsspielraum am allerkleinsten, wenn man ein einfaches Ocular anwendet, und am grössten für das Campani-Ocular.

Bei den neueren Mikroskopen ist allgemein der Abstand zwischen Objectiv und Augenglas ein unveränderlicher. Je nach der verschiedenen Anpassungsweite des beobachtenden Auges muss daher behufs deutlicher Wahrnehmung die Entfernung von Gegenstand und Objectiv gewählt werden. Der Unterschied der für die Sehweitegrenzen a und i zu wählenden Gegenstandsweiten G_a und G_i ist der Einstellungsspielraum des Mikroskopes.

Ist l die Länge des Mikroskopes (Abstand zwischen Objectiv und Augenglas), F und f die Brennweiten des Objectivs und des (einfachen oder Kepler'schen) Oculars, so berechnen sich

$$G_a = F\frac{a(l-f)+lf}{a(l-f-F)+(l-F)f} \quad \text{und} \quad G_i = F\frac{i(l-f)+lf}{i(l-f-F)+(l-F)f},$$

wenn $e=0$ gesetzt wird, wozu Anlass darin liegt, dass aus verschiedenen Gründen das Auge möglichst dicht an das Augenglas des Mikroskopes gebracht zu werden pflegt.

Aus vorstehenden Werthen folgt nach einiger Zusammenziehung der Einstellungsspielraum

$$\delta G = F^2.f^2\frac{a-i}{ai(l-f-F)^2+(a+i)(l-F)f(l-f-F)+(l-F)^2.f^2}.$$

Das ist eine ziemlich spröde Formel, die für zusammengesetzte Oculare noch unhandlicher wird. Es mag genügen, hier hervorzuheben, dass der Einstellungsspielraum der Mikroskope stets sehr klein ist; für dieselben Brennweiten, Mikroskoplänge und innere Sehweitegrenze i erreicht er den Maximalwerth durch Hinausrückung der äusseren Sehweitegrenze ins Unendliche, nämlich

$$\delta G = \frac{F^2f^2}{(l-f-F)((l-f-F)i+(l-F)f)} \quad (\text{für } a=\infty).$$

Zahlenbeispiele. $F=1\,\text{cm}$, $f=3\,\text{cm}$, $l=20\,\text{cm}$, $i=15\,\text{cm}$.

$a = 55\,\text{cm}$, $\delta G = 0{,}0129\,\text{mm}$,
$a = 115$ „ $\delta G = 0{,}0160$ „
$a = \infty$, $\delta G = 0{,}0189$ „

Das Fadenkreuz eines Beobachtungsfernrohrs erhält eine bestimmte Stellung gegen das Ocular, die wenigstens derselbe Beobachter in allen Fällen ungeändert lässt. Sie entspricht einer bestimmten, dem Beobachter gerade bequemen Sehweite, in welcher dann das virtuelle Bild des Fadenkreuzes durch das Augenglas entworfen wird. Zu anderer Zeit ist das beobachtende Auge auf eine andere Entfernung angepasst als jene, welche bei der Feststellung des Fadenkreuzes in Anwendung kam, oder auch in etwas andere Entfernung hinter das Augenglas gestellt. Trotzdem sieht der Beobachter das Fadenkreuz im Fernrohre genügend deutlich, ja sogar andere Beobachter, denen die gewählte Sehweite — nach ihrem Grade von Kurz- oder Weitsichtigkeit — durchaus nicht bequem ist, vermögen das Fadenkreuz noch gut zu erkennen. Dies rührt daher, dass einmal das Auge, um das Fadenkreuz deutlichst zu sehen, sich jener Entfernung, in welcher dessen virtuelles Bild entsteht, anpasst und zum andern, dass, wenn diese Anpassung nicht möglich ist oder nicht vollkommen vollzogen ist, zwar den Punkten der Fäden auf der Netzhaut des Auges Abweichungskreise entsprechen, eine störende Undeutlichkeit jedoch hierdurch nicht hervorgerufen wird, wenn der Halbmesser der Zerstreuungs- oder Abweichungskreise eine gewisse Grösse (gewöhnlich giebt man an 1 Winkelsecunde) nicht überschreitet.

Mathematisch genau gleich deutlich wie das Fadenkreuz kann ein entfernter Gegenstand durch das Fernrohr nur dann gesehen werden, wenn sein reelles Bild mit dem Fadenkreuze zusammenfällt, also die virtuellen Bilder des Gegenstandes und des Fadenkreuzes in derselben, der Anpassung des Auges entsprechenden Entfernung entstehen. Ist das Fadenkreuz vom reellen Bilde des angeblickten Gegenstandes durch einen Zwischenraum z getrennt, so werden Fadenkreuz und Gegenstand mit ungleich grossen Abweichungskreisen auf der Netzhaut des Auges auftreten, jedenfalls wenigstens das eine nicht vollkommen deutlich sein können. Da aber die eintretende Undeutlichkeit, wie angeführt, nicht sehr merklich ist, so lange die Abweichungskreise klein genug sind, ist es fast unmöglich, durch die Beurtheilung gleich grosser (höchster) Deutlichkeit ein Fernrohr so einzustellen, dass Fadenkreuz und reelles Bild eines Zielpunktes wirklich genau zusammentreffen. Da es ein gleich zu erwähnendes Mittel giebt, das Zusammenfallen recht scharf zu prüfen, so kann man leicht die Erfahrung machen, dass die Versuche, ausschliesslich nach der Beurtheilung gleicher Deutlichkeit einzustellen, meistens missglücken und nicht selten einen ziemlich grossen Zwischenraum z bestehen lassen.

Wird die Mitte des Auges genau auf die Absehlinie des Fernrohres, d. i. die Gerade durch den optischen Mittelpunkt des Objectivs und den Schnittpunkt der Fäden gehalten,* so liegt der vom Fadenkreuzschnitt-

* Es wird immer ein gut centrirtes Fernrohr vorausgesetzt.

punkte gedeckte Punkt des fernen Gegenstandes genau auf der Absehlinie, einerlei ob das reelle Bild des Zielpunktes mit dem Fadenkreuze zusammenfällt, oder ob es vor oder hinter diesem liegt. Bringt man aber das Auge aus der Absehlinie heraus, so deckt der Fadenkreuzschnittpunkt, wenn das Auge excentrisch bewegt wird, nur dann immer denselben Punkt des angezielten Gegenstandes, wenn Fadenkreuz und Bild des Gegenstandes genau zusammenfallen, während andernfalls eine Parallaxe eintritt, das Fadenkreuz nach und nach andere Punkte des Gegenstandes deckt. Man hat die Regel: scheint das Fadenkreuz am Gegenstande sich im selben Sinne zu verschieben, in welchem das Auge verrückt wird, so liegt das reelle Bild zwischen Auge und Fadenkreuz; geht aber die scheinbare Bewegung des Fadenkreuzes jener des Auges entgegen, so liegt das reelle Bild weiter vom Auge ab, als das Fadenkreuz. Im ersten Falle muss zur Verbesserung der Fernrohreinstellung das Ocular ausgezogen werden, im zweiten Falle ist es einzuschieben. Erst wenn das „Tanzen des Fadenkreuzes“ beim Bewegen des Kopfes ganz aufhört, ist die Ocularstellung genau richtig und besteht keine Gefahr mehr, bei der Beobachtung Parallaxenfehler zu machen.

Trotz dieses bekannten Mittels der Prüfung auf die Richtigkeit wird doch, wie die Erfahrung lehrt, die Ocularstellung bei Messungen häufig nicht genau genug ausgeführt. Um sie vollkommen zu machen, bedarf es vieler Geduld und einer geschickten Hand. Am schärfsten lässt sie sich aus freier Hand bewirken; die gewöhnlich am Ocularrohre angebrachten Triebwerke haben einen zu groben Gang und unterliegen einer Abnutzung, die Schlotterigkeit herbeiführt.

Der Einfluss, den eine Verschiebung des Oculars ausübt auf die Entfernung, in welcher das virtuelle Bild entsteht, hängt von der Art und der Brennweite des Oculars ab; er ist am geringsten, wenn der Einstellungsspielraum am grössten ist. Je grösser dieser ist, desto wahrscheinlicher wird eine Einstellungsungenauigkeit und desto grösser die mögliche Entfernung zwischen Bild und Fadenkreuz.

Damit Parallaxenfehler eintreten, muss zu der ungenauen Fadenkreuzstellung noch eine Lage des Auges ausserhalb der Absehlinie kommen. Diese ist immer zu befürchten, weil nur in Ausnahmefällen die centrale Stellung für das Auge genau und sicher zu finden ist: bei sehr engen Blenden nimmt der aufmerksame Beobachter Beugungserscheinungen wahr, welche das Centriren des Auges leicht machen.

Dass bei den Nivellirarbeiten und dem optischen Distanzmessen erhebliche Irrthümer vorkommen, weil eine Parallaxe beim Beobachten der Theilungen durch das Fernrohr eintreten kann, ist sehr bekannt und es wird in den Werken über Vermessung möglichst sorgfältiges Einstellen des Oculars bei den genannten Geschäften empfohlen. Auch eine Winkelparallaxe kommt vor, doch ist sie meist von geringerem Belange und

pflegt nicht erwähnt zu werden. So weit dem Verfasser bekannt, fehlt es an einer zahlengemässen Auswerthung der möglichen Parallaxenfehler. Zu einer solchen soll das Nachfolgende die Grundlage liefern und es sollen die Fernrohre mit verschiedenen Ocularen in Hinsicht auf Parallaxe verglichen werden.

Fernrohr mit einfachem Ocular. Die vom Schnittpunkte der Fäden ausgegangenen Strahlen divergiren nach der Brechung im Ocular aus einem Punkte, der um die deutliche Sehweite d, für welche das Auge angepasst ist, vor diesem, also um $d-e$ vor der Linse liegt, wenn e die Entfernung zwischen Auge und Augenglas ist. Es genügt, den mittleren Strahl des in das Auge gelangenden, zu einem Punkte gehörenden Bündels zu betrachten. Derselbe schneidet, wenn die Mitte der Pupille um s seitlich der Absehlinie des Fernrohres steht, das reelle Bild des angezielten Gegenstandes in einer Entfernung σ von der Absehlinie, welche sich zum Abstande z zwischen Fadenkreuz und reellem Bilde verhält (Fig. 1), wie die seitliche Entfernung s_1, in welcher der betreffende Mittelstrahl das Ocular schneidet, zu dem Abstande des Fadenkreuzes vom Ocular. Letzterer ergiebt sich aus der Theorie der Lupe zu $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$. Die Seitlichkeit s_1 aber verhält sich zur Excentricität s der Pupille, wie die um den Augenabstand verminderte Sehweite $(d-e)$ zur Sehweite (d). Und der Strecke σ des reellen Bildes entspricht eine $\frac{G}{B}$-mal so grosse (Linear-)Parallaxe am Gegenstande, wenn G dessen Entfernung vom Objectiv und B die ihr conjugirte Bildweite ist. Ist F die Brennweite des Objectivs, so ist bekanntlich $\frac{G}{B}=\frac{G-F}{F}$, und das in Verbindung mit den Gleichungen

$$\sigma : s_1 = z : \frac{f(d-e)}{f+d-e}, \qquad s_1 : s = d-e : d$$

ergiebt die Grösse Δ_K der linearen Parallaxe

$$\Delta_K = \frac{sz}{d}\,\frac{f+d-e}{f}\,\frac{G-F}{F}$$
$$= \frac{sz}{Ff}(G-F)\left(1+\frac{f-e}{d}\right).$$

Für unendlich weitsichtiges Auge wird der Ausdruck

$$\Delta_K = \frac{sz}{Ff}(G-F) \quad (\text{für } d=\infty).$$

Der Werth der Winkelparallaxe δ berechnet sich nach

$$tg\,\delta_K = \frac{\Delta}{G} = \frac{sz}{Ff}\,\frac{G-F}{G}\left(1+\frac{f-e}{d}\right).$$

Man folgert:

Die lineare Parallaxe wächst mit der Zielweite, sie ist dem Abstande des Gegenstandes von dem vorderen Brennpunkte des Objectivs proportional. Bei der gewöhnlichen Art des optischen Distanzmessens ist dann die ermittelte Entfernung mit einem Fehler behaftet, der sehr nahezu der gemessenen Entfernung selbst proportional ist; genau dem Abstande der Distanzlatte vom vordern Brennpunkte des Objectivs.

Die Winkelparallaxe nimmt ab mit zunehmender Zielweite.

Beide (lineare und angulare) Parallaxen sind

1. proportional der Seitlichkeit s des Auges,
2. proportional der Ungenauigkeit z der Oculareinstellung.
3. Sie werden kleiner, wenn die Objectivbrennweite F grösser wird.
4. Sie werden kleiner, wenn die Ocularbrennweite f grösser wird.
5. Sie werden kleiner, wenn die Entfernung e des Auges hinter dem Augenglase grösser wird.
6. Ist der Augenabstand e gleich der Ocularbrennweite f, so hat die Sehweite des Beobachters gar **keinen** Einfluss auf die Parallaxen; hingegen

   für $e<f$ werden die Parallaxen kleiner bei **grosser**,
   „ $e>f$ „ „ „ „ „ **kleiner**
   Sehweite.

Für die Wahl des Augenabstandes e können verschiedene Rücksichten massgebend sein.

Das grösste Gesichtsfeld* erhält man, wenn das Auge in den Punkt der Fernrohraxe gestellt wird, in welchen die durch den nutzbaren Rand des Oculars gegangenen Strahlen (welche für das Objectiv centrale waren) sich schneiden. Für den besondern Fall unendlicher Gegenstandsweite und unendlicher Weitsichtigkeit ist der Augenabstand für maximales Gesichtsfeld sehr leicht zu berechnen und in manchen Lehrbüchern angegeben. Er ist** $f\left(1+\frac{1}{v}\right)$, wo $v=\frac{F}{f}$ die Vergrösserung des Fernrohres unter den angegebenen Voraussetzungen bedeutet. Allgemeiner ist die Formel*** $\frac{lf}{l-f}$, die aber nur scheinbar einfach ist,

* Wie üblich, werden nur solche Punkte als im Gesichtsfeld stehend gerechnet, von denen der central durch das Objectiv gegangene Strahl ins Auge gelangt, und die Oeffnung der Pupille als verschwindend klein angenommen.

** Radicke, Handbuch der Optik, II, 331.

*** Bohn, Ergebnisse physikalischer Forschung, 430.

weil in der Fernrohrlänge $l = B + \frac{f.(d-e)}{f+d-e}$ die gesuchte Grösse e selbst enthalten ist. Durch eine nicht schwierige, aber etwas weitläufige Rechnung finde ich für die Sehweite d und die von der Gegenstandsweite G und Objectivbrennweite F in bekannter Weise abhängende Bildweite B den Ausdruck

$$e = f + \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f^2}{Bd}}\right).$$

Jedenfalls ist also der für maximales Gesichtsfeld zu wählende Augenabstand grösser als die Brennweite f des Oculars, und wenn dieser Augenabstand gewählt wird, ist, wie oben bemerkt, die Parallaxe geringer bei kleiner Sehweite als bei grosser.

Der Augenabstand für maximales Gesichtsfeld übertrifft die Ocularbrennweite um so weniger, je kleiner Bildweite und Sehweite und je grösser die Ocularbrennweite ist. Man verliert an Gesichtsfeld nur sehr wenig, wenn man den Augenabstand gleich der Ocularbrennweite macht, und dann wird die mögliche Parallaxe unabhängig von der Sehweite.

Ist das Auge (durch Brille) unendlich weitsichtig, so ist der Augenabstand ohne Einfluss auf die Helligkeit der Wahrnehmung durch das Fernrohr, da die aus dem Ocular tretenden Strahlengruppen cylindrisch sind; ist aber das Auge nicht unendlich weitsichtig, so wird durch Annäherung des Auges zum Ocular an Helligkeit gewonnen, weil die zusammengehörigen Strahlen divergent aus dem Ocular treten und bei grösserer Entfernung des Auges ein Theil ungenützt neben die Augenöffnung trifft. Steigerung der Helligkeit ist, namentlich bei dem Beobachtungsfernrohr, entschieden wichtiger als Vergrösserung des Gesichtsfeldes. Daraus ist zu erklären, warum der Augenort um weniger als die Brennweite des Oculars hinter diesem entfernt gewählt wird. Radicke* giebt an: man pflege den Deckel mit der runden Oeffnung (dicht an welche das Auge gehalten wird) an der Ocularröhre halb so weit von der letzten Linse (dem Augenglase) anzubringen, als die Entfernung betragen muss, wenn das ganze Gesichtsfeld übersehen werden soll. Bei all' den vielen Beobachtungsfernröhren, die zu prüfen ich Gelegenheit hatte, finde ich den durch das Sehloch angegebenen Augenabstand aber viel kleiner, also immer $e < f$, und das ist demnach der praktisch wichtigere Fall, in welchem, wie angegeben, die mögliche Parallaxe kleiner ist für grosse, am kleinsten für unendliche Sehweite.

Der Halbmesser der Oeffnung im Oculardeckel begrenzt die mögliche Seitlichkeit des Auges. Verengerung dieser Sehöffnung ist also ein wirksames Mittel, den möglichen Parallaxenfehler zu verkleinern, zugleich wird dadurch die Auffindung der centralen Stellung des Auges erleichtert, für welche gar keine Parallaxe mehr stattfindet.

* Handbuch der Optik, II, 333.

Zu der Schlussfolgerung, dass der mögliche Parallaxenfehler durch Vergrösserung der Brennweite des Objectivs, wie jener des Oculars vermindert werden kann, ist zu bemerken: Vermehrung der Brennweite nöthigt zu einer Verlängerung des Fernrohrs, die durch Verringerung der Standsicherheit des Instruments und wegen sonstiger Nachtheile und Unbequemlichkeiten unerwünscht ist.

Die Vergrösserung der Ocularbrennweite ist insofern für die Genauigkeit des Zielens nützlich, als die Vergrösserung der Fäden geringer wird, diese also eine geringere Fläche des angezielten Gegenstandes verdecken. Sie ist aber in Rücksicht auf mögliche Parallaxenfehler dadurch schädlich, dass der Einstellungsspielraum grösser und damit ein grösserer Werth von z wahrscheinlich wird.

Fernrohr mit Ramsden-Ocular. Die Parallaxe kann gefunden werden durch Verfolgung des Weges des vom Fadenkreuze ausgehenden, schliesslich in das um s seitlich gehaltene Auge gelangenden Mittelstrahls. Er schneidet das reelle Bild in der Entfernung σ von der Absehlinie, das Collectivglas im Abstande s_2, das Augenglas im Abstande s_1 und man hat

$$\sigma : s_2 = z : g_1, \quad s_2 : s_1 = b_1 : b_1 + \tfrac{4}{5} f, \quad s_1 : s = d - e : d.$$

Hier bedeutet g_1 die Entfernung des vom Objectiv entworfenen reellen Bildes von dem Collectiv, b_1 die zugehörige (virtuelle) Bildweite $\left(-\frac{1}{b_1} + \frac{1}{g_1} = \frac{1}{\frac{4}{5} f}\right)$, endlich muss nach der Lupentheorie $b_1 + \frac{4}{5} f = \frac{f(d-e)}{f+d-e}$ sein.

Einfacher findet man die Parallaxe, die beim Ramsden-Ocular möglich ist, aus jener bei einfachem Ocular, dessen Brennweite mit jener des Augenglases am Ramsden-Ocular übereinstimmt, wenn man für f einführt $\frac{10}{9} f$ (die Brennweite der dem Ramsden-Ocular äquivalenten Linse) und für e selbst $e + \frac{2}{9} f$, hiermit beachtend, dass die äquivalente Linse um $\frac{2}{9} f$ näher dem Objectiv stehen muss als das Augenglas.

Man findet (das Anhängsel R kennzeichnet das Ramsden-Ocular) die Parallaxe

$$\begin{aligned} \Delta_R &= \frac{5}{9} \cdot \frac{sz}{d} \cdot \frac{f + 2(d-e)}{f} \cdot \frac{G-F}{F} \\ &= \frac{5}{9} \cdot \frac{sz}{Ff} (G-F) \left(2 + \frac{f-2e}{d}\right), \end{aligned}$$

demnach für unendlich fernsichtig gemachtes Auge

$$\Delta_R = \frac{10}{9} \cdot \frac{sz}{Ff} (G-F) \qquad (\text{für } d = \infty).$$

In diesem besondern Falle ist bei gleichgrosser Einstellungsungenauigkeit z, gleicher Seitlichkeit s und Entfernung e des Auges und gleicher Gegenstandsweite G die Parallaxe bei Ramsden-Ocular $\frac{10}{9}$-mal so gross

als die bei einfachem; allgemein aber ist unter den genannten Bedingungen das Verhältniss

$$\frac{\Delta_R}{\Delta_K} = \frac{5}{9} \cdot \frac{f + 2(d-e)}{f + d - e},$$

welches auch sehr nahezu das Verhältniss der erzielten Vergrösserungen ist (ganz genau bei $G = \infty$).

Für das Fernrohr mit Ramsden-Ocular gelten die für das mit einfachem Ocular aufgestellten Schlüsse bis 5. unverändert, in 6. aber ist die Bedingung $e \lesseqgtr f$ zu ersetzen durch $2e \lesseqgtr f$.

Fernrohr mit Campani-Ocular. Bei allen negativen Ocularen muss das Fadenkreuz zwischen Collectiv und Augenglas und, damit es scharf gesehen werde, in jener bestimmten Entfernung vor dem Augenglase liegen, welche das virtuelle Bild in dem Abstande vom Auge entstehen lässt, für welchen dieses gerade angepasst ist. Je nach der Entfernung (e) desselben Auges hinter dem Augenglase und je nach der Anpassungsweite (d) muss also die Lage des Fadenkreuzes gegen das Augenglas sich ändern. Aus technischen Gründen verschiebt man nicht gern das Fadenkreuz selbst, sondern es ist üblich, das Augenglas im Ocularrohr so lange durch Schrauben zu verschieben, bis die dem betreffenden Auge dienliche Entfernung erreicht ist; es wird also der Abstand zwischen Augenglas und Collectiv und damit die Construction des zusammengesetzten Oculars geändert. Wären alle Beobachter durch passende Brillen unendlich weitsichtig gemacht, so wäre dem Fadenkreuze ein- für allemal die Stellung in der Brennebene des Augenglases anzuweisen; jeder Grund, die relative Stellung von Augenglas und Collectiv zu ändern, entfiele und damit wäre die Gefahr beseitigt, das Ocular hinsichtlich seiner Wirkung auf Minderung der zwei Aberrationen zu verschlechtern. Schon aus diesem Grunde empfiehlt sich der Gebrauch einer genügend starken Brille, der, wie gefunden, auch für Verminderung des Einstellungsspielraums nützlich ist und, wie sich zeigen wird, ebenso empfehlenswerth ist in Hinsicht auf mögliche Parallaxe.

Die Untersuchung des Parallaxenfehlers bei dem nach dem individuellen Bedürfniss des Beobachters durch Verstellung des Augenglases abgeänderten (gewöhnlich in optischer Hinsicht verschlechterten) Campani-Ocular würde sehr weitläufig und doch von geringem Interesse sein. Es wird daher nachfolgend angenommen, der Abstand zwischen Collectiv und Augenglas sei unverändert der doppelten Brennweite des letztern gleich und das Fadenkreuz habe solche Lage, dass sein virtuelles Bild in der Entfernung (d) vom Auge entstehe, auf welche dieses angepasst ist.

Die Untersuchung ist weniger einfach als für das Ramsden-Ocular, weil das Collectiv einen Theil des Objectivs bildet, je nach der Einstel-

lung (Gegenstandsweite u. s. f.), aber seine Lage gegen das vorderste Glas (das eigentliche Objectiv) ändert. Es ist also nicht empfehlenswerth, eine dem System von Objectiv und Collectiv äquivalente Linse einzuführen, denn dieser müsste veränderliche Brennweite und veränderliche Stellung gegeben werden, weil der Abstand der Linsen des Systems ändert.

Aus dem Abstande $\frac{f(d-e)}{f+d-e}$ des Fadenkreuzes vor dem Augenglase ergiebt sich jener hinter dem Collectiv $b_1 = f.\frac{2f+d-e}{f+d-e}$. Bei genauer Einstellung muss ebendort das reelle Bild liegen, welches Objectiv und Collectiv zusammen entwerfen.

Bei ungenauer Einstellung liegt das reelle Bild nicht in der Entfernung b_1 hinter dem Collectiv, sondern in der Entfernung $b' = b_1 \pm z$. Und der Abstand g' der Ebene, nach welcher hin die aus dem Objectiv tretenden Strahlenbündel convergiren, hinter dem Collectiv berechnet sich nach der Formel

$$\frac{1}{3f} = -\frac{1}{g'} + \frac{1}{b'} \text{ zu } g' = \frac{3fb'}{3f-b'}.$$

Der vom Schnittpunkt der Fäden ausgegangene und nach dem um s seitlich von der Absehlinie befindlichen Auge gelangende Mittelstrahl schneidet das Augenglas in der Entfernung s_1, das reelle Bild des Gegenstands in der Entfernung σ und die Convergenzebene der aus dem Objectiv getretenen Strahlenbündel im Abstande σ' von der Absehlinie. Der Anblick einer leicht anzufertigenden Zeichnung liefert

$$\sigma:\sigma' = g':b', \quad \sigma':s_1 = z:\frac{f(d-e)}{f+d-e}, \quad s_1:s = d-e:d$$

und die Linearparallaxe bei Campani-Ocular

$$\Delta_C = \sigma.\frac{G}{B} = \sigma.\frac{G-F}{F}.$$

Mit Benützung der Werthe von $g':b'$, b' und b_1 ergiebt sich hieraus

$$\Delta_C = \frac{sz}{d}.\frac{f+d-e}{f}.\frac{G-F}{F}.\frac{3}{\frac{f+2(d-e)}{f+d-e} \mp \frac{z}{f}},$$

und also für unendlich weitsichtiges Auge

$$\Delta_C = \frac{sz}{Ff}.(G-F)\frac{3}{2\mp\frac{z}{f}} \quad (\text{für } d = \infty).$$

Wie bei einfachem und bei Ramsden-Ocular ist auch bei Campani-Ocular die Parallaxe

1. proportinal der Seitlichkeit (s) des Auges,

2. aber nicht mehr, wie bei jenem Oculare, auch genau proportional der Einstellungsungenauigkeit z,

indem diese in der Formel nochmals auftritt und sogar je nach ihrem Vorzeichen die Grösse der Parallaxe (ein wenig) beeinflusst; — sie wird etwas grösser, wenn das Ocular zu weit eingeschoben ist, als wenn es gleich viel zu weit herausgezogen ist.

Die bei dem Campani-Ocular zu befürchtende Parallaxe wird **kleiner:**

3. wenn die Objectivbrennweite (F) grösser wird;
4. wenn die Ocularbrennweite (f) grösser wird (die allgemeine Untersuchung hierauf ist recht umständlich);
5. wenn der Augenabstand e grösser wird;
6. wenn die Sehweite (d) grösser wird. Die Parallaxe wird bei unendlich grosser Sehweite am allerkleinsten.

Das Verhältniss der Parallaxe bei Anwendung von Campani-Ocular und von einfachem, dessen Brennweite gleich der des Augenglases von jenem ist, berechnet sich unter den früher genannten Bedingungen allgemein:

$$\frac{\varDelta_C}{\varDelta_K} = \frac{3}{\frac{f+2(d-e)}{f+d-e} \mp \frac{z}{f}},$$

und für unendlich weitsichtiges Auge:

$$\frac{3}{2 \mp \frac{z}{f}} \quad (\text{für } d = \infty),$$

also sehr nahezu anderthalb.

Das Verhältniss der Parallaxe von Campani- und Ramsden-Ocular mit gleicher Brennweite f des Augenglases ist, unter den öfter genannten Bedingungen, nahezu, nämlich wenn $\mp \frac{z}{f}$ vernachlässigt wird gegen $\frac{f+2(d-e)}{f+d-e}$,

$$\frac{\varDelta_C}{\varDelta_R} = \tfrac{27}{5}\left(\frac{f+d-e}{f+2(d-e)}\right)^2 \quad (\text{annähernd}),$$

und für unendlich weitsichtiges Auge ist es

$$\tfrac{27}{20} \quad (\text{annähernd}) \quad (\text{für } d = \infty).$$

Es soll nun das Verhältniss der Parallaxen gleich stark vergrössernder Fernrohre mit den verschiedenen Ocularen unter Voraussetzung gleicher Objective, gleicher Gegenstandsweite, ferner gleicher Einstellungsungenauigkeit z, gleicher Augenseitlichkeit s und gleichen Augenabstands e berechnet werden. Damit die Vergrösserungen gleich sind, müssen die Brennweiten der Augengläser sich sehr nahezu verhalten:

$$f \quad : \frac{10f(d-e)}{4f+9(d-e)} : \frac{2f(d-e)}{2f+3(d-e)}$$
(Kepler) (Ramsden) (Campani)

und für unendlich weitsichtiges Auge ($d=\infty$):

$$f : \tfrac{10}{9}f : \tfrac{2}{3}f.$$

Die Einsetzung der genauen Brennweiteverhältnisse ist äusserst unbequem und es genüge daher, auch für endliche Sehweite das letztgenannte, noch genügend angenäherte Verhältniss $1 : \frac{10}{9} : \frac{2}{3}$. Wird durch einen Accent am Index angedeutet, dass gleiche Vergrösserungen gemeint sind, so erhält man durch Einsetzen nach einigen Zusammenziehungen:

$$\Delta_{K'} = \frac{sz}{d} \cdot \frac{f+d-e}{f} \cdot \frac{G-F}{F},$$

$$\Delta_{R'} = \frac{sz}{d} \cdot \tfrac{1}{9}\, \frac{5f+9(d-e)}{f} \cdot \frac{G-F}{F},$$

$$\Delta_{C'} = \frac{sz}{d} \cdot \tfrac{3}{2}\, \frac{2f+3(d-e)}{f} \cdot \frac{G-F}{F} \cdot \frac{2f+3(d-e)}{2f+6(d-e) \mp 3z \mp \frac{9}{2}z\,\frac{d-e}{f}},$$

und für unendliche Sehweite

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{K'} &= \frac{sz}{Ff} \cdot (G-F) \\ \Delta_{R'} &= \frac{sz}{Ff} \cdot (G-F) \\ \Delta_{C'} &= \frac{sz}{Ff} \cdot (G-F)\, \frac{9f}{4f \mp 3z} \end{aligned}\right\} \text{(für } d=\infty).$$

Für unendlich weitsichtiges Auge ist also die Parallaxe von gleichstark vergrösserndem Kepler- und Ramsden-Fernrohr, unter den angegebenen Bedingungen, gleich, hingegen die des Campani-Fernrohrs viel grösser, nahezu $\frac{9}{4}$mal so gross, genauer:

$$\frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{K'}} = \frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{R'}} = \frac{9f}{4f \mp 3z} \quad \text{(für } d=\infty).$$

Für endlich grosse Sehweite werden die Verhältnisse der Parallaxen nur schwerfällig ausdrückbar:

$$\frac{\Delta_{R'}}{\Delta_{K'}} = \tfrac{1}{9}\, \frac{5f+9(d-e)}{f+d-e},$$

$$\frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{K'}} = \tfrac{3}{2}\, \frac{[2f+3(d-e)]^2}{[f+d-e]\left[2f+6(d-e) \mp 3z \mp \frac{9}{2}z\,\frac{d-e}{f}\right]},$$

$$\frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{R'}} = \tfrac{27}{2}\, \frac{[2f+3(d-e)]^2}{[5f+9(d-e)]\left[2f+6(d-e) \mp 3z \mp \frac{9}{2}z\,\frac{d-e}{f}\right]}.$$

Selbst wenn man die kleine Grösse $\mp \frac{3}{4} \frac{z}{f}$ gegen $\frac{f+3(d-e)}{2f+3(d-e)}$ vernachlässigt, werden die das Campani-Fernrohr angehenden Ausdrücke noch wenig übersichtlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{K'}} &= \frac{3}{4} \frac{[2f+3(d-e)]^2}{[f+3(d-e)][f+d-e]} \\ \frac{\Delta_{C'}}{\Delta_{R'}} &= \frac{27}{4} \frac{[2f+3(d-e)]^2}{[f+3(d-e)][5f+9(d-e)]} \end{aligned}\right\} \text{(annähernd).}$$

Sehr leicht lässt sich überblicken, dass die bei Campani-Fernrohr zu befürchtende Parallaxe, unter sonst gleichen Verhältnissen, namentlich Voraussetzung gleicher Einstellungsungenauigkeit z, sehr viel grösser ist als bei Ramsden- oder Kepler-Fernrohr. Da nun aber, wie gefunden, der Einstellungsspielraum bei Campani-Ocular grösser ist als bei den anderen, also auch der wahrscheinliche Einstellungsfehler z grösser ausfällt, so wird um so mehr noch der bei Campani-Fernrohr zu befürchtende Parallaxenfehler am grössten.

Gleichwohl findet man das Campani-Ocular bei Beobachtungsfernröhren (wenigstens bei solchen, die zu irdischen Messungen dienen) und auch bei Mikroskopen am häufigsten angebracht. Dass diese Vorliebe eine gänzlich ungerechtfertigte ist, auch die gewöhnlich dafür angegebenen Gründe nicht stichhaltig sind, soll des Weiteren in einer besondern Abhandlung nachgewiesen werden.

So weit mir bekannt, haben die Beobachter (ausgenommen vielleicht solche mit hohem Grade von Kurzsichtigkeit) die Gewohnheit, die Brille abzunehmen, wenn sie durch das Fernrohr sehen, während aus vorstehenden Untersuchungen entschiedene Vortheile des Gebrauchs einer starken Zerstreuungsbrille für alle Beobachter hervorgehen. Der störenden Reflexion von Licht, welches von rückwärts, an den Schläfen und der Stirn des Beobachters vorüber, auf die Brille fällt, kann man leicht abhelfen. Gerade bei dem so häufig vorkommenden Campani-Ocular ist der Gebrauch der das Auge auf unendliche Entfernung anpassenden Brille am allernützlichsten, wie aus den allgemeinen Formeln geschlossen, bequemer aber noch aus nachfolgenden ausgerechneten Beispielen ersehen werden kann.

Es sind die Parallaxen für ein schwächeres und für ein stärker vergrösserndes Fernrohr gerechnet worden, in allen Fällen die Seitlichkeit des Auges von der mässigen Grösse $s = 1$ mm angenommen. Die Einstellungsungenauigkeiten sind bei den schwächeren Fernrohren etwas grösser als bei den stärker vergrössernden angenommen, und zwar ungleich für Kepler-, Ramsden- und Campani-Ocular, unter Berücksichtigung der verschiedenen Grösse des Einstellungsspielraumes. Für die schwächeren Fernrohre (ungefähre Vergrösserung 15) ist, wie bei dem Nivelliren noch vorkommt, die Gegenstandsweite zu 60 m, für die

stärkeren Fernrohre hingegen eine Gegenstandsweite von 250 m, die bei Distanzmessen mit solchen (etwa 35 mal vergrössernden) Fernrohren oft vorkommt.

Zahlenbeispiele für die linearen Parallaxen.

I. $F = 30$, $f = 2$, $e = 1$, $s = 0{,}1$, $G = 6000$ cm.

Kepler: $z = 0{,}05$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_K = 5{,}23$ mm, $\Delta_{K'} = 5{,}23$ mm;
$d = \infty$, $\Delta_K = 4{,}98$ „ $\Delta_{K'} = 4{,}98$ „

Ramsden: $z = 0{,}06$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_R = 6{,}41$ mm, $\Delta_{R'} = 6{,}00$ mm;
$d = \infty$, $\Delta_R = 6{,}41$ „ $\Delta_{R'} = 5{,}98$ „

Campani: $z = 0{,}07$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_C = 11{,}31$ oder $11{,}74$ mm, $\Delta_{C'} = 16{,}03$ oder $17{,}03$ mm;
$d = \infty$, $\Delta_C = 10{,}27$ „ $10{,}63$ „ $\Delta_{C'} = 15{,}27$ „ $16{,}10$ „

II. $F = 35$, $f = 1$, $e = 0{,}5$, $s = 0{,}01$, $G = 25000$ cm.

Kepler: $z = 0{,}033\ldots$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_K = 24{,}37$ mm, $\Delta_{K'} = 24{,}37$ mm;
$d = \infty$, $\Delta_K = 23{,}78$ „ $\Delta_{K'} = 23{,}78$ „

Ramsden: $z = 0{,}04$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_R = 31{,}70$ mm, $\Delta_{R'} = 29{,}55$ mm,
$d = \infty$, $\Delta_R = 31{,}70$ „ $\Delta_{R'} = 28{,}53$ „

Campani: $z = 0{,}05$ cm;

$d = 20$ cm, $\Delta_C = 54{,}21$ oder $57{,}68$ mm, $\Delta_{C'} = 79{,}25$ oder $85{,}53$ mm;
$d = \infty$, $\Delta_C = 52{,}19$ „ $54{,}87$ „ $\Delta_{C'} = 77{,}61$ „ $83{,}37$ „

IX.

Das Problem der kürzesten Dämmerung.

Von

Dr. Stoll

in Bensheim a. d. Bergstr.

Diese zuerst von Nuñez in seinem Werke De crepusculis gestellte Aufgabe wurde zum ersten Male nach jahrelangem Suchen von Joh. Bernoulli (Opera I, 64) gelöst (vergl. Wolf, Handb. d. Math. II, 178). Sowohl er, als auch andere hervorragende Mathematiker erhielten die Lösung nur durch Vermittelung einer schwer discutirbaren Gleichung des vierten Grades, deren Wurzeln eigentlich zwei von einander verschiedenen Aufgaben angehörten, die in der Beziehung von relativen Maximis und Minimis standen, ohne dass diese Beziehung von ihnen erkannt worden wäre. Der Erste, welcher von den beiden correspondirenden Aufgaben wenigstens die eine in befriedigender Weise löste, war nach Wolf a. a. O. der verstorbene Kopenhagener Astronom d'Arrest (Astron. Nachr. 1085 von 1857); derselbe hat übrigens das bei seiner Lösung auftretende Maximum nicht berücksichtigt. Die folgende Darstellung scheint mir den Vorzug zu besitzen, eine in den angedeuteten Beziehungen erschöpfende und allgemeine zu sein; ausserdem beschränkt sie sich auf elementare Hilfsmittel, insofern sie blos die Kenntniss der sphärischen Trigonometrie, nicht aber die der Differentialrechnung voraussetzt, und bietet deshalb einen geeigneten Uebungsstoff für Schüler höherer Lehranstalten. Wir stellen uns demgemäss folgende zwei Aufgaben, von deren zweiter das sogenannte Problem der kürzesten Dämmerung ein specieller Fall ist:

I. Unter welcher Polhöhe kommt ein Stern, dessen Declination d gegeben ist, am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten gegebenen Almucantarat h_2?

II. Wie gross muss die Declination eines Sternes sein, damit derselbe an einem Orte von gegebener Polhöhe φ am schnellsten von einem gegebenen Almucantarat h_1 zu einem zweiten gegebenen Almucantarat h_2 gelange?

Wir nennen die Azimute des Sternes, wenn er die Höhen h_1 und h_2 hat, bezüglich α_1 und α_2, ferner die zu h_1 und h_2 gehörigen Stundenwinkel bezüglich t_1 und t_2; ausserdem setzen wir voraus, der Stern sei im Sinken begriffen, also $h_1 > h_2$ und $t_2 > t_1$. Dann gelten für das Dreieck Zenith, Pol, Stern folgende drei Gleichungspaare:

$$1)\quad \begin{cases} \cos h_1 \sin\alpha_1 = \cos d \sin t_1, \\ \cos h_2 \sin\alpha_2 = \cos d \sin t_2; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \sin h_1 - \sin\varphi \sin d = \cos\varphi \cos d \cos t_1, \\ \sin h_2 - \sin\varphi \sin d = \cos\varphi \cos d \cos t_2; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \cos h_1 \cos\alpha_1 \cos\varphi = \sin h_1 \sin\varphi - \sin d, \\ \cos h_2 \cos\alpha_2 \cos\varphi = \sin h_2 \sin\varphi - \sin d. \end{cases}$$

Durch Multiplication der Gleichungen eines jeden Paares miteinander erhält man:

$$\cos h_1 \cos h_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \cos^2 d \sin t_1 \sin t_2,$$

$$(\sin h_1 - \sin\varphi \sin d)(\sin h_2 - \sin\varphi \sin d) = \cos^2\varphi \cos^2 d \cos t_1 \cos t_2,$$

$$\cos h_1 \cos h_2 \cos^2\varphi \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = (\sin h_1 \sin\varphi - \sin d)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin d).$$

Nachdem man die erste dieser drei Gleichungen mit $\cos^2\varphi$ multiplicirt hat, addire man sie zu der Summe der beiden letzten und ziehe sie davon ab; dadurch bekommt man zwei neue Gleichungen, die wir der Kürze halber in eine einzige zusammengezogen haben:

$$\cos^2\varphi \cos h_1 \cos h_2 \cos(\alpha_1 \mp \alpha_2) + (\sin h_1 - \sin\varphi \sin d)(\sin h_2 - \sin\varphi \sin d)$$
$$= \cos^2\varphi \cos^2 d \cos(t_2 \mp t_1) + (\sin h_1 \sin\varphi - \sin d)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin d).$$

Dadurch, dass man die Klammergrössen ausmultiplicirt, reducirt und das Resultat durch $\cos^2\varphi$ dividirt, kommt folgende Doppelgleichung zum Vorschein:

$$\cos^2 d \cos(t_2 \mp t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \cos(\alpha_1 \mp \alpha_2) + \sin h_1 \sin h_2 - \sin^2 d$$

oder, wenn man die Functionen der Winkeldifferenzen und Winkelsummen durch Functionen der halben Differenzen und Summen ersetzt und dann die Doppelgleichung wieder getrennt schreibt:

$$4)\quad \cos^2 d \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2),$$

$$5)\quad \cos^2 d \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 + t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2).$$

Nun giebt die Subtraction der Gleichungen 2):

$$\cos\varphi \cos d(\cos t_1 - \cos t_2) = \sin h_1 - \sin h_2$$

oder

$$\cos\varphi \cos d \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) \sin \tfrac{1}{2}(t_2 + t_1) = \sin \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2);$$

aus der Zusammenstellung des Quadrats dieser Gleichung mit Gleichung 5) lässt sich sofort erkennen, dass

$$6)\quad \cos^2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos^2 \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2)}.$$

Die Gleichungen 4) und 6) enthalten die Lösungen der beiden oben gestellten Aufgaben. In der That ersieht man aus Gleichung 4), die

wir zuerst betrachten wollen, dass für ein **constantes** d ein **Minimum** von $(t_2 - t_1)$ stattfindet, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$; der Minimalwerth von $(t_2 - t_1)$ ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$7)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\cos d},$$

welche uns noch eine weitere Bedingung für die Möglichkeit eines Minimums kennen lehrt, dass nämlich $\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) < 90^0 - d$ sein muss. Um die Polhöhe zu finden, bei welcher das Minimum eintritt, setze man in dem Gleichungspaare 3) $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ und dividire dann die eine Gleichung durch die andere; so erhält man:

$$\frac{\cos h_1}{\cos h_2} = \frac{\sin h_1 \sin\varphi - \sin d}{\sin h_2 \sin\varphi - \sin d}$$

oder, wenn man entwickelt und ordnet:

$$\sin d(\cos h_2 - \cos h_1) = \sin\varphi \sin(h_1 - h_2).$$

Dies giebt nach einer leichten Umformung:

$$8)\qquad \sin\varphi = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2)} \sin d.$$

Das Azimut, welches der Stern hat, wenn er in jedes der beiden Almucantarate eintritt, findet man durch Subtraction der Gleichungen 3) von einander, nachdem man in ihnen $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ gesetzt hat; denn dieses Verfahren liefert zunächst:

$$(\cos h_1 - \cos h_2)\cos\varphi\cos\alpha = (\sin h_1 - \sin h_2)\sin\varphi,$$

woraus

$$9)\qquad \cos\alpha = -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\operatorname{tg}\varphi$$

folgt, wobei vorausgesetzt wird, dass man den aus Gl. 8) sich ergebenden Werth von φ substituire. Führt man diese Substitution aus, so hat man:

$$9a)\qquad \cos\alpha = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\sin d}{\sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) - \sin^2\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\sin^2 d}}.$$

Die Gleichung 4) zeigt ferner, dass ein **Maximum** von $(t_2 - t_1)$ eintritt, wenn $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_1$, eine Bedingung, die nur erfüllt gedacht werden kann, wenn wir unter $(t_2 - t_1)$ die Zeit verstehen, welche der Stern braucht, um vom ersten Almucantarat bis zu seinem zweiten Durchgange durch das zweite Almucantarat zu gelangen. Den Maximalwerth selber findet man durch die Gleichung:

$$\cos^2 d \sin^2\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \cos h_1 \cos h_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2).$$

Die rechte Seite lässt sich umformen, indem man $\sin^2\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(h_1 - h_2)$ setzt und $\cos(h_1 - h_2)$ entwickelt; sie erhält dann die Form $\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(h_1 + h_2)$ oder $\cos^2\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)$, so dass

$$10)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos d}$$

wird. Soll das Maximum wirklich möglich sein, so muss noch die Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1+h_2)>d$ erfüllt sein, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Die Polhöhe, unter welcher dieses Maximum eintritt, ergiebt sich durch Division der Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ gesetzt hat; es kommt nämlich vorerst:

$$\sin d\,(\cos h_1 + \cos h_2) = \sin\varphi\,\sin(h_1+h_2)$$

und dann nach leichter Umformung

$$11)\qquad \sin\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(h_1-h_2)}{\sin\frac{1}{2}(h_1+h_2)}\cdot\sin d.$$

Die Subtraction der Gleichungen 3) liefert in diesem Falle, wenn man in ihnen $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$ setzt und dann wie oben verfährt:

$$12)\qquad \left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \mp\, tg\tfrac{1}{2}(h_1-h_2)\, tg\,\varphi$$

oder, wenn man den Werth von φ aus 11) substituirt:

$$12\,a)\qquad \left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \mp\frac{\sin\frac{1}{2}(h_1-h_2)\sin d}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)-\cos^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)\sin^2 d}}.$$

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung der zweiten oben gestellten Aufgabe, wozu die Gleichung 6) die nöthigen Dienste leistet. Aus ihr findet man für ein constantes φ als Bedingung des Minimums: $\alpha_1+\alpha_2=180^0$, d. h.: die Höhenkreise, in denen sich der Stern bei seinem Durchgange durch das erste und zweite Almucantarat befindet, müssen gleichweit südlich und nördlich vom ersten Vertikal entfernt sein.

Bei Erfüllung der gestellten Bedingung geht die Gleichung 6) über in:

$$\cos^2\varphi\,\sin^2\tfrac{1}{2}(t_2-t_1) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)\cos^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{\cos h_1\,\cos h_2 + \sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)};$$

der Nenner der rechten Seite verwandelt sich, wenn man statt $\sin^2\frac{1}{2}(h_1-h_2)$ den Werth $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(h_1-h_2)$ setzt, in $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(h_1+h_2)$ oder $\cos^2\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ und man erhält daher für die Minimalzeit die Gleichung:

$$13)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(t_2-t_1) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h_1-h_2)}{\cos\varphi},$$

aus welcher ersichtlich ist, dass für die Möglichkeit eines Minimums noch die Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1-h_2)<90^0-\varphi$ bestehen muss. Setzt man in den Gleichungen 3) $\cos\alpha_2=-\cos\alpha_1$ und dividirt, so ergiebt sich in der nämlichen Weise, wie oben bei dem Maximum in der ersten Aufgabe, für die Declination, bei welcher das Minimum stattfindet, die Gleichung:

$$14)\qquad \sin d = \frac{\sin\frac{1}{2}(h_1+h_2)}{\cos\frac{1}{2}(h_1-h_2)}\sin\varphi.$$

Um die Azimute des Sternes im ersten und zweiten Almucantarat zu finden, subtrahire man die Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos\alpha_2=-\cos\alpha_1$ gesetzt hat, wodurch zunächst

$$(\cos h_1 + \cos h_2) \cos\varphi \cos\alpha = (\sin h_1 - \sin h_2) \sin\varphi$$

und nach leichter Transformation

$$15)\qquad \left.\begin{matrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\end{matrix}\right\} = \pm\, tg\tfrac{1}{2}(h_1 - h_2)\, tg\varphi$$

erhalten wird.

Für das Maximum endlich giebt unter der Voraussetzung, dass die Breite gegeben ist, die Gleichung 6) die Bedingung $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, die, wie bei der ersten Aufgabe, nur erfüllt gedacht werden kann, wenn man unter $(t_2 - t_1)$ die Zeit versteht, welche der Stern braucht, um vom ersten Almucantarat bis zum zweiten Durchgang durch das zweite Almucantarat zu gelangen. Dann erhält man sofort für die Maximalzeit:

$$16)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos\varphi}$$

mit der Nebenbedingung $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) > \varphi$, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Zur Bestimmung der Declination für das Maximum bekommt man durch Division der Gleichungen 3), nachdem man in ihnen $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ gesetzt hat, in der nämlichen Weise, wie oben bei dem Minimum in der ersten Aufgabe, die Gleichung:

$$17)\qquad \sin d = \frac{\cos\frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\sin\frac{1}{2}(h_1 + h_2)} \sin\varphi.$$

Die Subtraction der Gleichungen 3) endlich, nachdem man in ihnen $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ gesetzt hat, giebt in ähnlicher Weise, wie bei dem Minimum in der ersten Aufgabe für die Azimute beim Eintritt in das erste und zweite Almucantarat:

$$18)\qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = -\,cotg\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\, tg\varphi.$$

Als Anwendung der erhaltenen Formeln wollen wir $h_1 = 0$ und $h_2 = -18^0$ setzen, wie es bei der Untersuchung der kürzesten Dämmerungszeit nothwendig ist. Man hat dann zur Beantwortung der Frage, unter welcher Polhöhe bei gegebener Declination der Sonne die kürzeste Dämmerung stattfinde, aus Gleichung 8:

$$\sin\varphi = -\,tg\,9^0 \sin d.$$

Dabei muss $\alpha_1 = \alpha_2$ sein; die Nebenbedingung $d < 81^0$ fällt weg, weil sie sich von selbst erfüllt, indem die Declination der Sonne $23\frac{1}{2}^0$ nicht übersteigen kann. Ferner ist

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = cotg\,9^0\, tg\varphi,\ \text{bezüglich} = \frac{\cos 9^0 \sin d}{\sqrt{\cos^2 9^0 - \sin^2 9^0 \sin^2 d}}$$

und die kürzeste Dämmerungszeit selbst wird durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos d}$$

gefunden.

Ein Maximum der Dämmerungszeit giebt es nicht, weil das oben für den allgemeinen Fall gefundene Maximum die ganze eigentliche Nacht in sich begreifen würde; wenn man aber nach dem Maximum der Zeit fragt, welche die Sonne braucht, um vom Horizont bis zu ihrem zweiten Durchgange durch das Almucantarat -18^0 zu gelangen, so giebt die Gleichung

$$\sin \varphi = - \cot g\, 9^0 \sin d$$

darauf die Antwort. Die dabei zu erfüllenden Bedingungen sind $\alpha_2 = 180^0 + \alpha_1$ und $d < 9^0$, und die Azimute, welche die Sonne beim Untergang und beim zweiten Durchgang durch das Almucantarat -18^0 besitzt, sind gegeben durch die Gleichung

$$\left.\begin{matrix}\cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2\end{matrix}\right\} = \pm\, tg\, 9^0\, tg\, \varphi, \text{ bezüglich } = \pm \frac{\sin 9^0 \sin d}{\sqrt{\sin^2 9^0 - \cos^2 9^0 \sin^2 d}}.$$

Soll die Frage beantwortet werden, bei welcher Declination der Sonne an einem Orte von gegebener Polhöhe die kürzeste Dämmerung stattfinde, so thut dies die aus Gleichung 14) folgende Gleichung:

$$\sin d = - tg\, 9^0 \sin \varphi.$$

Die zu erfüllenden Bedingungen sind erstens $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0$, was oben erklärt ist, und zweitens $\varphi < 81^0$. Die Minimalzeit selbst findet man durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos \varphi},$$

und die Azimute, in denen die Sonne den Horizont und das Almucantarat -18^0 zum ersten Male schneidet, durch die Gleichung

$$\left.\begin{matrix}\cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2\end{matrix}\right\} = \pm\, tg\, 9^0\, tg\, \varphi.$$

Ein eigentliches Maximum der Dämmerung kann aus dem oben angeführten Grunde auch hier nicht stattfinden; wohl aber giebt es ein Maximum der Zeit, welche die Sonne von ihrem Untergange an bis zu ihrem zweiten Durchgange durch das Almucantarat -18^0 braucht; dies findet statt bei der durch die Gleichung

$$\sin d = - \cot g\, 9^0 \sin \varphi$$

bestimmten Declination, wobei die Bedingungen gelten $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ und $\varphi < 9^0$, wenigstens dem absoluten Werthe nach. Die Maximalzeit lernt man kennen durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\cos 9^0}{\cos \varphi},$$

und die Azimute, in welchen die Sonne den Horizont erreicht und zum zweiten Male das Almucantarat -18^0 schneidet, durch die Gleichung

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cotg 9^0 \, tg\,\varphi.$$

Eine weitere Anwendung lassen unsere Formeln zu, wenn man nach derjenigen Stellung eines Sternes fragt, wo er am schnellsten seine Höhe ändert. Setzt man nämlich in Gleichung 14) $h_2 = h_1$, so erhält man für die Declination des Sternes bei gegebener Höhe und Polhöhe $\sin d = \sin h_1 \sin\varphi$, und, wenn man diesen Werth in die erste der Gleichungen 3) substituirt, $\cos\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_1 = 90^0$, d. h.: der Stern muss im ersten Vertikal stehen. Die Gleichung 13) kann man auch schreiben

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_2 - t_1)} = \cos\varphi,$$

und da für $h_2 = h_1$ auch $t_2 = t_1$ wird, so drückt die linke Seite die Geschwindigkeit des Sinkens aus, wenn der Stern im ersten Vertikal steht; dieselbe ist, wie man sieht, dem Cosinus der Polhöhe proportional. Aus der Formel $\sin d = \sin h_1 \sin\varphi$ geht zugleich noch hervor, dass die Declination des Sternes den Werth φ nicht überschreiten und auch nicht negativ sein darf, weil im ersten Falle $\sin h_1$ grösser als die Einheit sein müsste und im zweiten Falle der Stern erst unter dem Horizont den ersten Vertikal erreichte.

X.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. BIEHRINGER,

Prof. a. d. k. Industrieschule in Nürnberg.

(Schluss.)

Nr. 28. Als letzte allgemeine Aufgabe soll noch die vorgenommen werden, bei welcher eine Curve zu bestimmen ist, nach der ein vom Ursprung ausgehender Radius vector, welcher sich auf eine gegebene Art längs einer bestimmten Curve fortbewegt, die mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um ihre Rotationsaxe sich drehende Rotationsfläche schneidet. Es sei durch $x''=x''_t$, $y''=y''_t$, $z''=z''_t$ die gegebene Curve und zugleich die Bewegung des Radius vectors, durch $-\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsfläche bestimmt.

Um die Gleichungen der gesuchten Curve zu finden, kann man zunächst die Rotationsfläche feststehen lassen und nachsehen, nach welcher Curve sie von dem an der gegebenen Curve fortgleitenden Radius vector geschnitten wird. Bezeichnet man mit x', y', z' die Coordinaten dieser Curve, so sind die Gleichungen derselben:

$$x'^2+y'^2=f^2,\quad x'z''_t-z'x''_t=0,\quad y'z''_t-z'y''_t=0.$$

Wird nun auf dieser feststehenden Curve entsprechend dem ursprünglichen Radius vector ein Punkt fortbewegt, während sich die Rotationsfläche mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit dreht, so beschreibt dieser Punkt auf der Rotationsfläche die verlangte Linie. Die Aufgabe fällt demnach von da an mit der Aufgabe der Nr. 15 zusammen und man erhält die Gleichungen der verlangten Linie, wenn man aus den obigen Gleichungen x', y', z' bestimmt und die gefundenen Werthe in die entsprechenden Gleichungen der Nr. 15 einsetzt.

Ohne übrigens das x', y', z' der erwähnten Curve bestimmen zu müssen, können die Gleichungen der gesuchten Linie unmittelbar angeschrieben werden, sobald berücksichtigt wird, dass die Punkte der gegebenen und der oben bezeichneten Linie, welche zu gleichen t-Werthen gehören, auf einem gemeinschaftlichen Radius vector liegen und dass also

$$arctang \frac{y'}{x'} = arctang \frac{y''}{x''} \text{ und } \frac{z'^2}{f'^2} = \frac{z''^2}{x''^2 + y''^2} \text{ ist.}$$

ist. Die Gleichungen der gesuchten Curve werden sonach:

$$x = f \cos\left[\int \omega\, dt + arctang \frac{y''}{x''}\right], \quad y = f \sin\left[\int \omega\, dt + arctang \frac{y''}{x''}\right],$$

$$\frac{z^2}{f^2} = \frac{z''^2}{x''^2 + y''^2}.$$

Wird die letzte Gleichung nach z aufgelöst und noch berücksichtigt, dass $\varphi = \int \omega\, dt + arctang \frac{y''}{x''}$ und $\varrho = f_z$ ist, so können sämmtliche Betrachtungen von Nr. 3 an, welche sich auf diese Bestimmungsart der Curven auf Rotationsflächen stützen, hier in Anwendung gebracht werden. Gleiches gilt von den Bemerkungen in Nr. 16, wenn statt der Meridianebene oder statt der erzeugten windschiefen Fläche die Kegelfläche gesetzt wird, welche hier der Radius vector beschreibt.

Sollte in der obigen Aufgabe die gegebene Curve sich noch mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um die z-Axe drehen, so könnte dieser Fall dadurch auf den vorliegenden zurückgeführt werden, dass man die gegebene Curve feststehen lässt und der Rotationsfläche nicht nur ihre Winkelgeschwindigkeit, sondern auch die im entgegengesetzten Sinne genommene Winkelgeschwindigkeit der Curve beilegt oder diese Rollen zwischen der Curve und der Rotationsfläche vertauscht.

Ebenso ist der den Nrn. 13, 18, 20 entsprechende Fall, dass die Winkelgeschwindigkeit der jetzigen Leitcurve von der Geschwindigkeit p eines Punktes der Curve herrührt, welche der Punkt stets in der Richtung von Kreisen beizubehalten sucht, die senkrecht zur z-Axe sind und ihren Mittelpunkt in dieser Axe haben, sofort erledigt, wenn man $\frac{p}{\sqrt{x''^2 + y''^2}} - \omega$ statt ω setzt.

Am einfachsten gestalten sich die sämmtlichen obigen Resultate, wenn die Curve des den Radius vector führenden Punktes durch Polarcoordinaten r'', φ'' und β'', die Functionen von t vorstellen, gegeben ist. r'' und φ'' haben die bekannte Bedeutung, β'' sei der Winkel des Radius vectors mit der xy-Ebene. Hier wird

$$\varphi = \int \omega\, dt + \varphi''_t, \quad \beta = \beta''_t, \quad \varrho = r \cos \beta'' = f_{r \sin \beta''}.$$

Wollte man die Bestimmungsart der Nr. 3 anwenden, so hätte man statt der letzten beiden Gleichungen $z = f.\, tang\, \beta''_t$ und $\varrho = f_z$ einzuführen und die vorletzte Gleichung nach z aufzulösen.

Bleibt der sich bewegende Radius vector in einer Ebene und ist diese Bewegung und die Ebene auf dieselbe Art bestimmt, wie in Nr. 17, so gehen die letzten Gleichungen über in

1) $\varphi = \int \omega\, dt + \mu + arctang(tang\,\psi . \cos\theta)$,

2) $\sin\beta = \sin\psi . \sin\theta$,

3) $r\cos\beta = f_{r\,\sin\beta}$ oder $r\sqrt{1-\sin^2\psi\,\sin^2\theta} = f_{r\,\sin\psi . \sin\theta}$,

4) $z = f_z . \dfrac{\sin\psi . \sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\psi . \sin^2\theta}}$,

5) $\varrho = f_z$.

Wollte man das ψ aus den Gleichungen fortbringen und durch β ersetzen, so könnte man aus 2) ψ bestimmen und die erhaltenen Werthe in die anderen Gleichungen einsetzen. Aehnlich können die Resultate in Nr. 19 und 20 hierher übertragen werden.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass die zuletzt erhaltenen Gleichungen noch richtig bleiben, wenn μ und θ ebenfalls Functionen von t sind.

Projectionscurven des Sonnen- und des Mondmittelpunktes auf die Erdoberfläche.

Nr. 29. Als hierher gehöriges Beispiel soll zuerst die Bestimmung der Centralprojectionscurve des Sonnenmittelpunktes auf die Erde oder die der Curve des mittleren Punktes von dem Fluthberge vorgenommen werden, den die Sonne hervorzubringen sucht. Wir können zu dem Ende voraussetzen, dass die Erde eine feste Lage habe, und können die vorhandenen Bewegungen theils der Sonne, theils der Ekliptik übertragen. Unsere z-Axe falle mit der Erdaxe zusammen und die $+z$-Axe gehe durch den Nordpol, die xy-Ebene enthalte den Aequator und die $+X$-Axe den Punkt, nach welchem der Meridian von Ferro den Aequator schneidet; die positive Drehrichtung oder die von OX nach OY gehe endlich nach Osten hin.

Der Sonne ist zunächst die entgegengesetzte Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, oder $-\omega = -\dfrac{2\pi}{24.60.60}$ beizulegen. Zu dieser Geschwindigkeit tritt noch die hinzu, welche durch das scheinbare Fortschreiten in der Ekliptik verursacht wird. Um diese Bewegung zu fixiren, sei μ der Winkel des Radius vectors des Frühlingspunktes mit der $+X$-Axe, θ die Schiefe der Ekliptik oder der Winkel, welchen bei der Culmination des Frühlingspunktes der nördliche Theil der Ekliptik mit dem nach Osten liegenden Theil des Aequators oder der xy-Ebene bildet, $-\nu$ der Winkel der Apsidenlinie oder genauer der Winkel des Radius vectors der Sonnennähe und ψ der Winkel des Radius vectors des Sonnenmittelpunktes überhaupt mit dem Radius vector des Frühlingspunktes. Die positive Winkelzählung von ν und ψ gehe in der Ekliptik bei der Culmination des Frühlingspunktes nach links oder nach Osten hin.

Es handelt sich nun zunächst um die Bestimmung des ψ als Function von t. Zu dem Ende berücksichtigen wir, dass, wenn bei Polarcoordinaten der Pol in einem Brennpunkte der Ellipse liegt und die Polaraxe durch den Scheitel geht, der dem Pol am nächsten liegt, für den Flächeninhalt eines Sectors der Ellipse erhalten wird

$$F=\frac{1}{2}\int r^2\,dv=\frac{b^4}{2}\int\frac{dv}{(a+e\cos v)^2}=\frac{-eb^2}{2}\cdot\frac{\sin v}{a+e\cos v}+\frac{ab}{2}\operatorname{arctang}\frac{b\sin v}{e+a\cos v},$$

wo a und b die grosse und kleine Halbaxe, e die halbe lineare Excentricität vorstellen. Die Grenzen des Integrals sind, wenn der eine Schenkel des Sectors mit der Polaraxe zusammenfällt, Null und v. Durch diese Ellipse kann nun auch unsere Sonnenbahn vorgestellt werden, nur ist bei unseren getroffenen Bestimmungen $v=\nu+\psi$ zu setzen. Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz ist weiter $F=c.t$ oder, wenn τ die vollständige Umlaufszeit bezeichnet, $ab\pi=c.\tau$, daher $c=\frac{ab\pi}{\tau}$ und $F=\frac{ab\pi}{\tau}\cdot t$. Es folgt demnach unter der Voraussetzung, dass die Zeit t von dem Moment zu zählen angefangen wird, in welchem die Sonne ihre Erdnähe hat:

$$1)\qquad \frac{a\pi}{\tau}\cdot t=\frac{-eb}{2}\cdot\frac{\sin(\nu+\psi)}{a+e\cos(\nu+\psi)}+\frac{a}{2}\operatorname{arctang}\frac{b\sin(\nu+\psi)}{e+a\cos(\nu+\psi)}$$

oder die vorgelegte Gleichung zwischen ψ und t. Diese Gleichung ist nicht wohl nach ψ auflösbar. Die übrigen Gleichungen, welche zur Bestimmung der Curve nothwendig sind, werden nach Nr. 28

$$2)\qquad \varphi=-\omega t+\mu+\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\psi.\cos\theta),$$

$$3)\qquad \sin\beta=\sin\psi.\sin\theta,$$

$$4)\qquad z=f.\operatorname{tang}\beta,$$

$$5)\qquad \varrho=f_z.$$

Die vierte und fünfte Gleichung dienen nur dazu, um aus der geographischen Breite der Punkte zunächst das z und zu diesem z den Radius ϱ des Parallelkreises zu bestimmen. Wird der Werth von t aus 1) in 2) eingesetzt und dann mit Hilfe der dritten Gleichung das ψ fortgeschafft, so erhält man die Gleichung zwischen β und φ, d. h. zwischen der geographischen Breite und Länge der Punkte der Curve. Mit Berücksichtigung dessen, dass

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{\sin(\theta+\beta)\,\sin(\theta-\beta)}}{\sin\theta}$$

wird, ergiebt sich hierfür nach einigen Umformungen die Gleichung

$$6)\quad \varphi = -\frac{\omega\tau}{2a\pi}\Bigg(-be\cdot\frac{\sin\nu\sqrt{\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}+\cos\nu.\sin\beta}{a\sin\theta+e\left(\cos\nu\sqrt{\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}-\sin\nu.\sin\beta\right)}$$
$$+a.\operatorname{arctang}\frac{b\left(\sin\nu.\sqrt{\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}+\cos\nu.\sin\beta\right)}{e\sin\theta+a\left(\cos\nu\sqrt{\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}-\sin\nu.\sin\beta\right)}\Bigg)$$
$$+\mu+\operatorname{arctang}\frac{\sin\beta.\cos\theta}{\sqrt{\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich zu den β-Werthen unmittelbar das φ bestimmen. Es ist die Gleichung der Kegelfläche, deren Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve giebt.

Sollte die Zeit t berücksichtigt werden, so würde man wieder am besten von der geographischen Breite β ausgehen, aus der Gleichung 3) das zugehörige $\sin\psi$ und $\cos\psi$ wie oben bestimmen, hierzu aus 1) die t-Werthe finden (je nach dem ersten, zweiten etc. Umlauf wäre *arctang* um 2π, 4π etc. grösser anzunehmen) und diesen t-Werth zur Aufsuchung des φ verwenden.

Unsere Entwickelung behält für die Curve des Sonnenfluthberges ihre Giltigkeit auch dann noch, wenn die Erde nicht als Kugel aufgefasst wird, weil die Annahme gestattet ist, dass ihre Axe durch den Mittelpunkt der Anziehung geht, welche die Sonne auf die Erde ausübt. Weiter ist aus der Entwickelung ersichtlich, dass die Gleichungen 1) bis 5) richtig bleiben, wenn μ, θ, ν, e etc. sich ändern, oder wenn die Störungen, also der Rückgang der Aequinoctien, die Nutation der Erdaxe, die Aenderung der Schiefe der Ekliptik, der Lage der Apsidenlinie und der Excentricität berücksichtigt werden sollen. Die Gleichung 6) bestimmt hier nicht mehr die Kegelfläche, weil sie nicht von t frei ist, indem μ, θ und ν noch t enthalten. Man müsste hier, um die entsprechenden Gleichungen zu erhalten, statt μ, θ, ν, e und b die entsprechenden Functionen von t einsetzen und wieder aus 1), 2) und 3) das t und ψ eliminiren. ψ könnte wieder mit Hilfe der dritten Gleichung aus 1) und 2) fortgeschafft werden; hierauf wäre etwa aus 2) das t zu bestimmen und in 1) einzusetzen. Sehr einfach gestaltet sich die Sache, wenn nur der Rückgang des Frühlingspunktes berücksichtigt und für den betrachteten Zeitabschnitt der mittlere Werth gesetzt wird; hier kann man nämlich $\mu = m - pt$ annehmen, wo m und p constante Grössen sind und t den Rückgang in der Zeiteinheit bezeichnet, und es gilt sofort die Gleichung 6), wenn dort m für μ und $\omega + p$ für ν substituirt wird.

In Bezug auf die Form der Curve lassen sich unter der Voraussetzung, dass μ, ν und θ constant sind, folgende Schlüsse ziehen: Nicht blos aus der Natur der Verhältnisse, sondern auch aus der ersten Gleichung an und für sich folgt, dass ψ und t gleichmässig wachsen und zwar von $\psi = -\nu$ an, wo $t = 0$ ist. Aus Gleichung 3) ist ersichtlich, dass β positiv wird und auf der Nordseite liegt, so lange ψ zwischen 0 und π

bleibt, und negativ ist, also auf der Südseite liegt, wenn ψ in den dritten und vierten Quadranten rückt; ferner folgt aus ihr, dass der absolute Werth des β höchstens $=\theta$ wird, und zwar bei $\psi=90^0$ und 270^0, dass er $=0$ ist bei $\psi=0$ und $\psi=\pi$. Die Gleichung 3) ergiebt, weil $\omega > \partial(arctang(tang\,\psi . cos\,\theta))_t$, d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung der Erde grösser ist, als die auf den Aequator projicirte Winkelgeschwindigkeit der Sonne, dass der Werth von φ abnimmt, wenn t und ψ wachsen. Nach Verfluss je eines Sonnentages wird φ stets um 2π grösser. Die Curve legt sich demnach spiralförmig in der Richtung von Ost nach West um die Erde, so dass auf je einen Sonnentag ein Umlauf kommt; sie geht bei $\psi=0$ durch den Aequator — die Gleichung 1) giebt hier und in der Folge die zugehörigen t-Werth —, erreicht bei $\psi=90^0$ den grössten β-Werth oder θ und berührt dort den Wendekreis des Krebses; ihr β-Werth nimmt nun ab und wird bei $\psi=180^0$ Null; von da an kommt die Curve mit β auf die Südseite zu liegen, berührt endlich bei $\psi=270^0$ den Wendekreis des Steinbocks und nähert sich endlich bis $\psi=360^0$ wieder dem Aequator, um alsdann wieder den alten Lauf zu beginnen. Wäre die Umlaufszeit der Sonne eine ganze Anzahl von Sonnentagen, so würde die Curve nun in sich selbst zurücklaufen; wäre sie ausser der ganzen Zahl noch ein rationaler Bruch, so würde dies Zurückkehren erst nach soviel Umläufen der Sonne stattfinden, als der Nenner des Bruches angiebt. Bei dem wirklich vorhandenen irrationalen Verhältnisse der Umlaufszeit der Sonne und der Umdrehungszeit der Erde wird die Curve nie eine geschlossene.

Setzt man in die obigen Gleichungen 1) bis 6) $\psi+\pi$ statt ψ oder $-\beta$ statt β, und $\varphi+\pi$ statt φ, so erhält man die Gleichung des Fluthberges der Antipoden.

Wird in die Gleichung 3) $\beta'=\beta\pm arctang\frac{\varrho'}{r}=\beta\pm arctang\frac{\varrho(a+e\,cos(\psi+\nu))}{b^2}$ statt β eingesetzt, so gehen in Verbindung mit den anderen Gleichungen zwei neue Curven hervor, welche zu beiden Seiten der ersten Curve liegen und unter der Voraussetzung, dass ϱ den Radius der Sonne vorstellt und die Erde eine Kugel ist, die Theile der Erdoberfläche begrenzen, welche überhaupt noch einzelne Theile der Sonnenoberfläche im Zenith haben können.

Nr. 30. Ein weiteres Beispiel dieser Gattung sei die Bestimmung der Curve des Fluthberges des Mondes, oder der Projectionscurve seines Mittelpunktes auf die Erdoberfläche, und zwar zunächst unter der Voraussetzung, dass die Störungen der Mondbahn wegfallen. Die Lage des Coordinatensystems sei die der Nr. 29. Die Bewegung des Mondes bestimmen wir gegen die Ekliptik in ähnlicher Weise, wie es mit der Ekliptik gegen den Aequator geschehen ist. Demzufolge seien die Winkel der aufsteigenden Knotenlinie der Mondbahn 1. mit dem Radius vector

des Frühlingspunktes $=\mu'$, 2. mit der Apsidenlinie der Mondbahn, resp. mit dem Radius vector der Erdnähe $=\nu'$, 3. mit dem Radius vector des Mondmittelpunktes $=\psi'$. Das μ' werde von dem Radius vector des Frühlingspunktes an nach Osten genommen, desgleichen μ' und ψ' von dem aufsteigenden Knoten der Mondbahn an. Endlich sei der Winkel der Ebene der Mondbahn und der Ekliptik $=\theta'$ und werde + oder − genommen, je nachdem bei der Culmination des aufsteigenden Knoten der folgende Theil der Mondbahn nördlicher oder südlicher als die Ekliptik liegt.

Wir erhalten nun zunächst wieder für die Bewegung des Mondes in seiner Bahn auf dieselbe Weise wie in Nr. 29 die Gleichung

$$1)\quad \frac{a'\pi' t'}{\tau'} = \frac{-e'b'}{2}\cdot\frac{\sin(\psi'-\nu')}{a'+e'\cos(\psi'-\nu')} + \frac{a'}{2}\operatorname{arctang}\frac{b'\sin(\psi'-\nu')}{e'+a'\cos(\psi'-\nu')}.$$

Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist nach dem Früheren für sich klar. — Denken wir daran, die jetzigen Resultate mit den vorigen in eine gewisse Beziehung zu setzen, so ist es nothwendig, t in den beiden Fällen von demselben Moment an zu nehmen. Ist t irgend ein Zeitwerth vom Anfang der Nr. 29 gerechnet und t'' der Werth von demselben Zeitanfang an, bei welchem der Mond zuerst seine Erdnähe hat, oder $\psi'=\nu'$ wird, so ist in die letzte Gleichung $t'=t-t''$ zu setzen.

Es wird ferner die Länge des Mondes $l=\mu'+\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\psi'.\cos\theta')$ und seine Breite $b=\arcsin(\sin\psi'.\sin\theta')$. Hieraus finden sich Rectascension r und Declination β durch

$$\operatorname{tang} r = \frac{\cos\theta.\sin l - \operatorname{tang} b.\sin\theta}{\cos l} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \cos\theta.\sin b + \sin\theta.\cos b.\sin l$$

oder, wenn man die vorausbestimmten Werthe von l und b einsetzt und berücksichtigt, dass

$$\sin(\mu'+\nu) = \frac{\sin\mu'+\cos\mu'.\operatorname{tang}\nu}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\nu}},$$

$$\cos(\mu'+\nu) = \frac{\cos\mu'-\sin\mu'.\operatorname{tang}\nu}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\nu}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\psi'.\cos\theta'}} = \frac{\cos\psi'}{\sqrt{1-\sin^2\psi'.\sin^2\theta}} \quad \text{etc.:}$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\cos\theta.\sin\mu'+\operatorname{tang}\psi'(\cos\theta.\cos\mu'.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta')}{\cos\mu'-\sin\mu'.\operatorname{tang}\psi'.\cos\theta'}$$

und

$$\sin\beta = \cos\theta.\sin\psi'.\sin\theta'+\sin\theta(\sin\mu'.\cos\psi'+\cos\mu'.\sin\psi'.\cos\theta).$$

Die weiteren Gleichungen der gesuchten Curve sind demnach:

$$2)\quad \varphi = -\omega t+\mu+\operatorname{arctang}\frac{\cos\theta.\sin\mu'+\operatorname{tang}\psi'(\cos\theta.\cos\mu'.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta')}{\cos\mu'-\sin\mu'.\operatorname{tang}\psi'.\cos\theta'},$$

$$3)\quad \sin\beta = \cos\theta.\sin\psi'.\sin\theta'+\sin\theta(\sin\mu'.\cos\psi'+\cos\mu'.\sin\psi'.\cos\theta'),$$

$$4)\quad z = f.\operatorname{tang}\beta,$$

$$5)\quad \varrho = f_x.$$

Hier sind die Bemerkungen wieder statthaft, welche in Nr. 29 an die Gleichungen von 1) bis 5) geknüpft wurden. Es würde sich hier nur, weil die Gleichung 3) complicirter als in jener Nummer ist, das ψ' und daher auch die Gleichung der Kegelfläche nicht so leicht wie dort finden lassen; jedoch böte die Rechnung weiter keine besonderen Schwierigkeiten dar. Für $\theta'=0$, $\mu'=0$ und $\nu'=-\nu$, für welche Werthe auch $\psi'=\psi$ und $t'=t$ werden, gehen die jetzigen Gleichungen in die der Nr. 29 über.

Sollten die hier in Wirklichkeit vorhandenen Störungen berücksichtigt werden, so hätte man μ und θ den Aenderungen der Ekliptik entsprechend zu wählen, μ' und θ' den Aenderungen der Lage der Ebene der Mondbahn, ν' der Aenderung der Lage der Apsiden und e' der Aenderung der Excentricität der Mondbahn anzupassen. Weil diese Aenderungen sehr beträchtlich sind, so können sie bei eingehenderen Untersuchungen nicht vernachlässigt werden. Die erste Annäherung würde durch die Einführung der mittleren Bewegungswerthe, für welche $\mu'=m' -p't$, $\nu'=n'+q't$ etc. zu setzen sind, erzielt werden können. Umgekehrt können die Gleichungen der Nrn. 29 und 30, welche unter den ursprünglichen Voraussetzungen nur die Wirkung von zwei Himmelskörpern, nämlich von Erde und Sonne, oder Erde und Mond repräsentiren, benutzt werden, um bei Untersuchungen über den Einfluss oder die Störungen des dritten Körpers durch ihre Substitution die Rolle der von diesen Störungen abhängigen Functionen μ, μ', θ, θ' etc. mehr hervortreten zu lassen. Ein weiteres Eingehen auf diese Verhältnisse liegt ausser dem Bereich dieser Arbeit; es sollen hier nur noch einige Bemerkungen folgen, die sich entsprechend der Nr. 28 unter den ursprünglichen Voraussetzungen unmittelbar ergeben.

Zunächst ergiebt sich in Bezug auf die Form der Curve, dass für jede Stelle auf je zwei aufeinanderfolgende Culminationen des Mondes ein Umlauf der Curve um die Erde kommt, dass diese Schlingen einen nördlichen und südlichen Wendepunkt erhalten, der dem jeweiligen Winkel der Ebene der Mondbahn mit dem Aequator, oder dem Werthe von γ aus $\cos\gamma=\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta'.\sin\mu'$ entspricht, und dass endlich ein vollständiger Umlauf oder ein siderisches Monat so viele Schlingen enthält, als dieses Monat für einen der Wendepunkte Culminationsperioden des Mondes hat.

Die Substitution des $\psi'+\pi$ für ψ', oder die von $\varphi+\pi$ für π und $-\beta$ für β führt wieder auf die Gleichung des Fluthberges der Antipoden. Auch kann hier wieder $\beta \pm \operatorname{arctang}\frac{\varrho'}{r}$ für β gesetzt und können dadurch zu beiden Seiten der ursprünglichen Curve Streifen erhalten werden, welche unter der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde noch Punkte der Mondoberfläche im Zenith haben.

Vergleicht man die Resultate der Nrn. 29 und 30, so sieht man, dass, wenn für dasselbe t das φ in beiden Gleichungen 2) den gleichen Werth annimmt, oder, wenn sich diese Werthe um eine ganze Anzahl π unterscheiden, Neumond oder Vollmond herrscht, und zwar ersterer, wenn der Unterschied eine gerade, letzterer, wenn er eine ungerade Anzahl von π beträgt. Das φ und β bestimmen die Orte der Erdoberfläche, wo dies stattfindet, und t die dazu gehörige Zeit. Hier und in der Folge ist bei diesen Rechnungen stets zu berücksichtigen, dass *arctang* in den Gleichungen 1) und 2) für je einen halben weiteren Umlauf des bezüglichen Körpers um π grösser zu nehmen ist. Für entsprechende φ- und β-Werthe oder für $\psi'=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ etc. und $\psi=\mu'+h\pi$, wo h Null oder eine ganze Zahl ist, gehen beide Körper durch die Knoten des Mondes, vermehren sich also die beiden Fluthberge oder finden die Sonnen- oder Mondfinsternisse statt. Beträgt bei Nichtbeachtung des Werthes μ' der Unterschied von ψ' und ψ Null oder eine gerade Anzahl π, so tritt die Sonnenfinsterniss, beträgt er eine ungerade Anzahl π, die Mondfinsterniss ein. Das Einsetzen dieser π-Werthe in die Gleichungen 1), und die Berücksichtigung dessen, dass auch t das Gleiche ist, giebt eine Gleichung für diesen Moment, in welche durch *arctang* die zusammengehörigen Umlaufszahlen eintreten. Wird weiter beachtet, dass diese Werthe ganze Zahlen sein müssen, so lassen sich die zusammengehörigen Umläufe bestimmen, welche Verfinsterungen im Gefolge haben. Die Gleichungen 1) geben dazu die entsprechende Zeit, 2) und 3) bestimmen die Punkte auf der Erdoberfläche, über welchen die Vorgänge stattfinden. Sowie in diesen Fällen, werden überhaupt durch unsere Gleichungen die Vorgänge am Himmelsgewölbe auf die Erdoberfläche verlegt und Zeit und Ort dieser Vorgänge auf letzterer unmittelbar bestimmt.

Elliptischer Wurf.

Nr. 31. Am Schlusse der Nr. 23 wurde bereits eine Andeutung gegeben, dass die dortigen Resultate über die Ablenkung der Geschosse einer Modification bedürfen, wenn die Bahn derselben nicht mehr als eine parabolische betrachtet werden darf. Die Voraussetzung der stets parallelen Einwirkung der Schwere auf den geworfenen Körper, welche beim Wegfallen des Luftwiderstandes die parabolische Bahn zur Folge hat, ist bei unseren weittragenden und genau treffenden Geschützen kaum mehr statthaft. Es sollen deshalb zum Schlusse zunächst noch die Formeln entwickelt werden, welche die Bahn eines geworfenen Körpers bestimmen, wenn diese Voraussetzung nicht gemacht wird, und hierauf die Bestimmung dieser Bahn mit Rücksicht auf die Umdrehung der Erde vorgenommen werden. Vom Luftwiderstand sehen wir ab; dann betrachten wir noch die Erde als Kugel, welche den Radius $\mathfrak{r}$ hat. Die

letztere Voraussetzung darf in Hinsicht auf die den Dimensionen der Erde gegenüber nicht sehr grosse Wurfweite der Geschosse wohl gemacht werden. Im Uebrigen gelten die Resultate zum Theil auch ohne diese Beschränkung.

Um zunächst die Bahn des Körpers ohne Rücksicht auf die Erddrehung zu bestimmen, werde dieser Körper mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hinausgeworfen, welche mit der Vertikallinie den Winkel γ bildet oder den Elevationswinkel $90-\gamma$ hat. Die Bewegung des Körpers wird eine Centralbewegung mit dem Centrum im Mittelpunkte der Erde und findet in der Ebene statt, welche durch diesen Punkt und durch $\mathfrak{v}$ geht. Zur Bestimmung der Bahn bedienen wir uns eines Polarsystems, dessen Pol im Mittelpunkte der Erde liegt, dessen Polaraxe durch den Ausgangspunkt geht und dessen Drehrichtung des Stellungswinkels nach der Richtung von γ hingeht. Mit Berücksichtigung des Anfangszustandes, für welchen bei $t=0$, $r=\mathfrak{r}$, $d\psi=\frac{\mathfrak{v}\sin\gamma}{\mathfrak{r}}dt$, $\partial r_t^2+r^2\partial\psi_t^2=\mathfrak{v}^2$ und die Beschleunigung der Erde $\frac{\mu}{\mathfrak{r}^2}=g$, also $\mu=\mathfrak{r}^2 g$ ist, wo g die Beschleunigung der Schwere am Ausgangspunkte vorstellt, erhalten wir für unsere Centralbewegung, welcher das Gravitationsgesetz zu Grunde liegt, die Gleichungen

$$r^2\partial\psi_t=\mathfrak{r}\mathfrak{v}\sin\gamma,\quad \partial r_t^2+r^2\partial\psi_t^2=\mathfrak{v}^2-2\mathfrak{r}g+\frac{2\mathfrak{r}^2 g}{r}.$$

Aus diesen Gleichungen beseitigen wir $\partial\psi_t$ und erhalten dadurch eine Gleichung zwischen r und ψ. Es ergiebt sich nacheinander

$$(\partial r_\psi^2+r^2)\frac{\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}{r^4}=\mathfrak{v}^2-2\mathfrak{r}g+\frac{2\mathfrak{r}^2 g}{r},$$

$$\partial\psi_r=\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}\sin\gamma}{r\sqrt{-\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma+2\mathfrak{r}^2 gr-(2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2)r^2}},$$

daraus durch Substitution von $r=\dfrac{1}{u+\dfrac{g}{\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}}$ und Integration

$$\psi=\arcsin\frac{\mathfrak{r}(gr-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)}{r\sqrt{-(2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma+\mathfrak{r}^2g^2}}+C$$

oder auch

$$\sin(\psi+C)=\frac{\mathfrak{r}(gr-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)}{r\sqrt{\mathfrak{r}^2g^2-(2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}}.$$

Nun ist weiter bei $\psi=0$ $r=\mathfrak{r}$, folglich

$$\sin C=\frac{g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}{\sqrt{\mathfrak{r}^2g^2-(2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}}\quad\text{und}\quad \cos C=\frac{\mathfrak{v}^2\sin\gamma.\cos\gamma}{\sqrt{\mathfrak{r}^2g^2-(2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma}}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung für $\sin(\psi+C)$ eingesetzt und nach r aufgelöst, so erhält man

I) $$r=\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}{\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2 \sin\gamma\cos\gamma\sin\psi-(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)\cos\psi}.$$

Das Einsetzen von $\sin\psi=\frac{x}{r}$, $\cos\psi=\frac{y}{r}$ und $r=\sqrt{x^2+y^2}$ in diese Gleichung, das Ordnen derselben nach x und y und die Untersuchung des Vorzeichens von c^2-4ab, wo c, a, b die Coefficienten von xy, x^2, y^2 in der geordneten Gleichung vorstellen, zeigt, dass diese Bahn unseres Körpers, wie bei der Planetenbewegung, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem $2\mathfrak{r}g>\mathfrak{v}^2$ oder $=\mathfrak{v}^2$ oder $<\mathfrak{v}^2$ ist. In den Fällen, welche wir weiter verfolgen, ist $2\mathfrak{r}g>\mathfrak{v}^2$, also die Bahn eine Ellipse.

Wollten wir die Luftlinie für irgend eine Erhebung oder Senkung h haben, so dürfte nur $r=\mathfrak{r}\pm h$ gesetzt, nach ψ aufgelöst und $l^2=h^2+2\mathfrak{r}\sin^2\frac{\psi}{2}(2\mathfrak{r}\pm h)$ gesetzt werden.

Soll untersucht werden, wie weit der Körper gelangt, bis er wieder zur Erdoberfläche zurückkehrt, so hat man $r=\mathfrak{r}$ zu setzen und nach ψ aufzulösen. Als solche ψ-Werthe finden sich $\psi=0$ oder das ψ des Ausgangspunktes und $\cos\psi''=\frac{(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)^2-\mathfrak{v}^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma}{(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)^2+\mathfrak{v}^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma}$. Lassen wir hier alle Fälle zu, in denen die Bahn eine elliptische ist, und setzen wir voraus, dass die Erde der Bahn des Körpers kein Hinderniss ist, so ist aus der letzten Gleichung für ψ'' allein nicht zu entnehmen, welcher von den stets möglichen zwei Werthen in den vier Quadranten zu nehmen ist. Wir suchen zu diesem Ende noch aus der Gleichung für $r=\mathfrak{r}$, $\sin\psi''=\frac{2\mathfrak{v}^2\sin\gamma\cos\gamma(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)}{(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)^2+\mathfrak{v}^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma}$. Es sei nun γ spitz, oder der Wurf gehe in die Höhe. Hier wird $\sin\gamma''$ positiv, wenn $g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma>0$, folglich liegt ψ'' im ersten oder zweiten Quadranten, und zwar nach dem Werthe für $\cos\psi''$ im ersten, wenn $(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)^2>\mathfrak{v}^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma$, und im zweiten, wenn der entgegengesetzte Fall stattfindet. Bei $g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma<0$ liegt ψ'' im dritten oder vierten Quadranten — Ersteres, wenn $(g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)^2<\mathfrak{v}^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma$, Letzteres im andern Falle. Wenn $g\mathfrak{r}=\mathfrak{v}^2\sin^2\alpha$ ist, wird $\sin\psi''=0$, $\cos\psi''=-1$, also $\psi''=180^0$, und Anfangs- und Endstelle liegen auf einem Durchmesser der Erde. Wird γ stumpf genommen oder geht die Wurfweite in die Tiefe, so tritt bei gleichen Bedingungen der vierte Quadrant an die Stelle des ersten, der zweite an die Stelle des dritten, der dritte an die des zweiten und der erste an die des vierten. $\gamma=0$ liefert $\sin\psi''=0$, $\cos\psi''=+1$ oder $\psi''=0$; $\gamma''=90^0$ ebenfalls $\psi''=0$ oder 360^0. Die Wurfweite ist in jedem Falle $=\mathfrak{r}\psi''$, die Höhe oder Tiefe des geworfenen Körpers für jedes ψ $h=r-\mathfrak{r}$.

Um die Elemente der elliptischen Bahn näher zu bestimmen, nehmen wir ein neues System an, indem wir die Polaraxe um $\frac{\psi''}{2}$ in der Rich-

tung des ψ drehen; alsdann ist $\psi = \psi' + \frac{\psi''}{2}$ zu setzen. Wir erhalten zu dem Ende weiter

$$sin\,\psi = sin\left(\psi' + \frac{\psi''}{2}\right) = sin\,\psi'.cos\frac{\psi''}{2} + cos\,\psi'.sin\frac{\psi''}{2} \text{ etc.},$$

$$cos\frac{\psi''}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\psi''}{2}} = \frac{g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 sin^2\gamma}{\sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 sin^2\gamma\, cos^2\gamma}},$$

$$sin\frac{\psi''}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\psi''}{2}} = \frac{\mathfrak{v}^2 sin\,\gamma.cos\,\gamma}{\sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 sin^2\gamma\, cos^2\gamma}}.$$

In Bezug auf die letzteren Werthe ist zu bemerken, dass, so lange γ spitz ist, nach dem Obigen $cos\frac{\psi''}{2}$ und $sin\frac{\psi''}{2}$ von selbst das richtige Vorzeichen erhalten, wenn die Wurzel im Nenner positiv angenommen wird; dass aber dann, wenn γ stumpf ist, die Wurzel das negative Vorzeichen erhalten muss. Diese Werthe in die Gleichung I) eingesetzt, geben nach gehöriger Reduction

$$r = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2 sin^2\gamma}{g\mathfrak{r} - cos\,\psi'\sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 sin^2\gamma\, cos^2\gamma}}$$

oder die Polargleichung der Ellipse, wenn der Pol im Brennpunkte oder hier im Mittelpunkte der Erde liegt. Für den positiven Wurzelwerth oder für den Wurf in die Höhe geht die positive Polaraxe, für den negativen Wurzelwerth oder für den Wurf in die Tiefe die negative Polaraxe durch den zweiten Brennpunkt. Die grosse Halbaxe der Ellipse wird durch $a = \frac{r' + r''}{2}$ gefunden, wenn r' und r'' die Radien vectoren für $\psi' = 0$ und $\psi'' = 180^0$ bestimmen. In Uebereinstimmung mit dem Obigen ist bei positivem Wurzelwerth r' die grössere, r'' die kleinere Axe, oder liegt der Mittelpunkt der Erde in dem vom Scheitel entfernteren Brennpunkte; bei negativem Wurzelwerthe findet das Umgekehrte statt. Tritt der besondere Fall $\gamma = 90^0$ ein oder ist der Wurf anfänglich horizontal, so wird $r = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2}{g\mathfrak{r} - (g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\,cos\,\psi'}$, und das Centrum liegt in dem entfernteren Brennpunkte, wenn $g\mathfrak{r} > \mathfrak{v}^2$, und im nächstliegenden, wenn $g\mathfrak{r} < \mathfrak{v}^2$. Wird noch in dem letzten Falle $g\mathfrak{r} = \mathfrak{v}^2$, $g = \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{r}}$, so wird $r = \mathfrak{r}$ oder die Bewegung kreisförmig.

Dem Gesagten zufolge wird $a = \frac{r' + r''}{2} = \frac{g\mathfrak{r}^2}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$. Es ist demnach die grosse Axe der Ellipsenbahn vollständig von dem Winkel γ oder auch von dem Elevationswinkel unabhängig, unter dem der Körper hinausgeworfen wird, und wird nur durch die Grösse des $\mathfrak{v}$ bestimmt. — Die anderen Elemente der Bahn erhalten wir, wenn wir

$$r = \frac{\frac{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}^2 \sin^2 \gamma}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}}{\frac{g\mathfrak{r}^2}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} - \cos\psi' \cdot \frac{\mathfrak{r}\sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 . \sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 \sin^2\gamma \cos^2\gamma}}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}}$$

setzen und diese Gleichung mit

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\psi}$$

in Uebereinstimmung bringen. Es ergiebt sich dann

$$b = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}\sin\gamma}{\sqrt{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}}$$

und

$$e = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 \sin^2 g)^2 + \mathfrak{v}^4 \sin^2\gamma \cos^2\gamma}}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)}}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}.$$

Der Werth von b sagt uns, dass die kleine Axe ein Maximum wird, wenn $\gamma = 90^0$ ist oder der Körper horizontal hinausgeworfen wird, dass der Werth der kleinen Axe in den Fällen $\gamma \gtrless 90^0$ erhalten wird, wenn man den Maximalwerth mit $\sin\gamma$ multiplicirt oder auf eine zur Schussrichtung senkrechte Linie projicirt, und dass endlich b für γ und $180^0 - \gamma$ gleich wird. Im Gegensatz hiervon wird e ein Minimum für $\gamma = 90^0$, jedoch auch wieder gleich für γ und $180 - \gamma$. Das $\gamma = 0$ oder 180^0 macht $a = e$ oder führt die Ellipse in eine Gerade über. Ueberhaupt erhält die Curve für $\gamma = 0$ und $180 - \gamma$ nicht blos gleiche Bestimmungsstücke, sondern auch gleiche oder symmetrische Lage, sie ist eine und die nämliche, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten auf verschiedenen Seiten des Lothes liegen, oder beide Bahnen gehören den zum Lothe symmetrischen Curven an, wenn das Gegentheil stattfindet.

Wie die Höhe oder Tiefe des geworfenen Körpers und die Wurfweite bestimmt werden können, ist schon oben angegeben. Umgekehrt lässt sich für eine gegebene Wurfweite $x\psi''$ der Winkel γ finden. Man setzt zu dem Ende diese Wurfweite $w = \mathfrak{r}\psi''$, bestimmt daraus $\psi'' = \frac{w}{\mathfrak{r}}$, setzt den Werth in die Gleichung für $\cos\psi''$ oder $\sin\psi''$ ein und löst nach γ auf. Man erhält hier eine Gleichung vom vierten Grade, in der nur noch das Quadrat der Unbekannten vorkommt und die sich daher leicht auflösen lässt. In den gewöhnlichen Fällen ist der spitze Werth des Winkels γ zu nehmen. Es wäre auch der stumpfe Winkel am Platze, wenn das Ziel tiefer läge als der Ausgangspunkt, nur müsste streng genommen $\mathfrak{r}$ dem höhern Ausgangspunkte entsprechen.

Zur weiteren Bestimmung unserer Wurfbewegung wollen wir noch die Zeit berücksichtigen. Eine entsprechende Formel wird zu diesem Zwecke erhalten, wenn wir aus den Grundgleichungen der Centralbewegung das $\partial\psi_t$ fortschaffen. Man erhält dann

$$\partial r_t^2 + \frac{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}{r^2} = \mathfrak{v}^2 - 2\mathfrak{r} g + \frac{2\mathfrak{r}^2 g}{r}$$

und daraus

$$\partial t_r = \frac{r}{\sqrt{-\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma + 2\mathfrak{r}^2 g r - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r^2}}.$$

Setzt man $r = u + \frac{g\mathfrak{r}^2}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$ und integrirt, so bekommt man

$$t = \frac{-\sqrt{-\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma + 2\mathfrak{r}^2 g r - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r^2}}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$$

$$+ \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - v^2)^{3/2}} \arcsin \frac{-g\mathfrak{r}^2 + (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r}{\mathfrak{r}\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}} + C.$$

Ferner ist bei $t = 0$ $r = \mathfrak{r}$ und daher

$$0 = \frac{-\mathfrak{r}\mathfrak{v}\cos\gamma}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} + \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \arcsin \frac{g\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{v}^2}{\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}} + C,$$

so dass, wenn die letzten Gleichungen subtrahirt und die Bögen durch den *cos* zusammengefasst werden, die Gleichung zum Vorschein kommt:

$$\text{II)} \qquad t = \frac{-\sqrt{-\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma + 2\mathfrak{r}^2 g r - \mathfrak{v}^2) r^2} + \mathfrak{r}\mathfrak{v}\cos\gamma}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} + \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}}$$

$$\times \arccos \frac{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)(-g\mathfrak{r}^2 + (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r) + (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}\cos\gamma \sqrt{-\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma + 2g\mathfrak{r}^2 r - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r^2}}{\mathfrak{r}[g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma]}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich zu dem r das zugehörige t finden.

Für den Scheitel oder $r = r' = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}{g\mathfrak{r} - \sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 \sin^2 g \cos^2\gamma}}$

$= \frac{\mathfrak{r}\left(g\mathfrak{r} + \sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}\right)}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$ erhält man

$$t' = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}\cos\gamma}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} + \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \arccos \frac{g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}{\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}},$$

d. h. die Zeit, welche der Körper steigt, wenn er unter einem spitzen Winkel, oder die er fällt, wenn er unter einem stumpfen Winkel geworfen wird. Selbstverständlich wird im letzten Falle wieder vorausgesetzt, dass sich der Körper ungehindert durch die Erde bewegen könne. Ueber die Grenze r' hinaus giebt die obige Formel nicht das richtige t, weil an der Stelle $r' \partial t_r$ seine Stetigkeit unterbricht und gleich $\frac{r'}{0}$ wird. Es ist dies auch daraus ersichtlich, dass, wenn r das zweite Mal gleich $\mathfrak{r}$ wird, $t = \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \arccos 1 = \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \cdot 2\pi$ sein müsste — ein Resultat, das der Natur der Sache nicht angemessen ist. Um die richtigen t-Werthe für den zweiten Abschnitt der Bewegung, also z. B. für das Herabkommen des Körpers auf die Erdoberfläche zu erhalten, hat man, weil der zweite

Theil der Bewegung dem ersten Theile symmetrisch ist, diese Zeit $T = 2t' - t$ zu setzen, wo t' die oben bestimmte Zeit des Aufsteigens und t der Werth für den Radius vector r im ersten Abschnitt ist. Wird für Werthe von r, die kleiner als $\mathfrak{r}$ sind und bis zu r'' abnehmen, t negativ, so giebt die letzte Formel zugleich auch die T-Werthe in der Folge; ausserdem ist im dritten Abschnitt $T = 2t' + t$ zu setzen. Wir wollen übrigens diese Fälle nicht mehr verfolgen, weil nur die Formeln für t und $T = 2t' - t$ diejenigen sind, die in Wirklichkeit vorkommen können.

Zu späteren Resultaten ist es noch nothwendig, die Zeit zu wissen, welche der Körper zu einem Umlauf in seiner Bahn brauchen würde, wenn seiner Bewegung kein Hinderniss entgegenstände. Oben wurde bereits t', d. h. die Zeit gefunden, die er vom Ausgangspunkt bis zum einen Scheitel braucht. Setzen wir weiter

$$r = r'' = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}{g\mathfrak{r} + \sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4 \sin^2\gamma . \cos^2\gamma}}$$
$$= \frac{\mathfrak{r}\left(g\mathfrak{r} - \sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}\right)}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$$

und $\gamma = 180 - \gamma$, so erhalten wir die Zeit t'', welche der Körper braucht, um bei entgegengesetzt gerichtetem $\mathfrak{v}$ und sonst gleichen Verhältnissen zu dem andern Scheitel zu gelangen. Endlich muss $t' + t'' =$ der halben Umlaufszeit sein. Die $\sqrt{-\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma + 2g\mathfrak{r}^2 r - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2) r^2}$, welche hier negativ zu nehmen wäre, weil dt stets positiv sein muss, dr aber für diesen Abschnitt einen negativen Werth erhielt, kommt weiter nicht in Betracht, da sie wieder Null wird. Man erhält nun

$$t'' = \frac{-\mathfrak{r}\mathfrak{v} \cos\gamma}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2} + \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \cdot \arccos \frac{\mathfrak{v}^2 - g\mathfrak{r}}{\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}}$$

und

$$t' + t'' = \frac{g\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} \left(\arccos \frac{g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}{\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}} \right.$$
$$\left. + \arccos \frac{\mathfrak{v}^2 - g\mathfrak{r}}{\sqrt{g^2\mathfrak{r}^2 - (2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)\mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma}} \right).$$

Beide Bögen sind von Null an zu rechnen, folglich ist, wenn der eine $= \beta$ gesetzt wird, der andere $= \pi - \beta$ und demnach

$$t' + t'' = \frac{g\mathfrak{r}^2 \pi}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}}.$$

Die ganze Umlaufszeit wird demnach =

$$\frac{2g\mathfrak{r}^2\pi}{(2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\mathfrak{r}\sqrt{g}} \cdot a^{3/2},$$

also wieder unabhängig von dem Winkel γ, unter dem der Körper geworfen wird, und mittelbar nur eine Function von $\mathfrak{v}$. In Berücksichtigung des Umstandes, dass bei den elliptischen Bewegungen unter dem Einflusse der Gravitation die Umlaufszeit nur durch ein Element der Bahn, nämlich durch die grosse Axe bedingt wird, hätte man das letzte Resultat und die daran geknüpften Folgerungen auch unmittelbar erhalten können.

Eine Gleichung zwischen ψ und t ergiebt sich, wenn man in die obige Gleichung II) zwischen t und r den Werth r aus I) einsetzt. Auch mit Hilfe des zweiten Kepler'schen Gesetzes kann eine solche Gleichung gefunden werden. Man erhält zu dem Ende wieder

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\, d\psi = ct.$$

Zur Bestimmung der Constanten c berücksichtigen wir, dass für einen vollständigen Umlauf $ab\pi = c\tau$, also $c = \frac{ab\pi}{\tau}$ wird. Nun ist aber die Umlaufszeit $\tau = \frac{2\pi}{\mathfrak{r}\sqrt{g}} \cdot a^{3/2}$, dann $a = \frac{g\mathfrak{r}^2}{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}$ und $b = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}\, sin\,\gamma}{\sqrt{2g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2}}$, folglich wird

$$c = \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{v}\, sin\,\gamma \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{r}^2\, d\psi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{v}\, sin\,\gamma . t.$$

Um $\int r^2\, d\psi$ zu bestimmen, erhält man nacheinander

$$\int_0^\psi r^2\, d\psi = \int_0^\psi \frac{\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^4\, sin^4\gamma}{(gr - \mathfrak{v}^2\, sin\,\gamma . cos\,\gamma . sin\,\psi - (g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2\, sin^2\gamma)\, cos\,\psi)^2}\, d\psi$$

$$= \int_{-\frac{\psi''}{2}}^{\psi' + \frac{\psi''}{2}} \frac{\mathfrak{r}^2\mathfrak{v}^4\, sin^4\gamma}{\left(gr - cos\,\psi' \sqrt{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2\, sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4\, sin^2\gamma\, cos^2\gamma}\right)^2}\, d\psi',$$

wo in Uebereinstimmung mit dem Vorausgegangenen

$$\psi = \psi' + \frac{\psi''}{2} = \psi' + \tfrac{1}{2}\, arcsin\, \frac{2\mathfrak{v}^2\, sin\,\gamma\, cos\,\gamma\, (g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2\, sin^2\gamma)}{(g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2\, sin^2\gamma)^2 + \mathfrak{v}^4\, sin^2\gamma\, cos^2\gamma}$$

gesetzt wurde. In Bezug auf den letzten Integralausdruck folgt nun, wenn man Zähler und Nenner mit $\frac{\mathfrak{r}^2}{(2g\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{v}^2)^2}$ multiplicirt und die schon früher bestimmten Werthe von a, b und e einführt:

$$\int \frac{b^4}{(a - e\, cos\,\psi')^2}\, d\psi' = b^2 e\, \frac{sin\,\psi'}{a - e\, cos\,\psi'} + ab\, arctang\, \frac{b\, sin\,\psi'}{a\, cos\,\psi' - e},$$

so dass man die Gleichung erhält

$$\text{III)}\quad b^2 e\left[\frac{\sin\left(\psi-\frac{\psi''}{2}\right)}{a-e\cos\left(\psi-\frac{\psi'}{2}\right)}+\frac{\sin\frac{\psi''}{2}}{a-e\cos\psi''}\right]$$

$$+ab\left[\operatorname{arctang}\frac{b\sin\left(\psi-\frac{\psi''}{2}\right)}{a\cos\left(\psi-\frac{\psi''}{2}\right)-e}+\operatorname{arctang}\frac{b\sin\frac{\psi''}{2}}{a\cos\frac{\psi''}{2}-e}\right]=\mathfrak{r}\mathfrak{v}\sin\gamma\,.\,t.$$

Das Zusammenfassen der Klammernausdrücke führt zu keinen einfacheren Ausdrücken. Für das $\psi=\psi''$ erhält man wieder einen Ausdruck für das schon oben bestimmte $2t$, der sich dem früheren durch passende Substitution als gleich nachweisen lässt.

Die eben erhaltene Gleichung für ψ in Verbindung mit $r=\mathfrak{r}$ und mit Festhaltung der Ebene durch $\mathfrak{v}$ und den Mittelpunkt der Erde bestimmen zugleich die Centralprojection des geworfenen Körpers auf die Erdoberfläche, also die Bewegung dieser Projection auf dem grössten Kreise, nach dem die zuletzt genannte Ebene die Erdoberfläche schneidet. Eine Auflösung der letzten Gleichung nach ψ ist nicht ausführbar; annähernd liesse sich dieselbe erzielen, wenn man die linke Seite in eine Reihe entwickelte, die nach Potenzen von ψ fortschritte und nur die Anfangsglieder berücksichtigte, wozu man in den gewöhnlichen Fällen wegen der Kleinheit des ψ berechtigt ist. Ausserdem ist noch ersichtlich, dass die obigen Resultate im Allgemeinen ihre Giltigkeit behalten, wenn die Erde irgend eine Form hätte, sobald sich nur voraussetzen liesse, dass die Anziehung, welche sie auf den bewegten Körper ausübt, von einem bestimmten Punkte ausgeht.

In Bezug auf die Bewegung selbst lässt sich aus der Symmetrie des ganzen Vorgangs in Bezug auf die Scheitel- oder Axenlage unmittelbar schliessen, dass bei gleichen Winkeln der Radien vectoren mit dieser Axe die Geschwindigkeiten des Punktes auf seiner Bahn und die seiner Centralprojection auf die Oberfläche der Kugel einander gleich sind, dass die ersteren noch gleiche Winkel mit den Radien vectoren bilden und nur die eine aufwärts, die andere abwärts gerichtet ist. Der Punkt kommt daher mit seiner Anfangsgeschwindigkeit wieder unten an und bildet in umgekehrter Richtung wieder den gleichen Elevationswinkel.

Dieselben Resultate ergiebt die Formel für die Geschwindigkeit

$$v^2=\partial r_t^2+r^2\,\partial\psi_t^2=\mathfrak{v}^2-2\mathfrak{r}g+\frac{2\mathfrak{r}^2 g}{r};$$

sie zeigt zugleich noch, dass diese Geschwindigkeit beim Aufsteigen abnimmt, bei $r=r'=a=\frac{g\mathfrak{r}^2}{2g\mathfrak{r}-\mathfrak{v}^2}$ ein Minimum, nämlich $=\sqrt{2\mathfrak{r}g-\mathfrak{v}^2}$ wird und dann wieder zunimmt.

Bei der Kugel ist die Geschwindigkeit der Centralprojection $= \mathfrak{r}\,\partial\psi_t$ $= \frac{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}\, sin\gamma}{r^2}$. Aus der Gleichung folgt, dass auch diese Geschwindigkeit bei $r = \mathfrak{r}$ am grössten und gleich $\mathfrak{v}\, sin\gamma$ ist, dass sie von da an abnimmt, bei $r = r'$ ihren kleinsten Werth erreicht und dann wieder bis $\mathfrak{v}\, sin\gamma$ zunimmt, dass sie endlich bei demselben r immer die nämliche ist.

Nr. 32. Als letzte Anwendung soll die in Nr. 31 bestimmte Wurfbewegung unter dem Einflusse der Umdrehung der Erde, jedoch mit Weglassung des Lufwiderstandes ins Auge gefasst werden. Wir werden hierbei auch die Resultate der Nr. 17—24 benützen. Die Erde werde zunächst kugelförmig angenommen und das Coordinatensystem wieder so gewählt, dass die Aequatorebene die xy-Ebene und die Erdaxe die z-Axe sei; auch die anderen Bestimmungsstücke werden dem Vorausgegangenen gemäss angenommen. Zunächst soll das Verhalten der Centralprojection des bewegten Punktes auf der Erdoberfläche verfolgt werden, wenn auf diese im Verlaufe ihres oben bestimmten Fortschreitens selbstständig die Umdrehung der Erde wirkt.

Für den Winkel θ der Ebene unserer Ellipsenbahn mit dem Aequator erhalten wir, wie in Nr. 19, $cos\theta = cos\beta' . cos\alpha$, wo β' die geographische Breite des Ausgangspunktes und α den Winkel der Projection der Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf die Erdoberfläche mit dem nach Osten gerichteten Parallelkreis des Ausgangspunktes vorstellt. — Die geographische Breite β unserer Centralprojection ist von der Umdrehung der Erde unabhängig und wird namentlich durch das Verhalten des ψ in Nr. 31 bestimmt. Es findet sich auf Grund der Nr. 19 bei Einführung dieses ψ

$$sin\beta = sin(\psi + \psi') . sin\theta.$$

Hierbei wird durch ψ' der Winkel bezeichnet, den der Radius vector der Anfangslage unseres Punktes mit der aufsteigenden Knotenlinie unserer Bahnebene in der Aequatorebene bildet. ψ' selbst kann aus $sin\beta' = sin\psi' . sin\theta$ gefunden werden. Soll z bestimmt werden, so ergiebt sich aus der vorletzten Gleichung

$$1) \qquad z = \mathfrak{r}\, sin(\psi + \psi') . sin\theta.$$

Als zweite Gleichung der Curve tritt hinzu

$$2) \qquad \varrho^2 = \mathfrak{r}^2 - z^2.$$

Um die dritte Gleichung oder die für φ zu erhalten, beachten wir, dass gemäss der Nr. 20

$$\varphi = \int \omega\, dt + arctang[tang\psi . cos\theta],$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{f'}{f} - 1\right) = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - z'^2}}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - z^2}} - 1\right)$$

ist, und daher mit Beiziehung der letzten Resultate wird

$$3)\quad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - z'^2}}{\mathfrak{r}}\left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi').\sin^2\theta}}\,dt - t\right)$$
$$+ \operatorname{arctang}[\operatorname{tang}\psi.\cos\beta'.\cos\alpha].$$

Wird die Grenze des Integrals bis zu $t = 2t'$ der Nr. 31 ausgedehnt und dementsprechend schliesslich $\psi = \psi''$ derselben Nummer gesetzt, so erhält man die Gleichungen bis zur Wiederkunft des in die Höhe geworfenen Körpers auf die Erdoberfläche und zugleich Werthe von φ, welche nicht blos für die Projection, sondern auch für den Körper selbst gelten. Durch das erste Glied der rechten Seite der letzten Gleichung wird der Einfluss der Umdrehung der Erde bestimmt. Welche Eliminationen auszuführen sind, um ψ und t fortzuschaffen, ist leicht zu ersehen.

Einer unmittelbaren Entwickelung des Integrals steht der Umstand entgegen, dass Gleichung III) der Nr. 31 nicht nach ψ aufgelöst ist. Man könnte nun, wie an jener Stelle schon angedeutet wurde, die linke Seite in eine nach Potenzen von ψ fortschreitende Reihe entwickeln und für die Fälle der Anwendung, in welchen ψ klein ist, blos einzelne Anfangsglieder berücksichtigen, die so erhaltene Gleichung nach ψ auflösen und den Werth in die Gleichung für φ einsetzen. Würde nur die erste Potenz von ψ genommen und diese Substitution ausgeführt, so erhielte man ein Integral, für welches die Reihenentwickelung der Nr. 20 mit den entsprechenden Aenderungen der Coefficienten Giltigkeit hätte. Ein anderer Ausweg bietet sich dadurch dar, dass man das Integral nach t in ein anderes nach ψ verwandelt. Man erhält dann

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi')\sin^2\theta}}\,dt = \int_0^\psi \frac{\partial t_\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi')\sin^2\theta}}\,dt.$$

Der Werth von ∂t_ψ kann entweder aus III) hergeholt werden oder einfacher aus $r^2\,\partial\psi_t = \mathfrak{r}\mathfrak{v}\sin\gamma$ und der Gleichung I). Demzufolge geht das letzte Integral über in

$$\mathfrak{r}\mathfrak{v}^2\sin^3\gamma\int\frac{d\psi}{(\mathfrak{r}g - \mathfrak{v}^2\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi - (g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2\sin^2\gamma)\cos\psi)^2\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi')\sin^2\theta}},$$

d. h. in ein Integral, das wieder nur durch eine Reihenentwickelung weiter verfolgt werden kann.

Die angedeuteten Entwickelungen als gegeben vorausgesetzt, würde man bei Verfolgung des Vorganges am besten von den ψ-Werthen ausgehen, hierzu leicht z, ϱ, aus Gleichung III) t und endlich auch φ bestimmen können. Für ψ'' und $2t'$ erhält man die Werthe, welche sich, wie schon erwähnt wurde, auch auf den ursprünglichen Punkt beziehen. Weitere Bestimmungen werden analog den früher betrachteten Fällen in Nr. 23 getroffen; die dort erhaltenen Resultate können zum Theil unmittelbar hierher übertragen werden.

Von den besonderen Fällen in Nr. 21 und 22, wo $\alpha = 0$ oder 90° ist, d. h. die anfängliche Bewegung in der Richtung des Parallelkreises oder Meridians stattfindet, soll nur in Bezug auf den zweiten Fall Einiges angegeben werden. Hier wird

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = \psi', \quad z = r \sin(\psi + \beta')$$

und das Integral

$$= \int \frac{d\psi}{(\mathfrak{r} g - \mathfrak{v}^2 \sin\gamma \cos\gamma \sin\psi - (g\mathfrak{r} - \mathfrak{v}^2 \sin^2\gamma)\cos\psi)^2 \cos(\psi + \beta')}.$$

Letzteres kann wahrscheinlich in geschlossener Form angegeben werden. Endlich können auch noch die Verallgemeinerungen der Nr. 24 vorgenommen werden und kann man unter den schon angedeuteten Beschränkungen die Kugelgestalt der Erde verlassen; es ist zu dem Ende nur statt der dortigen Gleichung für ψ die der Nr. 31 zu setzen.

Wollte man nicht das Verhalten der ursprünglichen Centralprojection des Punktes verfolgen, sondern das des letzteren selbst, so könnte man, weil die durch die Erddrehung bewirkte Ablenkung in der Richtung der Parallelkreise für den Punkt im Raume und für seine ursprüngliche Centralprojection in der Anwendung fast gleich bleibt, wie folgt verfahren. Zunächst bestimme man 1. die Wurflinie der Nr. 31, 2. ihre Centralprojection und 3. die Ablenkungscurve, welche selbstständig zu letzterer gehört, kurz die obige Curve; nehme dann irgend einen ψ-Werth an, bestimme den zugehörigen Punkt der ersten Curve, sein r und seine Centralprojection auf der zweiten Curve, gehe hierauf von dieser Projection aus auf dem zugehörigen Parallelkreise bis zur dritten Curve fort und ziehe endlich durch den zuletzt erhaltenen Punkt eine Parallele zu r und mache sie $= r - \mathfrak{r}$. Der so erhaltene Punkt ist der verlangte. Die Gleichung III) in Nr. 31 giebt dazu auch das t. Obwohl diese Bestimmungsart der Bahn im Raume nur eine annähernde ist, so dürfte sich der geringen Abweichung, der Anschaulichkeit und der vollen Strenge für den Moment des Aufschlagens halber keine andere für die Anwendung besser eignen, als die gegebene.

Eine Formel für die Curve im Raume würde sich ergeben, wenn wir uns durch die ursprüngliche elliptische Bahn um die Erdaxe eine Rotationsfläche beschrieben denken und auf dieser den Vorgang verfolgen. Diese Voraussetzung scheint aus dem Grunde innerhalb enger Grenzen statthaft zu sein, weil die Gravitation die Entfernung r des fliehenden Körpers von Moment zu Moment festzuhalten sucht und dadurch allmälig eine parallele Verschiebung der ursprünglichen Rotationsgeschwindigkeit stattfindet. Auf diese Weise ergiebt sich nach den früheren Entwickelungen und wenn wir mit ζ den z-Werth der gesuchten Curve bezeichnen:

$$1) \qquad \zeta = r \sin(\psi + \psi') \,.\, \sin\theta.$$

Das r ist hierbei der Werth aus I) der Nr. 31. Die Gleichung der Rotationsfläche wird unter derselben Voraussetzung

$$f^2 + \zeta^2 = r^2 \text{ oder auch}$$

$$2) \qquad f = r\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi')\sin^2\theta}.$$

Endlich wird für die dritte Gleichung $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\frac{f'}{f} - 1\right)$, also

$$3) \qquad \varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\sqrt{\mathfrak{r}^2 - z'^2}\int_0^t \frac{1}{r\sqrt{1 - \sin^2(\psi + \psi')\sin^2\theta}}\,dt - t\right)$$
$$+ \operatorname{arctang}\left[\operatorname{tang}\psi . \cos\alpha . \cos\beta'\right].$$

Dass die Bemerkungen, welche an die Gleichungen der ersten Ablenkungscurve dieser Nummer geknüpft wurden, mit geringen Aenderungen auch auf die jetzigen Gleichungen angewendet werden können, bedarf keiner weiteren Voraussetzungen. Wird in den erhaltenen Resultaten, und zwar nach der Integration, $r = \mathfrak{r}$ gesetzt, so erhält man die Projection der Curve auf die Erdoberfläche.

Anmerkung. Zu den schon in Betracht gezogenen Einflüssen könnte sowohl in dieser Nummer, als in Nr. 20 — 22 noch die scheinbare Drehung der ursprünglichen Bewegungsebene hinzugenommen werden. Hier wäre α nicht constant, sondern $= \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\int_0^t \sin\beta\, dt . \alpha'\right)$, wo α' den Werth für die Ausgangsstelle β' vorstellt. Die anderen Gleichungen $\cos\theta = \cos\beta . \cos\alpha$ und $\sin\beta = \sin(\psi + \psi') . \sin\theta$, sowie die Gleichung für φ werden bleiben können. Da übrigens β in der Gleichung für α nicht bekannt ist, so ist mit der angedeuteten Integration wenig gedient. Es erübrigt deshalb, aus den drei angeschriebenen Gleichungen für β, θ und α zunächst eine Gleichung zur Bestimmung einer dieser Grössen herzuleiten. Mag man jedoch irgend eine dieser Grössen zu der Operation ausersehen, so wird man stets zu Differentialgleichungen geführt, die eine Integration nicht wohl zulassen, indem sie ausser der Ableitung nach t nicht blos das t selbst, sondern auch noch trigonometrische Functionen der gesuchten Grösse enthalten. Abgesehen davon, dass das Vorhandensein dieses Einflusses bei unserer freien Bewegung nicht zweifellos ist, lässt sich noch mit Hilfe der in Nr. 23 erhaltenen Näherungsresultate leicht darthun, dass in den Fällen der Anwendung für constante Werthe von $\sin\beta$, für welche $\sin\beta . t > \int_0^t \sin\beta\, dt$ ist, der mögliche Einfluss dieser Erscheinung zu sehr zurücktritt, um die frührer bestimmte Ablenkung in beachtenswerther Weise ändern zu können. Hierdurch ist dann auch dargethan, dass diese Aenderung bei den der Wirklichkeit entsprechenden Fällen der Nr. 32 ebenfalls ausser Acht gelassen werden kann.

Kleinere Mittheilungen.

XIII. Bemerkung zu Art. XXIV und XXV der „Kleineren Mittheilungen" in dieser Zeitschrift, 27. Jahrg. S. 380.

Herr Schlömilch theilt a. a. O. „zwei projectivische Sätze" mit, die, wie er hinzufügt, neu sein dürften und eine weitere Untersuchung verdienen. Der Beweis dieser Sätze, welchen in dem darauf folgenden Artikel Herr A. Sachse giebt, beruht auf metrischen Relationen zwischen Strecken und kann leicht ersetzt werden durch eine allein der unmittelbaren Anschauung entnommene Betrachtung, die zugleich die ganze räumliche Figur in ihrer Vollständigkeit erkennen lässt und dieselbe als identisch nachweist mit der bekannten räumlichen Figur von drei „in desmischer Lage" befindlichen Tetraëdern, von denen je zwei auf vierfache Weise gleichzeitig perspectiv liegen und zu den vier Perspectivitätscentren die Ecken des dritten Tetraëders haben. Auf diese interessante räumliche Figur, welche sich bei mehreren ganz verschiedenen geometrischen Untersuchungen darbietet, hat zuerst Herr Cyparissos Stephanos aufmerksam gemacht (Sur les systèmes desmiques de trois tetraèdres par M. Cyparissos Stephanos, Bulletin des Sciences mathématiques, 2me série t. III, 1879). Ich will zuerst die Identität dieser Figur mit den von Herrn Schlömilch ausgesprochenen Sätzen nachweisen und sodann auf einige geometrische Untersuchungen hinweisen, bei welchen die Figur auftritt.

Man nehme in einer Ebene ε ein vollständiges Viereck $\mathfrak{ABCD}$, von welchem zwei Diagonalpunkte:

$$(\mathfrak{AB}, \mathfrak{CD}) = \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{AC}, \mathfrak{BD}) = \mathfrak{b}$$

seien, und lege durch die Gerade $|\mathfrak{ab}|$ eine beliebige Ebene ε'. Von irgend einem Punkte $\mathfrak{O}$ des Raumes projicire man das Viereck $\mathfrak{ABCD}$ auf die Ebene ε', so dass man in derselben die vier Punkte erhält:

$$(\mathfrak{OA}, \varepsilon') = \mathfrak{A}', \quad (\mathfrak{OB}, \varepsilon') = \mathfrak{B}', \quad (\mathfrak{OC}, \varepsilon') = \mathfrak{C}', \quad (\mathfrak{OD}, \varepsilon') = \mathfrak{D}',$$

dann werden, weil $\mathfrak{OAA}'$ in einer Geraden, $\mathfrak{OBB}'$ in einer Geraden und $\mathfrak{ABa}$ in einer Geraden liegen, die Punkte:

$$\mathfrak{OAA}'\mathfrak{BB}'\mathfrak{a}$$

in einer Ebene liegen, und die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{OAA}'\mathfrak{BB}'\mathfrak{a}], \quad [\mathfrak{ABab}] = \varepsilon, \quad [\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{ab}] = \varepsilon'$$

werden sich in einem Punkte schneiden, durch welchen offenbar die drei Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen müssen; diese sind aber, wie wir sehen,

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|,$$

und da der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ ist, so muss $|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|$ durch $\mathfrak{a}$ gehen.

In gleicher Weise erkennen wir, weil die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{O}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{a}],\quad [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \varepsilon,\quad [\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \varepsilon'$$

sich in einem Punkte schneiden, durch welchen die Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen müssen, dass

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$$

durch einen Punkt laufen müssen; und dieser wird ebenfalls $\mathfrak{a}$ sein, weil $(\mathfrak{C}\mathfrak{D}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ ist; mithin geht auch $|\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|$ durch den Punkt $\mathfrak{a}$, und wir haben also vier Gerade:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|,\quad |\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|$$

durch den Punkt $\mathfrak{a}$.

In gleicher Weise sehen wir ferner, dass die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'|,\quad |\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'|$$

durch den Punkt $\mathfrak{b}$ laufen.

Da nun $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|$ durch $\mathfrak{a}$ gehen, also die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ in einer Ebene liegen, da zweitens $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'|$ durch $\mathfrak{b}$ gehen, also die vier Punkte durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{D}'$ in einer Ebene liegen und endlich auch $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ in einer Ebene liegen, weil sich $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ auf einer Geraden und $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ auf einer Geraden befinden, so werden die drei Ebenen

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'],\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'],\quad [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}']$$

sich in einem Punkte schneiden, durch welchen die drei Schnittlinien je zweier von ihnen gehen, d. h. die drei Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}'|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{B}'|$$

müssen durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ laufen.

In gleicher Weise erkennen wir, dass die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{D}],\quad [\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}\mathfrak{D}],\quad [\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

sich in einem Punkte schneiden, durch welchen die drei Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen, d. h. die drei Geraden:

$$|\mathfrak{A}'\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{C}'\mathfrak{B}|,$$

folglich gehen alle vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}'|,\quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|,\quad |\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|$$

durch denselben Punkt $\mathfrak{P}$. (Dies ist der Schlömilch'sche Satz.)

Es ergiebt sich aber zugleich, weil die beiden Ebenen

$$[\mathfrak{O}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{D}\mathfrak{D}'] \text{ und } [\mathfrak{O}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}']$$

sich in einer Geraden schneiden, und einerseits die Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene ε liegen, dass auch der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{D}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und, weil andererseits $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ in einer Ebene ε' liegen, dass auch der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}'\mathfrak{D}', \mathfrak{B}'\mathfrak{C}')$ in der Schnittlinie der vorigen beiden Ebenen liegen muss. Diese Schnittlinie ist nichts Anderes, als die Linie $|\mathfrak{O}\mathfrak{P}|$, denn sowohl

$\mathfrak{O}$ liegt in beiden Ebenen gleichzeitig, als auch der Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem sich

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}'|, \quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|, \quad |\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|$$

begegnen; folglich liegen die vier Punkte:

$$\mathfrak{O}, \quad \mathfrak{P}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{D}, \mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{A}'\mathfrak{D}', \mathfrak{B}'\mathfrak{C}')$$

auf einer und derselben Geraden.

Der Punkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{D}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ist der dritte Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; hieraus folgt die Richtigkeit der Bemerkung von Herrn Schlömilch, dass, wenn wir die Ebene ε mit dem Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ festhalten und auch den Projectionspunkt $\mathfrak{O}$ ungeändert lassen, die Ebene ε' aber um $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ drehen, der Punkt $\mathfrak{P}$ eine Gerade durchläuft, die Verbindungslinie von $\mathfrak{O}$ mit dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{D}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$, wozu noch hinzukommt, dass auch der veränderliche Schnittpunkt $(\mathfrak{A}'\mathfrak{D}', \mathfrak{B}'\mathfrak{C}')$ auf derselben Geraden sich bewegt.

Die ganze Figur tritt in ihrer Vollständigkeit besser hervor, wenn wir das Resultat der vorigen Betrachtung so zusammenfassen:

Es treffen sich, wie wir gesehen haben,

$$\begin{array}{llllll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|, & |\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'| & \text{im Punkte} & \mathfrak{a}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|, & |\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'| & \text{,, \quad ,,} & \mathfrak{b}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{D}'|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{C}'|, & |\mathfrak{A}'\mathfrak{D}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{C}| & \text{,, \quad ,,} & \mathfrak{P}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{D}'| & \text{,, \quad ,,} & \mathfrak{O}.
\end{array}$$

Dies lässt sich so aussprechen:

Die beiden Tetraëder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D} \text{ und } \mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$$

liegen gleichzeitig auf vier verschiedene Arten perspectiv, und die vier Perspectivitätscentra sind die Punkte

$$\mathfrak{a}, \; \mathfrak{b}, \; \mathfrak{O}, \; \mathfrak{P},$$

indem sich

$$\begin{array}{lllll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{B}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{C}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{D}'| & \text{in } \mathfrak{O}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{D}'|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{C}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{B}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{A}'| & \text{in } \mathfrak{P}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{C}| & \text{in } \mathfrak{a}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{B}| & \text{in } \mathfrak{b}
\end{array}$$

treffen. Die vier Perspectivitätscentra bilden selbst ein drittes Tetraëder, welches mit jedem der beiden ersten Tetraëder dieselbe Eigenschaft gemein hat, auf vierfache Weise perspectiv zu liegen, so dass die vier Perspectivitätscentra die Ecken des jedesmaligen dritten Tetraëders sind.

Denn der unmittelbare Anblick des vorigen Resultates ergiebt, dass sich

$$\begin{array}{lllll}
|\mathfrak{A}'\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{D}'\mathfrak{P}| & \text{in } \mathfrak{A}, \\
|\mathfrak{A}'\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{D}'\mathfrak{b}| & \text{in } \mathfrak{B}', \\
|\mathfrak{A}'\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{D}'\mathfrak{a}| & \text{in } \mathfrak{C}', \\
|\mathfrak{A}'\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{D}'\mathfrak{O}| & \text{in } \mathfrak{D}
\end{array}$$

treffen, und endlich auch, dass sich

$$
\begin{array}{lllll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{P}| & \text{in } \mathfrak{A}', \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{b}| & \text{in } \mathfrak{B}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{O}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{a}| & \text{in } \mathfrak{C}, \\
|\mathfrak{A}\mathfrak{P}|, & |\mathfrak{B}'\mathfrak{b}|, & |\mathfrak{C}'\mathfrak{a}|, & |\mathfrak{D}\mathfrak{O}| & \text{in } \mathfrak{D}'
\end{array}
$$

treffen.

Die drei Tetraëder haben also in der That die angegebene Lage, welche man als „desmische" bezeichnet. Herr C. Stephanos bemerkt a. a. O., dass ein solches System von drei Tetraëdern drei Flächen vierter Ordnung bildet, welche einem Büschel angehören, und dass dieselben in der Geometrie des Raumes dieselbe Rolle spielen, wie die vier Dreiecke, welche einem Büschel von Curven dritter Ordnung angehören, in der Geometrie der Ebene. Auf die vierfach-perspective Lage von zwei Tetraëdern hat schon Cremona in der Abhandlung: Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal no. 33 (R. Acad. dei Lincei, Mem. della classe di Scienze fis., math. e natur., 1877) hingewiesen. Eine Beschreibung zweier solcher Tetraëder habe ich bei Gelegenheit der Naturforscher-Versammlung in Baden-Baden (September 1879) gegeben (Tageblatt der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Baden-Baden 1879, S. 177: „Einige Sätze über das Tetraëder.")

In meiner Arbeit: „Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species" (Journal für reine und angewandte Mathematik von L. Kronecker und K. Weierstrass, Bd. 93 S. 169) komme ich ebenfalls auf das System von drei Tetraëdern in desmischer Lage und habe dort einige weitere Eigenschaften desselben nachgewiesen, deren unmittelbar ersichtliche Herleitung ich hier nicht wiederholen will, nämlich:

Nimmt man von den drei Tetraëdern eines desmischen Systems ein beliebiges heraus und von einem zweiten irgend ein Paar Gegenkanten, so begegnet dasselbe allemal nur einem Paar Gegenkanten des ersten Tetraëders, liegt dagegen mit jedem der beiden anderen Paare Gegenkanten hyperboloidisch-harmonisch. Von solchen drei Paaren von Gegenkanten der drei verschiedenen Tetraëder, welche sich begegnen, liegen allemal drei Kanten in einer Ebene und drei treffen sich in einem Punkte, welcher in der Ebene selbst liegt.

Ferner:

Nimmt man von drei Tetraëdern eines desmischen Systems irgend zwei heraus, so liegen sie auf vierfache Art gleichzeitig so im Raume, dass die vier Schnittlinien ihrer Seitenflächen sich in je einer Ebene befinden; diese vier Ebenen sind die vier Seitenflächen des dritten Tetraëders.

Die zwölf Treffpunkte, in welchen sich die Kanten der drei Tetraeder eines desmischen Systems begegnen, grup-

piren sich zu je dreien auf geraden Linien und zu sechsen als die drei Paar Gegenecken vollständiger Vierseite in Ebenen, und zwar giebt es 16 solcher Geraden und 12 solcher vollständigen Vierseite, deren Diagonalen die 18 Kanten der drei desmischen Tetraëder sind, indem jede Diagonale doppelt auftritt. U. s. w.

Das System von drei Tetraëdern in desmischer Lage tritt auch bei der Gruppe die 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung auf, was ich einer mündlichen Mittheilung meines Freundes und früheren Schülers, Herrn F. Schur in Leipzig, verdanke, nämlich:

Die 27 Geraden einer allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung liegen zu je dreien in 45 Ebenen; nimmt man eine derselben, δ, heraus, so enthält sie drei Gerade, durch deren jede ausser der Ebene δ selbst noch vier andere Ebenen hindurchgehen, welche Geradenpaare der Fläche enthalten, deren Durchschnittspunkte ein Tetraëder bilden. Die aus den drei Geraden in δ dadurch hervorgehenden drei Tetraëder befinden sich in desmischer Lage.

Die Richtigkeit dieser Bemerkung ist unmittelbar abzulesen aus dem „Nachweis der 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung", welcher ich in Crelle-Borchardt's Journal Bd. 62 S. 273 gegeben habe. Es ergiebt sich hieraus eine Eigenschaft der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, auf die vielleicht noch nicht hingewiesen ist, nämlich:

Die 27 Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung begegnen sich zu je zweien in 135 Punkten $\mathfrak{p}$; diese liegen bekanntlich zu je fünfen auf den 27 Geraden, bilden aber ausserdem eine derartige Configuration im Raume, dass sie zu je dreien auf 720 neuen Geraden l liegen und zu je sechsen in 540 Ebenen ε sich befinden, in deren jeder die sechs Punkte zu je dreien auf einer Geraden l liegen, also die vier Seiten eines vollständigen Vierseits bilden. Durch jede Gerade l gehen drei Ebenen ε, durch jeden Punkt $\mathfrak{p}$ gehen 24 Ebenen ε und 16 Gerade l.

Man hat also:

in jeder der 540 Ebenen ε: 4 Gerade l, 6 Punkte $\mathfrak{p}$;
durch jede der 720 Geraden l: 3 Ebenen ε
und auf jeder l: 3 Punkte $\mathfrak{p}$;
durch jeden der 135 Punkte $\mathfrak{p}$: 16 Gerade l, 24 Ebenen ε.

Breslau, 17. Januar 1883. H. Schroeter.

XIV. Construction der Tangenten äquidistanter Curven und der Tangentialebenen äquidistanter Flächen.

(Hierzu Taf. III Fig. 2–9.)

Die Curven, welche definirt sind als Ort der Punkte gleicher Abstände von zwei ebenen Curven *(äquidistante Curven)* und die als Ort der Punkte gleicher Abstände von zwei gegebenen Flächen definirten Flächen *(äquidistante Flächen)* wurden unseres Wissens bisher noch nicht allgemein untersucht. Im Folgenden handeln wir von der Construction ihrer Tangenten, Tangentialebenen und den eventuellen Consequenzen.

A. Aequidistante Curven.

1. In einem Punkte der äquidistanten Curve C zweier gegebenen Curven C_1, C_2 ist die Tangente zu construiren.

$M_1 M_2$ seien (Fig. 2) zwei unendlich nahe Punkte von C, $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ und $M_1 n_1$, $M_2 n_2$ die durch sie gehenden Normalen der Curven C_1, C_2 in ihren gleichfalls unendlich nahen Punkten m_1, m_2 und n_1, n_2, wobei also $M_1 m_1 = M_1 n_1$ und $M_2 m_2 = M_2 n_2$ ist. m_1 und n_1 nennen wir später immer die entsprechenden Punkte des Punktes M_1. Ihre Schnittpunkte μ und ν stellen dann die Krümmungsmittelpunkte für m_1 und n_1 vor, weshalb $\mu m_1 = \mu m_2$, $\nu n_1 = \nu n_2$. $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ sind die Tangenten in denselben Punkten und $M_1 M_2$ ist die Tangente der Curve C im Punkte M_1.

Von der Geraden $m_1 m_2$ lässt sich nur nachweisen, dass sie durch den Schnittpunkt σ der Geraden $M_1 M_2$ und $n_1 n_2$ geht. Wenn wir die Fusspunkte der aus M_1, M_2 auf $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ gefällten Perpendikel mit r_1, r_2 und s_1, s_2 bezeichnen und $\angle \mu m_2 m_1 = \alpha$, $\angle \nu n_2 n_1 = \beta$ setzen, so finden wir $M_1 r_1 = M_1 m_1 . \sin\alpha$, $M_1 s_1 = M_1 n_1 . \sin\beta$, woraus folgt, weil $M_1 m_1 = M_1 n_1$ ist, $M_1 r_1 : M_1 s_1 = \sin\alpha : \sin\beta = \mathfrak{k}$ und ebenso $M_2 r_2 : M_2 s_2 = \mathfrak{k}$, daher $M_1 r_1 : M_1 s_1 = M_2 r_2 : M_2 s_2$. Bezüglich der Geraden $m_1 m_2$ setzen wir voraus, dass sie $M_1 M_2$ in einem von σ verschiedenen Punkte σ_1 schneide. Aus den zwei Paaren ähnlicher Dreiecke $M_1 r_1 \sigma_1$, $M_2 r_2 \sigma_1$ und $M_1 s_1 \sigma$ und $M_2 s_2 \sigma$ folgen die Proportionen $M_1 r_1 : M_2 r_2 = M_1 \sigma_1 : M_2 \sigma_1$ und $M_1 s_1 : M_2 s_2 = M_1 \sigma : M_2 \sigma$, welche im Verein mit der vorhin gefundenen die folgende liefern: $M_1 \sigma_1 : M_2 \sigma_1 = M_1 \sigma : M_2 \sigma$ oder, da $M_1 \sigma_1 = M_1 M_2 + M_2 \sigma_1$ und $M_1 \sigma = M_1 M_2 + M_2 \sigma$, $[(M_1 M_2 + M_2 \sigma_1) - M_2 \sigma_1] : M_2 \sigma_1 = [(M_1 M_2 + M_2 \sigma) - M_2 \sigma] : M_2 \sigma$, d. h.: $M_2 \sigma_1 = M_2 \sigma$. Also fallen die Punkte σ und σ_1 zusammen oder die Tangenten $m_1 m_2$, $M_1 M_2$, $n_1 n_2$ schneiden sich in einem Punkte.

Um demnach die Tangente T (Fig. 3) im Punkte M der aequidistanten Curve C von C_1, C_2 zu bestimmen, haben wir die Tangenten τ_1, τ_2 der letztern in den M entsprechenden Punkten m und n zu construiren und ihren Schnittpunkt σ mit M zu verbinden. T halbirt den $\angle(\tau_1, \tau_2)$ und σ gehört jenem geometrischen Orte an, aus dessen Punkten sich an

die Curven C_1, C_2 Tangenten von gleicher Länge ziehen lassen. Aus dem letzteren Umstande erhält man eine einfache Construction der äquidistanten Curve zweier Kreise mittelst ihrer Chordale.

Von der Richtigkeit der obigen Tangentenconstruction überzeugt man sich auch durch eine einfache Ueberlegung, wie folgt: Indem nämlich die Curve C als durch die Bewegung eines Punktes entstanden zu denken ist, der von C_1 und C_2 immer gleich weit entfernt bleibt, bildet sie gleichsam eine Mittellinie dieser Curven; es wird daher auch die Richtung des beweglichen Punktes in irgend einem Moment der Bewegung, d. i. die Tangente seines Ortes in demselben, eine Mittellinie der Richtungen der Curven C_1, C_2 in den ihm entsprechenden Punkten derselben, d. i. eine Mittellinie der Tangenten in denselben sein müssen — mit anderen Worten — die Tangente im Punkte M von C ist die Halbirungslinie des Winkels der Tangenten der ihm entsprechenden Punkte von C_1, C_2 und sie geht daher durch ihren Schnittpunkt.

In den Schnittpunkten von C_1 und C_2 besitzt die Curve C Doppelpunkte, in denen sie sich orthogonal durchschneidet.

2. Ist insbesondere C_2 eine Gerade (Fig. 4), so hat man behufs Construction der Tangente T im Punkte M der äquidistanten Curve C von C_1 und der Geraden L die Tangente τ in dem Punkte m der C_1, welcher M entspricht, zu ziehen und den Schnittpunkt σ derselben mit L, mit dem Punkte M zu verbinden, so ist letztere Verbindungslinie die verlangte Tangente; sie halbirt den $\angle(\tau, L)$. Auch die im Punkte σ zu ihr senkrecht stehende Gerade ist eine Tangente von C und ihr Schnittpunkt mit der Normale Mm der Berührungspunkt. Sonach wird durch jede die L in einem Punkte σ schneidende Tangente Anlass zu zwei durch σ gehenden Tangenten von C geboten und wir gelangen zu dem Satze:

„Die äquidistante Curve C einer Geraden L und einer Curve C_1 m^{ter} Classe ist von der Classe $2m$."

Ist C_1 beispielsweise ein Kreis, also von der Classe 2, so ist C von der Classe 4, und in der That ist in diesem Falle C eine aus zwei Parabeln mit gemeinsamer Axe sich zusammensetzende Curve vierter Classe.

Bei näherer Betrachtung der Doppeltangenten, Asymptoten und der mit L parallelen Tangenten von C_1 erkennt man bald die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Die Zahl der Doppeltangenten und Asymptoten der vorliegenden äquidistanten Curve C ist gleich der doppelten Anzahl der Doppeltangenten und Asymptoten der Curve C_1. In der unendlich fernen Geraden der Ebene von C_1 und L besitzt C m vereinigte Tangenten, deren sämmtliche Berührungspunkte in jenem coincidiren, der in der Richtung einer zu L Senkrechten liegt; in letzterem berühren sich m Zweige der Curve C."

3. Schrumpft C_2 auf einen Punkt P zusammen (Fig. 5), so hat man wieder, um die Tangente des Punktes M zu finden, die Tangente in dem ihm entsprechenden Punkte m von C_1 zu construiren, sodann in P auf MP eine Senkrechte zu errichten und den Schnittpunkt σ dieser beiden Geraden mit M zu verbinden.

4. An die in 2 angegebene Construction der Tangenten der äquidistanten Curve C einer Geraden L und einer Curve C_1 lassen sich einige Betrachtungen über die Convexität und Concavität von C anschliessen.

Ist die Curve γ (Fig. 6) gegen die Gerade x concav und schreitet der Punkt m auf derselben gegen die rechte Seite von x fort, so werden die Winkel seiner jeweiligen Tangente mit dieser Seite immer kleiner; kehrt hingegen γ_1 der x die convexe Seite zu, so werden die Winkel der Tangenten des ebenso fortschreitenden Punktes immer grösser.

Erscheint nun der Theil $m_1 m_2$ von C_1 (Fig. 7) von L aus durchaus convex, so werden die Winkel α der aufeinander folgenden Tangenten mit der rechten Seite der L immer grösser, also $\frac{\alpha}{2}$ grösser; nachdem aber die von L verschiedenen Schenkel der $\angle \frac{\alpha}{2}$ die Curve C einhüllen, so wird diese convex, von L aus gesehen, erscheinen. Die Winkel $180^0 - \alpha$ und ihre Hälften mit der linken Seite von L werden immer kleiner, daher die Winkel ihrer Halbirungslinien mit der rechten Seite immer grösser und der von ihnen umhüllte zweite Theil von C ist gegen L ebenfalls convex.

Wenn der Theil $m_1 m_2$ von C_1 (Fig. 8) gegen die Gerade L concav ist, so findet man durch ähnliche Schlussweisen, dass diejenigen Tangenten, welche die kleineren Winkel zwischen L und den Tangenten von C_1 halbiren, einen concaven Theil von C einhüllen, während durch die Halbirungslinien der grösseren Winkel ein convexer Theil von C eingehüllt wird.

Die letztgewonnenen Ergebnisse liefern das folgende Criterium:

„Ist C_1 in dem, dem Punkte M entsprechenden Punkte m von C_1 gegen L convex, so ist C im Punkte M gegen L stets convex; wenn aber C_1 im Punkte m der Geraden L ihre concave Seite zukehrt, so ist C im Punkte M nur dann concav, wenn seine Tangente T den kleineren Winkel, welchen die Gerade L mit der Tangente τ des Punktes m bildet, halbirt; im entgegengesetzten Falle erscheint sie von L aus convex."

Schwieriger ist die Untersuchung der Concavität und Convexität in dem allgemeinen Falle der äquidistanten Curve C von C_1, C_2 (Fig. 3) in einem Punkte M, in Bezug auf τ_2 z. B.; doch liegt die Vermuthung nahe, dass dieselbe von der Concavität, resp. Convexität der Curven C_1 und C_2 in den Punkten m und n in Bezug auf τ_2 einerseits und von den Krüm-

mungsradien derselben Punkte andererseits abhängig sein wird, da andere Umstände, welche hierauf Einfluss äussern könnten, nicht denkbar sind.

B. Aequidistante Flächen.

1. Für die äquidistante Fläche F zweier Flächen F_1, F_2 ist eine Construction der Tangentialebene in einem ihrer Punkte aufzufinden.

Nachdem wir uns die äquidistante Fläche F als den Ort eines Punktes zu denken haben, der von F_1, F_2 immer gleiche normale Abstände behält oder stets in der Mitte zwischen beiden bleibt, so ist dieselbe gleichsam die Mittel- oder Halbirungsfläche des zwischen den Flächen F_1, F_2 enthaltenen Raumes. Das Element der Fläche F im Punkte M halbirt also den Raum zwischen den Elementen der Flächen F_1 und F_2 in den ihm auf denselben entsprechenden Punkten m und n. Nun ist aber das nach allen Richtungen erweiterte Element einer Fläche ihre Tangentialebene, folglich halbirt die Tangentialebene von F im Punkte M den Raum zwischen den Tangentialebenen von F_1 und F_2 in m und n, d. h. den von ihnen gebildeten Flächenwinkel, und geht daher durch ihre Schnittgerade.

Zur Bestimmung der Tangentialebene Te von F in einem Punkte M sind daher die Tangentialebenen τ_1^e und τ_2^e von F_1, F_2 in den demselben entsprechenden Punkten m, n zu suchen und ihre Schnittlinie Σ mit M durch eine Ebene zu verbinden.

Ein Beweis für diese Construction, ähnlich dem für das in A, 1 behandelte analoge Problem, kann hier nicht gegeben werden, aus dem einfachen Grunde, weil die Normalen einer Fläche in zwei benachbarten Punkten sich nur in ganz besonderen Fällen schneiden, nämlich wenn sie auf einer Krümmungslinie liegen, und um so weniger werden sich daher die Normalen in drei Nachbarpunkten begegnen können. Wohl lässt sich aber für den speciellen Fall, als F_1, F_2 Kugelflächen sind, ein solcher Beweis herstellen.

In der Durchschnittscurve von F_1 und F_2 besitzt die Fläche F jedesmal einen orthogonalen Selbstdurchschnitt.

2. Setzen wir F_2 als eine Ebene E voraus, so ist, wenn die Tangentialebene eines Punktes M von F construirt werden soll, zuvor die Tangentialebene des ihm entsprechenden Punktes m der Fläche F_1 zu suchen und ihre Schnittlinie Σ mit E, mit M durch eine Ebene zu verbinden. Die zur letzteren senkrechte Ebene, welche die Gerade Σ enthält, ist gleichfalls eine Tangentialebene von F, ihr Schnittpunkt mit der Normale des Punktes m der Berührungspunkt. Durch jede Tangentialebene der F_1 werden zwei sich in ihrer Schnittlinie Σ mit E schneidende Tangentialebenen der Fläche F veranlasst. Letztere Fläche ist die Enveloppe der Ebenen, welche die Winkel aller Tangentialebenen von F_1 mit der Ebene E halbiren.

„Die äquidistante Fläche F einer Fläche F_1 von der Classe m und einer Ebene E ist von der Classe $2m$. Von jeder Doppeltangential- und asymptotischen Ebene der F_1 rühren her zwei sich in einer Geraden der Ebene E schneidende und zu einander normale ebensolche Ebenen der Fläche F. Sie hat weiter die unendlich ferne Ebene zu einer m-fachen Berührungsebene, die m Berührungspunkte sind in jenem vereinigt, der in der Richtung einer zu E senkrechten Geraden liegt. In ihm berühren sich m Mäntel von F."

„Ist F_1 eine aufwickelbare Fläche, so ist auch F aufwickelbar, und wenn überdies speciell F_1 eine Kegelfläche ist, deren Scheitel in der Ebene E liegt, so wird F eine mit ihr concentrische Kegelfläche sein."

3. Wenn F_2 eine Gerade L wird, so haben wir zur Bestimmung der Tangentialebene der Fläche F im Punkte M jene von F_1 in dem ihm entsprechenden Punkte aufzufinden, sodann durch L zur Ebene (LM) eine senkrechte Ebene zu legen und die Schnittlinie beider Ebenen mit dem Punkte M durch eine Ebene zu verbinden.

Sei jetzt F_2 eine Gerade und F_1 eine Ebene, so findet man, dass die äquidistante Fläche beider eine Kegelfläche ist, welche den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene zum Scheitel hat. Da eine Gerade eine Fläche von der ersten Classe ist, so wird F eine Kegelfläche zweiter Classe, also zweiten Grades sein, ein bekanntes Resultat, dessen Richtigkeit auch in folgender Weise dargethan werden kann: Nennen wir L die Gerade und E die Ebene, nehmen in L einen beliebigen Punkt f an, betrachten denselben als Brennpunkt eines Rotationsparaboloids, dessen Directrixebene E ist, legen durch f zu L eine normale Ebene, so wird letztere das Paraboloid in einer Ellipse schneiden. Der Kegel nun, welcher dieselbe zur Leitlinie und den Schnittpunkt von L und E zum Scheitel hat, ist der Ort aller von L und E gleichweit abstehender Punkte, also vom zweiten Grade. Der Beweis hierfür ist leicht und kann daher unterbleiben. Handelt es sich darum, diesen Kegel wirklich zu construiren, so ist es einfacher, jene Leitlinie desselben zu bestimmen, welche in einer mit E parallelen Ebene E_1 liegt.

Wenn wir nämlich mit ll_1 (Fig. 9) die orthogonale Projection von L auf E bezeichnen und die Ebene (L, ll_1) als Zeichnungsebene annehmen, und wenn λ die Trace von E_1 auf derselben heisst, so haben wir die Winkel lSL und l_1SL durch die Geraden h und h_1 zu halbiren; dieselben schneiden λ in A, A_1, welche Punkte bereits zwei Axenendpunkte der in E_1 liegenden Leitellipse vorstellen. Denken wir uns die Ebene E_1 um AA_1 sammt der darin liegenden Ellipse in die Ebene (L, ll_1) umgelegt, so ist BB_1 die zweite Axe derselben; dabei ist $BB_1 \perp \lambda$ und B_1 ihr Schnittpunkt mit ll_1. ABA_1B_1 muss eine Ellipse sein, weil unsere Kegelfläche keine zu E parallelen Erzeugenden aufweisen kann.

4. Nun möge F_1 wieder eine beliebige Fläche vorstellen, während sich F_2 auf einen Punkt P reducirt hätte. M sei ein Punkt ihrer äquidistanten Fläche F.

In diesem Falle wird sich die Tangentialebene des Punktes M ergeben, wenn wir zunächst die Tangentialebene des ihm entsprechenden Punktes m auf F_1 suchen, im Punkte P auf MP eine senkrechte Ebene errichten und die Schnittgerade Σ beider Ebenen bestimmen. Die Verbindungsebene (Σ, M) ist die gesuchte Tangentialebene.

Brünn. CARL SCHIREK, Cand. prof.

XV. Ueber den Reye'schen Axencomplex.*

Diejenigen Geraden, deren conjugirte Polaren mit Bezug auf zwei Flächen zweiten Grades sich schneiden, bilden im allgemeinen Falle einen tetraedralen Complex. Wenn die eine dieser Flächen in den unendlich fernen imaginären Kugelkreis degenerirt, so ist der Complex die Gesammtheit der Geraden, die auf ihren Polaren bezüglich der andern Fläche senkrecht stehen. Für eine Fläche mit Mittelpunkt bleibt der Complex ein tetraedraler, bei parabolischen Flächen tritt ein anderer Complex auf.

1. Zwei Flächen zweiten Grades F_1, F_2, bezogen auf ihr gemeinsames Polarquadrupel als Fundamentaltetraeder, mögen in Punktcoordinaten dargestellt sein durch

$$1)\qquad \Sigma a_i x_i^2 = 0, \quad \Sigma b_i x_i^2 = 0.$$

Eine Raumgerade p mit den Coordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ hat mit Bezug auf F_1, F_2 zwei Polaren p', p'' mit den Coordinaten $p'_{ik} = a_l a_m p_{lm}$, $p'_{ik} = b_l b_m p_{lm}$ $(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$. Diese Polaren schneiden sich, wenn $\Sigma p'_{ik} p''_{lm} = 0$, d. h. wenn

$$2)\qquad (a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2) p_{12} p_{34} + (a_1 a_3 b_4 b_2 + a_4 a_2 b_1 b_3) p_{13} p_{42} + . = 0,$$

welche Gleichung die des genannten tetraedralen Complexes ist. Bekanntlich treffen alle Complexstrahlen die Ebenen $x_i = 0$ des Fundamentaltetraeders in je vier Punkten S_i von constantem Doppelverhältnisse. Der Werth desselben ist

$$3)\qquad d = (S_1 S_2 S_3 S_4) = \frac{S_1 S_3}{S_2 S_3} : \frac{S_1 S_4}{S_2 S_4} = \frac{p_{13}}{p_{23}} : \frac{p_{14}}{p_{24}} = \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_2 b_4 - a_4 b_2)}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)};$$

dieses Doppelverhältniss ist zugleich dasjenige der vier Ebenen aus p nach den Ecken des Fundamentaltetraeders.

Zwei Flächen $\Sigma(a_i + \lambda b_i) x_i^2 = 0$, $\Sigma(a_i + \mu b_i) x_i^2 = 0$ des Büschels F_1, F_2 ergeben denselben Complex, wie sich aus 3) sofort ergiebt. Ebenso

---

* Vergl. Herrn Reye's Geometrie der Lage, II, 1. Auflage 1868 und 2. Auflage 1882.

darf man F_1, F_2 ersetzen durch irgend zwei Flächen, welche mit den gegebenen die gemeinsame umschriebene Developpable haben.

Mit der bestimmten Fläche F_1 bilden ∞^2 andere Flächen denselben Complex. Ist derselbe nämlich zunächst bestimmt durch F_1, F_2, so ersetze man F_2 durch $F_1 + \lambda F_2$. Und ebenso kann man letztere Fläche ersetzen durch jede der ∞^1 Flächen der durch F_1 und $F_1 + \lambda F_2$ bestimmten Schaar. Somit gehören zu F_1 im Ganzen ∞^2 Flächen, welche man auch auf dualem Wege findet. Sie bilden ebensowohl ∞^1 Büschel, deren Grundcurven auf F_1 liegen, als ∞^1 Schaaren, deren gemeinsame Developpabeln F_1 umschrieben sind.

Das Coordinatentetraeder ist Polarquadrupel für ∞^3 Flächen zweiten Grades und zugleich Fundamentaltetraeder für ∞^1 tetraedrale Complexe. Diese ∞^3 Flächen gruppiren sich auf ∞^1 Arten in je ∞^5 Paare, welche je denselben Complex ergeben.

Bezeichnet man irgend eines der ∞^5 Paare mit F_1, F_2, so gehören ohne Zweifel alle Tangenten der Schnittcurve und alle Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln von F_1, F_2 dem Complexe an, weil ihre Polaren bezüglich beider Flächen sich stets schneiden.

2. Die eine der gegebenen Flächen sei nunmehr ausgeartet in den imaginären Kugelkreis, die andere, F, sei eine Fläche mit Mittelpunkt von der Gleichung

$$4)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Eine Gerade p sei die Verbindungslinie der Punkte x, y, z; x', y', z', so hat man für die Richtungscosinus derselben

$$p_{12}:p_{13}:p_{14}=(x'-x):(y'-y):(z'-z)=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma;$$

für die conjugirte von p mit Bezug auf die Fläche 4) hat man

$$p'_{12}:p'_{13}:p'_{14}=a^2p_{34}:b^2p_{42}:c^2p_{23}=\cos\alpha':\cos\beta':\cos\gamma'.$$

Hieraus ergiebt sich als Bedingung der normalen Lage der beiden Conjugirten, bezüglich als Complexgleichung

$$5)\qquad a^2p_{12}p_{34}+b^2p_{13}p_{42}+c^2p_{14}p_{23}=0.$$

Das Fundamentaltetraeder besteht jetzt aus den drei Symmetrieebenen von F ($x=0$, $y=0$, $z=0$) zusammen mit der unendlich fernen Ebene. Sind X, Y, Z die Schnittpunkte einer Complexgeraden p mit den Symmetrieebenen, so sind die durch diese drei Punkte bedingten Theilverhältnisse constant und zwar ist

$$6)\qquad d=\frac{XZ}{XY}=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\quad\text{oder}\quad XY:XZ:YZ=(a^2-b^2):(a^2-c^2):(b^2-c^2);$$

für jeden Strahl des Axencomplexes verhalten sich somit die Abschnitte XY, XZ, YZ, zwischen den Symmetrieebenen, zu einander wie die Quadrate der Excentricitäten der Hauptschnitte (in $z=0$, $y=0$, $x=0$) der gegebenen Fläche.

Die Punkte X, Y, Z sind aequidistant, wenn $d=-1$, $\frac{1}{2}$, 2 (z. B. wenn $b^2+c^2=2a^2$). Für eine Rotationsfläche zerfällt der Complex in zwei specielle lineare, deren Directricen die Rotationsaxe und deren Conjugirte für den imaginären Kugelkreis sind. Für die Kugel wird der Complex unbestimmt.

Nach den Erläuterungen in 1) müssen die Complexgeraden ihre Polaren mit Bezug auf ∞^2 Flächen zweiten Grades rechtwinklig kreuzen. Hierunter befindet sich vor Allem die Schaar der Flächen, die mit der gegebenen und dem imaginären Kugelkreise dieselbe Developpable haben, d. i. die Schaar der zu der gegebenen Fläche confocalen Flächen. Jede derselben bestimmt mit der degenerirten Fläche einen Büschel, dessen Flächen ebenfalls den Complex als Axencomplex bestimmen: Die Geraden in 5) kreuzen ihre Polaren mit Bezug auf die Schaar der confocalen Flächen und deren ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden, zugleich unter rechtem Winkel.* Die Gleichungen aller dieser Flächen sind

$$7)\qquad \frac{\mu x^2}{a^2+\lambda}+\frac{\mu y^2}{b^2+\lambda}+\frac{\mu z^2}{c^2+\lambda}=1.$$

Unter ihnen befinden sich in $x=0$, $y=0$, $z=0$ je ∞^1 Kegelschnitte und der Complex erfüllt auch mit Bezug auf diese jene metrische Eigenschaft.

Wählt man von einer jener Flächen 7) zwei Focalkegelschnitte, bestimmt man alsdann für die Punkte der Schnittlinie ihrer Ebenen die Polaren nach beiden Kegelschnitten, so erhält man die Directricenpaare von ∞^1 linearen Congruenzen des Complexes. (Denn der Complex besteht auch aus denjenigen Geraden, deren Polaren nach je zwei Flächen einer confocalen Schaar sich schneiden.)

Den Axencomplex für einen Kegelschnitt c (z. B. in $z=0$) construirt man einfach wie folgt. Ein Punkt P in der Ebene von c ergebe die Polare p; aus P fälle man auf p die Senkrechte s. Die längs s auf die Ebene von c errichtete senkrechte Ebene sei S, so besteht der Büschel PS aus Complexgeraden und bestimmt unmittelbar drei lineare Congruenzen des Complexes etc.

Die vorhin genannte Gerade s ist Complexstrahl.** Sie trifft $x=0$, $y=0$, $z=0$ in den Axen von c und $(z=0)$ in einem Punkte, der in P liegend gedacht werden muss. Die Theilverhältnisse der Strecken zwischen diesen drei Punkten haben constanten Werth, woraus folgt:

Wenn man von einem Punkte P in der Ebene eines Kegelschnittes c auf seine Polare nach c eine Senkrechte fällt und damit die Axen von c schneidet, so verhalten sich die Abschnitte von P bis nach den Axen und das Stück zwischen den Axen zu einander umgekehrt wie die

* Der Complex wird offenbar auch gebildet durch die Tangenten der Krümmungslinien dieser Flächen.

** Jede Gerade in der Ebene von c ist eine Linie s.

Quadrate der Axen und das Quadrat der Excentricität von c. — Diesen Satz kann man aber auf Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt ausdehnen. Alsdann fällt man von einem Punkte P im Raume eine Senkrechte s auf die Polarebene Π von P mit Bezug auf eine Fläche F. Diese s gehört dem Complex 5) stets an, weshalb auf ihr die Abschnitte zwischen den Symmetrieebenen jene bekannten constanten Theilverhältnisse bilden. Aber auch die Abschnitte vom Pol P gemessen bis zu den Symmetrieebenen von F verhalten sich stets zu einander wie die Quadrate der Hauptaxen von F, die zu jenen Ebenen senkrecht stehen.

3. Es soll nunmehr der Axencomplex für ein Paraboloid betrachtet werden. Das Paraboloid habe die Gleichung

$$8)\qquad b y^2 + c z^2 = 4 b c x.$$

Für die Polare einer Geraden p hat man jetzt

$$p'_{12} : p'_{13} : p'_{14} = p_{34} : 2 c p_{14} : -2 b p_{13} (= \cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma')$$

und der Complex ist

$$9)\qquad p_{12} \cdot p_{34} + 2(c-b) p_{13} p_{14} = 0,$$

also [(11)(22)], Nr. 29. Der unendlich ferne Punkt in $y = z = 0$ ist der doppelte Ausnahmepunkt, die unendlich ferne Ebene ist die doppelte Ausnahmeebene. Die einfachen Ausnahmeelemente sind die Richtungen von $x = z = 0$, $x = y = 0$, ferner die Ebenen $y = 0$, $z = 0$. Der Complex besteht insbesondere aus einer Schaar von linearen Congruenzen, deren Directricen in $z = 0$ parallel mit $x = z = 0$ und in $y = 0$ parallel mit $x = y = 0$ liegen und deren senkrechter Abstand (in $y = z = 0$) gleich ist $2(c-b)$. Es sind das die Paare von Polaren der Punkte in $y = z = 0$ mit Bezug auf die Focalkegelschnitte in $y = 0$, $z = 0$. — Hieraus folgt: Die Projectionen der Strecken auf allen Complexgeraden, zwischen den Symmetrieebenen des Paraboloids, auf dessen Hauptaxe sind stets gleich dem doppelten Abstande der Brennpunkte der Parabeln in den Symmetrieebenen.

Der Complex bleibt derselbe für alle Paraboloide mit derselben Axe, für welche die Distanz der Brennpunkte in den Symmetrieebenen denselben Werth $b - c$ hat. Diese Paraboloide bestehen aus den confocalen des gegebenen,

$$(b+\lambda) y^2 + (c+\lambda) z^2 = 4(b+\lambda)(c+\lambda)(x+\lambda),$$

und ihren ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden, die jetzt durch Parallelverschiebung längs $y = z = 0$ aus den confocalen hervorgehen. Diese ∞^2 Paraboloide sind dargestellt durch

$$10)\qquad (b+\lambda) y^2 + (c+\lambda) z^2 = 4(b+\lambda)(c+\lambda)(x+\mu).$$

Der Complex geht durch Parallelverschiebung längs $y = z = 0$ in sich selbst über und lässt sich in vierfacher Weise durch lineare Congruenzen erzeugen.

Dass man für die Parabel wie für das Paraboloid im Wesentlichen denselben Complex erhält, ist einleuchtend. Es mögen hier überhaupt nur noch folgende Sätze hervorgehoben werden. Fällt man bei einer Parabel eine Senkrechte vom Pol auf die Polare und projicirt man die Strecke auf dieser Senkrechten vom Pol bis zu der Axe auf die Axe, so ist diese Projection stets gleich der Entfernung des Brennpunktes von der Directrix. Fällt man bei einem Paraboloid eine Senkrechte s vom Pol P auf seine Polarebene, so sind die Projectionen der Strecken auf s, gemessen von P bis zu den Symmetrieebenen der Fläche, auf die Hauptaxe, gleich den Parametern der Hauptschnitte in umgekehrter Reihenfolge.

4. Führt man oben, an Stelle der conjugirten Polaren mit Bezug auf Flächen zweiten Grades, die Polargeraden bei allgemeinen räumlichen Reciprocitäten ein, so treten wieder die nämlichen Complexe auf.

Hottingen b. Zürich. Dr. A. Weiler.

XVI. Beweis des projectivischen Satzes von Schlömilch (Jahrg. XXVII S. 380).

Der auf FG liegende Durchschnittspunkt von AC mit $A'C'$ sei M, der von AC' mit $A'C$ sei P. Dann sind die Strahlen OM und OP zu OA und OC harmonisch, folglich auch die Ebenen OFM und OFP zu OFA und OFC, sowie OGM und OGP zu OGA und OGC. Ferner sind die Strahlen MO, MP harmonisch zu MA und MA', also auch die Ebenen OFG, PFG zu AFG und $A'FG$. Wendet man dieselbe Betrachtung auf den Durchschnittspunkt Q von BD' mit $B'D$ an, so ergiebt sich, dass Q der gemeinschaftliche Punkt derselben drei Ebenen ist wie P.

Erfurt. Prof. Quidde.

Berichtigung.

In der Abhandlung „Ueber eine Erweiterung der Mariotte- und Gay-Lussac-schen Gesetze", Bd. 26, ist in dem Zahlenbeispiel auf S. 380 Z. 9 $s = 22,17$ statt $s = 1,529$ zu setzen und wird dadurch das Resultat $= c.104$ gr $= c. \frac{1}{10}$ Atmosph.; durch die entsprechende Aenderung auf S. 381 Z. 26 wird $p = 115,4$ gr $= c. \frac{1}{9}$ Atmosph.

Dr. Biehringer.

XI.

Geometrische Untersuchungen über den Verlauf der elliptischen Transcendenten im complexen Gebiete.

Von

Oskar Herrmann.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—13.

I. Die Fragestellung. Allgemeines über stationäre Strömung und conforme Abbildung.

Durch die Deutung der complexen Grössen in einer Ebene wird die Theorie der Functionen eines complexen Argumentes mit zwei anderen mathematischen Disciplinen in Verbindung gebracht; einerseits mit der mathematischen Physik durch das Problem der stationären Strömung oder, was dasselbe ist, des logarithmischen Potentials, und andererseits mit der Geometrie durch das Problem der conformen Abbildung. Aus diesem Zusammenhange erwachsen für die Functionentheorie zweierlei Aufgaben: 1. die stationären Strömungen[1]) und conformen Abbildungen, welche durch schon bekannte Functionen bewirkt werden, zu untersuchen, und 2. neue Functionen zu construiren, indem man umgekehrt von gewissen Problemen der stationären Strömung oder conformen Abbildung ausgeht. Die Aufgabe, welche in vorliegender Arbeit[2]) behandelt wird, gehört zu denen der ersten Art. Es handelt sich darum, jene Probleme für die hauptsächlichsten in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftretenden Functionen zu lösen. Durch eine derartige Untersuchung der Functionen werden nicht nur interessante Beispiele für conforme Abbildungen und stationäre Strömungen geliefert, sondern auch umgekehrt — und das ist der Hauptzweck — einerseits gewisse Eigenschaften der behandelten Functionen deutlicher erkannt und gleichsam der Anschauung näher gebracht, und andererseits allgemeine schon bekannte functionentheoretische Sätze illustrirt und vielleicht neue vorbereitet[3]). In ähnlicher Weise kann man alle eindeutigen Functionen

1) Der bequemeren und lebendigeren Vorstellung halber werden wir im Folgenden immer nur von stationären Strömungen und nicht von Fernewirkungen sprechen, den Begriff des logarithmischen Potentials also gänzlich vermeiden.

2) Dieselbe ist eine Umarbeitung einer der philosophischen Facultät der Universität Leipzig 1882 eingereichten Preisarbeit.

3) Vergl. Abschnitt VI.

der Analysis behandeln, was bis jetzt nur für einen kleinen Theil derselben geschehen ist[1]). Ehe wir unsere eigentliche Aufgabe in Angriff nehmen, sei es gestattet, die Principien, wie sie im Folgenden zur Anwendung kommen, kurz auseinanderzusetzen[2]).

Wir beginnen mit der conformen Abbildung. Setzen wir zur Abkürzung w für $u+iv$, z für $x+iy$, so wird durch eine Function $w=f(z)$, welche der Einfachheit halber eindeutig sein möge, die w-Ebene conform, d. h. so auf die z-Ebene abgebildet, dass entsprechende Gebiete in den kleinsten Theilen einander ähnlich sind. Ausgeschlossen von dieser Conformität sind die sogenannten Kreuzungspunkte[3]). Unter den Kreuzungspunkten verstehen wir solche Punkte der z-Ebene, für welche $\frac{dw}{dz}=0$ ist. Um gleich den allgemeinen Fall zu betrachten, wollen wir annehmen, dass für einen bestimmten Punkt z_0

$$\frac{dw}{dz}=\frac{d^2w}{dz^2}=\ldots=\frac{d^\alpha w}{dz^\alpha}=0, \quad \frac{d^{\alpha+1}w}{dz^{\alpha+1}}\neq 0$$

sei. Dann entspricht einem Winkel von der Grösse φ in dem zugehörigen Punkte w_0 ein solcher von der Grösse $\frac{\varphi}{\alpha+1}$ im Punkte z_0. Einem Curvenstücke, welches einfach durch den Punkt w_0 hindurchgeht, entsprechen demnach $\alpha+1$ Linienstücke, welche sich im Punkte z_0 unter gleichen Winkeln $\left(\frac{180^0}{\alpha+1}\right)$ überkreuzen. Einen solchen Punkt nennen wir einen Kreuzungspunkt von der Multiplicität α[4]).

1) Eine Zusammenstellung der einfachsten schon behandelten Functionen findet man in dem in der nächsten Anmerkung citirten Buche des Herrn Holzmüller. Von den höheren Functionen sind vor Allem die elliptischen Modulfunctionen zu erwähnen (Klein, Math. Annal. 14, S. 119 flgg.)

2) Ich stütze mich hauptsächlich auf die von Herrn Prof. Klein im Winter 1880/81 und im Sommer 1881 an der Universität zu Leipzig gehaltene Vorlesung über Functionentheorie in geometrischer Behandlungsweise. Dieselbe ist zum Theil in dessen Schrift: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882", reproducirt. Ferner vergleiche man z. B. das Buch des Herrn Holzmüller: „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik", Leipzig 1882", welches sich durch eine grosse Anzahl interessanter Figuren und reiche Angaben der älteren Literatur auszeichnet.

3) Dieser Name rührt von Herrn Klein her (a. a. O. S. 3); ferner vergl. Holzmüller a. a. O. S. 77. Wir berücksichtigen im Text zunächst nur solche Kreuzungspunkte, in welchen die Function endlich bleibt, indem wir die Unendlichkeitspunkte besonders besprechen.

4) Die den Kreuzungspunkten der z-Ebene entsprechenden Punkte in der w-Ebene sind die sogenannten Verzweigungspunkte (Windungspunkte). Einem ganzen Umlauf um einen Kreuzungspunkt von der Multiplicität α entsprechen $\alpha+1$ Umläufe um den zugehörigen Verzweigungspunkt. So kommt es, dass, um die

Das Problem der conformen Abbildung soll nun im Folgenden immer in dem Sinne erledigt werden, dass wir fragen, welche Curven der z-Ebene den Geraden $u=0$ und $v=0$ der w-Ebene entsprechen. Herr Holzmüller überträgt im genannten Buche immer ein ganzes System von Curven mit dem zugehörigen Orthogonalsystem. Doch kommt es uns nur auf den allgemeinen Charakter der Abbildung an. Wir haben nicht das Studium einzelner Curvensysteme, sondern die Wertheverteilung einer Function in der complexen Ebene im Auge, um dann mit der Abbildung die ganze Function gleichsam anschaulich vor uns zu haben[1].

Was zweitens den Zusammenhang der Theorie der Functionen eines complexen Argumentes mit der Theorie der stationären Strömungen betrifft, so ist derselbe in dem Satze enthalten, dass die Curven $v=const.$ der z-Ebene als Strömungslinien, die Curven $u=const.$ als Niveaulinien (oder auch gerade umgekehrt) einer stationären Strömung in der z-Ebene betrachtet werden können. Das Curvensystem $v=const.$ der w-Ebene repräsentirt natürlich selbst die Strömungslinien einer stationären Strömung, und zwar wollen wir für's Folgende festsetzen, dass das Fluidum im Sinne der positiven u-Axe (von links nach rechts) strömt. Das Problem nun, das wir im Folgenden zu lösen haben, besteht darin, die Strömungslinien der z-Ebene anzugeben, d. h. die w-Ebene mit den Curven $v=const.$ mit Hilfe der zu untersuchenden Function conform auf die z-Ebene zu übertragen.

In der w-Ebene läuft durch jeden Punkt (mit Ausnahme des Punktes $w=\infty$) eine einzige Strömungslinie. Ebenso wird durch jeden Punkt der z-Ebene, mit Ausnahme der Kreuzungs- und Unendlichkeitspunkte, eine einzige Strömungscurve hindurchlaufen. In einem Kreuzungspunkte von der Multiplicität α überkreuzen sich $\alpha+1$ Strömungscurven, indem auf $\alpha+1$ sich unter gleichen Winkeln $\left(\frac{360^0}{\alpha+1}\right)$ treffenden Linien die Flüssigkeit zu- und auf den $\alpha+1$ Linien, welche jene Winkel halbiren, wieder wegströmt[2]. Durch den Punkt $w=\infty$ dagegen laufen unendlich viele Strömungslinien, die sich

---

Beziehung beider Ebenen eindeutig zu machen, man sich nach Riemann im Verzweigungspunkte $\alpha+1$ Blätter im Cyclus zusammenhängend denkt. Wenn man sich dies für jeden Verzweigungspunkt der w-Ebene vorstellt, so bilden diese Blätter in ihrer Gesammtheit die zugehörige Riemann'sche Fläche, auf welcher dann z eindeutig ist.

1) Es leisten diese Abbildungen gerade das Umgekehrte, wie die Riemann'schen Flächen. Diese verwandeln eine vieldeutige Function in eine eindeutige, jene zeigen, wie z vieldeutig in w ist, indem sie die verschiedenen Punkte z leicht auffinden lassen, welche einem bestimmten Punkte w entsprechen. Wenn eine Function durch die zugehörige Riemann'sche Fläche eindeutig gemacht worden ist, finden dann auf dieser die Betrachtungen des Textes ihre Stelle.

2) Klein a. a. O. S. 3.

sämmtlich in diesem Punkte berühren. Wir sehen daraus, dass die Punkte, in denen w unendlich gross wird, einer besonderen Berücksichtigung bedürfen. Man findet[1]: Wird die Function für einen Punkt z_0 n-fach algebraisch unendlich, so strömt von diesem Punkte aus nach n Richtungen, die unter sich gleiche Winkel bilden, je auf unendlich vielen sich in z_0 berührenden Strömungslinien die Flüssigkeit fort, und strömt in denjenigen n Richtungen, welche die genannten Winkel halbiren, in derselben Weise auf den Punkt zu[2].

Die obige Festsetzung, dass die zu betrachtende Function eindeutig sei, wollen wir nun dahin erweitern, dass dieselbe um constante Periodicitätsmoduln vieldeutig sein kann. Z. B. gestatten wir der Function, an einzelnen Stellen sich wie $C.\log z$ für $z=0$ zu verhalten. Wir fragen nach dem Verlauf der Strömung in einem solchen Punkte. Wir haben den Satz[3]: Verhält sich die Function an einer Stelle z_0 wie $\log(z-z_0)$, so läuft das Fluidum vom Punkte z_0 aus nach allen Seiten hinweg. Wir nennen einen solchen Punkt, um uns der physikalischen Anschauungsweise möglichst genau anzuschliessen, einen Quellpunkt (von positiver Ergiebigkeit, Ausströmungspunkt).

Um nun sagen zu können, wie die Strömung sich in einem Punkte verhält, in welchem die Function wie $\log(z-z_0)$, multiplicirt mit einer Constanten, unendlich wird, erwähnen wir gleich ein allgemeines Princip. Fügen wir der Function eine additive Constante zu, so wird die Strömung, da dann das Curvensystem $v(x,y)=const.$ dasselbe bleibt, keine Aenderung erleiden. Ebenso wird eine multiplicative Constante, wenn sie reell und positiv ist, auf das Strömungssystem ohne Einfluss sein, da wir nur auf die Curven und nicht auf die Intensität der Strömung achten. Dagegen wird eine negative und allgemein eine complexe multiplicative Constante die Strömungscurven ändern. Ist z. B. die Function $w=e^{i\varphi}.f(z)$ zu betrachten, so führen wir zunächst die Hilfsfunction $W=f(z)$ ein. Dann ist $w=e^{i\varphi}.W$, also entsprechen den Curven $v=const.$ die Curven $U\sin\varphi+V\cos\varphi=const.$, d. h. gerade Linien, welche mit den Strömungslinien $V=const.$ den Winkel $-\varphi$ bilden (d. h. einen Winkel φ rechts herum gemessen). Das Entsprechende wird in der z-Ebene statthaben,

---

1) Klein a. a. O. S. 8.

2) Ein solcher Punkt ist weiter nichts, als ein Kreuzungspunkt von der Multiplicität $n-1$, d. h. ein Punkt, in welchem ein Winkel nur den n^{ten} Theil des entsprechenden Winkels in der w-Ebene beträgt, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass er dem unendlich fernen Punkte der w-Ebene entspricht. Dass gerade die Punkte $w=\infty$ so bevorzugt sind, liegt natürlich in der Wahl der Curven $v=const.$ als Strömungscurven der w-Ebene begründet; wir könnten ebenso gut eine andere Strömung zu Grunde legen.

3) Klein a. a. O. S. 6; Kirchhoff, Poggend. Annalen 64 (1845), S. 502.

und so sehen wir, dass die der Function $w = e^{i\varphi}.f(z)$ entsprechenden Strömungslinien mit den Strömungslinien, welche der Function $w = f(z)$ entsprechen, den Winkel $-\varphi$ bilden, also die (isogonalen) Trajectorien der letzteren in Bezug auf den Winkel $-\varphi$ sind. Eine negative multiplicative Constante insbesondere wird den Sinn der Strömung umkehren.

Nun können wir unmittelbar angeben, welchen Verlauf die Strömungslinien in der Nähe eines Punktes z_0 nehmen, in welchem sich die Function wie $A.e^{i\varphi}.log(z-z_0)$ (A reell und >0) verhält. Liegt φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so werden dieselben durch Ansätze von logarithmischen Spiralen dargestellt werden, welche bei einem Umlauf rechts herum sich von dem betreffenden Punkte entfernen (Strudelpunkt von positiver Ergiebigkeit). Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir in erster Annäherung kleine Kreise um den betreffenden Punkt, auf welchen das Fluidum herumläuft (Wirbelpunkt). Für $\varphi = \pi$ haben wir einen Quellpunkt von negativer Ergiebigkeit u. s. w.

Es sei schliesslich noch der Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit in den einzelnen Punkten strömt, Erwähnung gethan. Dieselbe ist durch den Ausdruck $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ gegeben [1]). Daraus ergeben sich für im Endlichen gelegene Punkte — und andere kommen im Folgenden nicht in Betracht — folgende Sätze (welche man ableitet, indem man die einfachsten geeigneten Functionen für die betreffenden Punkte in Bezug auf den obigen Ausdruck untersucht):

1. In einem Kreuzungspunkte von der Multiplicität α wird die Geschwindigkeit unendlich klein von der Ordnung α.
2. In einem Quellpunkte ist die Geschwindigkeit unendlich gross von der ersten Ordnung.
3. In einem n-fachen algebraischen Unendlichkeitspunkte ist die Geschwindigkeit unendlich gross von der Ordnung $n+1$.

II. Die elliptischen Integrale.

1. Die Riemann'sche Fläche und das Rechteck. Das Integral erster Gattung.

Unter einem elliptischen Integrale versteht man allgemein ein Integral von der Form $\int R(w, z)\,dz$, wo R eine rationale Function bedeutet und w und z durch eine algebraische Gleichung vom Geschlechte 1 ver-

1) Vergl. Kirchhoff, Vorles. über mathem. Physik, S. 170.

bunden sind. Man kann ein solches Integral bekanntlich, abgesehen von einem algebraisch-logarithmischen Theile, in eine Summe von gewissen einfachen elliptischen Integralen zerlegen (erster, zweiter und dritter Gattung), und für diese einfachen Integrale sollen im Folgenden die zugehörigen stationären Strömungen aufgestellt werden. Von den verschiedenen Normalformen, welche jene Integrale im Laufe der Zeit erhalten haben, bedienen wir uns der sogenannten Riemann'schen Normalform, d. i. derjenigen, in welcher die auftretende Irrationalität die Form

$$\sqrt{Z} = \sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}$$

besitzt, und zwar betrachten wir nur den Fall, für welchen $\varkappa^2$ reell ist.

Um den Verlauf der Integrale vollständig übersehen zu können, construiren wir uns zunächst die Riemann'sche Fläche über der z-Ebene, auf welcher die Function $\sqrt{Z}$ eindeutig ist[1]). Dieselbe wird, da zu jedem Werthe von z zwei Functionswerthe gehören, aus zwei Blättern bestehen. Nur in den Verzweigungspunkten, d. i. in den Punkten $z = 0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \infty$, weist die Function blos einen Werth auf. Durch Umkreisung eines Verzweigungspunktes werden wir aus dem einen ins andere Blatt gelangen. Daher müssen die Blätter längs gewisser Linien (Verzweigungsschnitte), die von den Verzweigungspunkten ausgehen, über's Kreuz zusammenhängen, und zwar wollen wir annehmen, dass die Verzweigungsschnitte von $z = -\infty$ bis 0 und von $z = 1$ bis $\frac{1}{\varkappa^2}$ gelegt sind. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, setzen wir fest, dass $\varkappa^2$ zwischen 0 und 1 liege. Die beiden Blätter seien dadurch auseinandergehalten, dass wir dasjenige als das obere betrachten, in welchem $\sqrt{Z}$ für reelle Werthe zwischen $z = 0$ und 1 positiv ist.

Auf der so construirten Riemann'schen Fläche ist $\sqrt{Z}$ eindeutig. In ihr könnten wir nun die Strömungen, welche den Integralen entsprechen, betrachten. Denn die Integrale sind auf dieser Fläche zwar nicht eindeutig, aber doch nur um constante Periodicitätsmoduln vieldeutig, und auf additive Constanten kommt es, wie wir wissen, bei der Strömung nicht an. Doch gehen wir im Folgenden noch einen Schritt weiter, indem wir die Strömungen auf einer Fläche im Raume studiren, auf welche die Fläche über der z-Ebene eindeutig conform bezogen ist, nämlich auf der einfachen Ringfläche. Den Durchgangspunkt hierzu bildet das Rechteck, indem wir die Riemann'sche Fläche mit Hilfe der Function $w = \int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ (des In-

1) Für die Legendre'sche Irrationalität s. z. B. Königsberger, Ellipt. Functionen I, S. 300.

tegrals erster Gattung) auf die w-Ebene abbilden[1]). Wir werden sehen, dass dann diese Fläche eindeutig umkehrbar und conform auf ein Rechteck bezogen ist.

Wir gehen also jetzt dazu über, die Fläche über der z-Ebene mit Hilfe der Function

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

in die w-Ebene zu übertragen (vergl. Fig. 1)[2]).

Wir lassen z auf der Axe der reellen Zahlen wandern und richten unser Augenmerk auf die Zuwüchse, welche w in jedem Augenblicke erhält. Im Punkte $z = 0$ hat w den Werth Null. Wir gehen nun auf dem oberen Blatte, indem wir immer auf der Axe der reellen Zahlen bleiben, zunächst von $z = 0$ bis $z = 1$. Auf diesem Wege wächst w und erhält für $z = 1$ den positiven Werth $\omega = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{Z}}$. Lassen wir nun z noch weiter zunehmen, so wird der Zuwachs von w rein imaginär bis zum Punkte $z = \frac{1}{\varkappa^2}$. Setzen wir daher die rein imaginäre Grösse $\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega'$, so entspricht dem Wege von $z = 1$ bis $z = \frac{1}{\varkappa^2}$ der Weg von $w = \omega$ auf der Geraden $u = \omega$ bis $w = \omega + \omega'$. Wenn wir ferner bedenken, dass von $z = \frac{1}{\varkappa^2}$ bis $z = \infty$ die Zuwüchse von w wieder reell, und von $z = -\infty$ bis $z = 0$ rein imaginär sind, und dass wir bei diesem Wege in der z-Ebene keinen Verzweigungspunkt umkreist, also keinen Periodicitätsmodul zu beachten haben, so bemerken wir unmittelbar, dass die Axe der reellen Zahlen sich auf die Contour eines Rechtecks mit den Seiten ω, $\frac{\omega'}{i}$, die positive Halbebene des oberen Blattes (positiv nennen wir diejenige Halbebene, in welcher y positiv ist) auf das Rechteck eindeutig umkehrbar abbildet. Man kann sich den Weg in der z-Ebene auch so denken, dass sich der bewegliche Punkt immer sehr wenig über der Axe der reellen Zahlen (also in der positiven Halbebene) befindet; dann

---

1) Vergl. Schwarz im Journal f. Math. Bd. 70 S. 113.

2) Das Entsprechende für die Legendre'sche Irrationalität befindet sich in der Klein'schen Schrift S. 52.

wird sein Bildpunkt w immer innerhalb des Rechtecks unmittelbar an der Grenze hinlaufen[1]).

Ein Gleiches gilt nun von den drei anderen Halbblättern der Fläche über der z-Ebene, und zwar setzen sich die entsprechenden vier congruenten Rechtecke zu einem grösseren Rechtecke zusammen. Die Ecken dieses Rechteckes sind, wie aus dem Vorhergehenden folgt, durch $z=\infty$ gekennzeichnet, der Mittelpunkt durch $z=1$, die Mitten der horizontalen Seiten durch $z=\frac{1}{\varkappa^2}$ und die der verticalen durch $z=0$. Wie nun jedem Werthe von z auf der Riemann'schen Fläche zwei Punkte entsprechen, so auch in dem Rechteck. Die Unterscheidung zwischen oberem und unterem Blatte der Fläche wird im Rechteck die Unterscheidung zwischen linker und rechter Hälfte, und ein Punkt, dessen z gegeben ist, ist nur dann im Rechteck eindeutig bestimmt, wenn zugleich die Hälfte angegeben ist, in welcher er liegt. Nur für vier Werthe von z fallen die beiden entsprechenden Punkte zusammen, nämlich für $z=0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \infty$, gerade wie auf der Riemann'schen Fläche. Um das Entsprechen noch deutlicher hervortreten zu lassen, haben wir diejenigen Partien des Rechtecks, welche den positiven Halbebenen entsprechen, schraffirt.

Das Integral erster Gattung hat nun zwei Periodicitätsmoduln, von denen in unserem Falle der eine reell, der andere rein imaginär ist. Infolge dessen wird die w-Ebene in unendlich viele congruente Rechtecke eingetheilt, und zwar entspricht jedes derselben der Riemann'schen Fläche eindeutig umkehrbar, eins genau so wie das andere. In dieser so in Rechtecke eingetheilten w-Ebene sind nun die elliptischen Integrale (bis auf Vieldeutigkeiten, welche durch logarithmische Unendlichkeitspunkte verursacht werden) eindeutig, und zwar unterscheiden sie sich von Rechteck zu Rechteck immer nur um constante Periodicitätsmoduln. Daher wird die Strömung in jedem Rechtecke dieselbe sein, und demnach brauchen wir dieselbe nur in einem Rechtecke zu betrachten. Da nun das Rechteck conform zu

1) Auffallend könnte zunächst Folgendes erscheinen. Die reellen Zuwüchse von $z=0$ bis $z=1$ sind positiv, während die von $z=\frac{1}{\varkappa^2}$ bis $z=\infty$ negativ sind, trotzdem wir immer im oberen Blatte geblieben sind. Dies hat jedoch seine Richtigkeit, indem der reelle Theil von $\sqrt{Z}$ nicht nur beim Uebergang der Verzweigungsschnitte, sondern auch beim Uebergang über einen gewissen Hyperbelast sein Vorzeichen ändert, welcher zwischen $z=1$ und $z=\frac{1}{\varkappa^2}$ die Axe der reellen Zahlen senkrecht überschreitet. Auf diesen Curvenstücken ist nämlich der reelle Theil von Z negativ, während der imaginäre verschwindet. (Hiernach ist die Bemerkung in der Klein'schen Schrift S. 53, dass auf dem oberen Blatte w durchweg einen positiven reellen Theil besitzt, zu corrigiren.)

einem Ringe zusammengebogen werden kann[1]), so können wir diese Strömungen auch als Strömungen auf dem Ringe ansehen, wobei noch der bekannte Satz zu berücksichtigen ist, dass durch conforme Abbildung eine stationäre Strömung ihren Charakter als solche nicht verliert. Es werden dann die gegenüberstehenden Seiten des Rechtecks als identisch zu betrachten sein, und eine Strömungslinie, welche eine Seite des Rechtecks passirt, wird an derselben Stelle der gegenüberliegenden Seite wieder zum Vorschein kommen. Wir werden uns damit begnügen, die Zeichnung immer in einem Rechtecke anzugeben, und auf die Identität von Rechteck und Ring nur gelegentlich recurriren.

Die Beziehung zwischen der Fläche über der z-Ebene und dem Rechteck, die wir oben hergestellt haben, ist eine eindeutig umkehrbare conforme Abbildung, so dass es vom functionentheoretischen Standpunkte aus gleichgiltig ist, ob wir auf jener oder auf diesem operiren. Wir werden im Folgenden die elliptischen Integrale, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, als Functionen von z schreiben, jedoch als Functionen von w, d. h. im Rechtecke deuten, wonach es freisteht, das Curvensystem, das wir im Rechteck leicht angeben können, rückwärts auf die z-Ebene zu übertragen[2]). Die Function selbst wollen wir, da wir unter w das Integral erster Gattung verstehen, $W = U + iV$ nennen. Strömungslinien sind also diejenigen Curven, welche den Geraden $V = const.$ entsprechen.

Das Strömungssystem, welches dem Integral erster Gattung

$$W = \int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

entspricht, kann nun ohne Weiteres ins Rechteck eingetragen werden. Es ist ja $W = w$, und daher laufen die zugehörigen Strömungslinien als gerade Linien einfach parallel der Axe $v = 0$.

Die Strömungslinien des Integrals erster Gattung

$$W = A . e^{i\varphi} . \int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

sind, wenn wir unter A eine positive reelle Constante verstehen, gerade Linien, welche den Winkel $-\varphi$ mit der Geraden $v = 0$ bilden.

2. Die Integrale dritter Gattung.

Wir verstehen allgemein unter einem elliptischen Integrale dritter Gattung ein solches, welches nur logarithmische Unendlichkeitspunkte auf-

1) Kirchhoff in den Berliner Monatsber. 1875; Klein a. a. O. S. 50.

2) Herr Holzmüller betrachtet (a. a. O. Cap. 15 oder auch Zeitschrift für Mathem. u. Physik, Jahrg. 18) das Integral erster Gattung in der z-Ebene. Vergl. auch Siebeck im Journal für Mathematik, Bd. 57. Die Deutung in der w-Ebene ist übrigens nur der geometrische Ausdruck für die Einführung des Integrales erster Gattung als Argument der übrigen elliptischen Integrale und (wie wir später noch ausführlich sehen werden) der elliptischen Functionen (Jacobi, Fundamenta, §§ 47 und 51).

weist, und nennen die zugehörige Strömung eine **Strömung dritter Gattung**. Wir beschränken uns jedoch im Folgenden auf die Betrachtung von Integralen dritter Gattung mit **zwei** Unendlichkeitspunkten und werden von dem einfachsten Falle ausgehen, um schliesslich das allgemeinste solche Integral zu beherrschen.

Das Integral dritter Gattung

$$W=\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}$$

wird in den beiden Punkten $z=a$ logarithmisch unendlich. Die beiden Kreuzungspunkte, welche die zugehörige Strömung haben muss[1]), sind zu einem doppelten Kreuzungspunkte in die Stelle $z=\infty$ zusammengerückt.

Es sei a **reell** und liege etwa zwischen 0 und 1. Wenn wir bedenken, dass dann das Differential von $z=0$ bis $z=1$ und von $z=\frac{1}{\kappa^2}$ bis bis $+\infty$, resp. von $z=1$ bis $z=\frac{1}{\kappa^2}$ und von $z=-\infty$ bis $z=0$ reell, resp. rein imaginär ist, so können wir unmittelbar die Strömungscurven ihrem ungefähren Verlaufe nach angeben (Fig. 2).

Unser Princip, nach welchem wir nun zu complicirteren Strömungen dritter Gattung übergehen, besteht darin, dass wir zum betrachteten Integral dritter Gattung das Integral erster Gattung hinzufügen. Wir setzen also

$$W=\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}+C\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Die Unendlichkeitspunkte dieses Integrals sind wieder die beiden Punkte $z=a$, die Kreuzungspunkte desselben sind aber $z=a-\frac{1}{C}$. Bei Abänderung des Werthes der Constanten C, welche wir zunächst **reell** voraussetzen, nehmen die Kreuzungspunkte alle möglichen reellen Werthe an, und man kann mit Leichtigkeit die zugehörigen Strömungslinien für jeden einzelnen Fall angeben. Es ist dann interessant, an der Hand der Figuren zu verfolgen, wie die Strömung dritter Gattung allmälig in eine Strömung erster Gattung übergeht. Wir wollen von diesen successiven Strömungen nur die eine herausgreifen, welche durch **Figur 3** dargestellt ist. Es ist dann C bereits so gross angenommen $\left(\text{und zwar negativ, nämlich} < -\frac{1}{1-a}\right)$, dass das Integral erster Gattung vorherrscht. Nur so zu sagen eine Insel ist auf dem Ringe durch Strömungslinien abgegrenzt, in welcher die beiden Unendlichkeitspunkte liegen. Man kann diese Figur auch so auffassen (wenn man sich die unendlich vielen Parallelogramme neben einander denkt), als ob die stationäre Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit parallel der

1) Klein a. a. O. S. 39.

w-Ebene stattfindet, aber so, dass gewisse feste cylindrische Körper (in rechteckiger Anordnung) senkrecht zur w-Ebene angebracht seien.

Complicirter wird die Construction der Strömungslinien, wenn die Constante C nicht reell ist. Sie sei z. B. rein imaginär, also von der Form iC. Dann wird z. B. das Differential von $z=0$ bis $z=1$ nicht mehr reell sein und wir müssen uns daher nach anderen Hilfsmitteln umsehen, um die Strömungslinien angeben zu können. Wir gehen zu dem Ende, wie im Folgenden oft bei solchen Fragen, einen Schritt zurück, indem wir gewisse Verhältnisse gleichzeitig auf der Riemann'schen Fläche (z-Ebene) betrachten. Die Kreuzungspunkte $z=a+\frac{i}{C}$ werden, wenn C alle reellen Werthe durchläuft, sich in der z-Ebene auf einer Geraden bewegen, welche durch den Punkt a und übrigens senkrecht zur x-Axe verläuft. Diese Gerade wird in unserm Rechtecke eine Curve bilden, welche den rechten Winkel bei $z=\infty$ halbirt und die Gerade $v=0$ in $z=a$ orthogonal schneidet. Es ist, nach einiger Uebung, diese Uebertragung von Curven (ihrem ungefähren Verlaufe nach) von der Riemann'schen Fläche auf's Rechteck oder auch umgekehrt nicht schwer, wenn man sich nur die Abbildung von Fläche und Rechteck, d. i. die Zusammenbiegung eines Halbblattes zu einem Viertelrechteck, recht anschaulich vorstellt.

Einen weiteren Anhaltspunkt zur Construction der Strömungen gewinnen wir, wenn wir auf die physikalische Bedeutung unserer Figuren etwas näher eingehen. Dem obigen Integral erster Gattung, mit iC multiplicirt, entspricht eine Strömung, deren Strömungscurven gerade Linien sind und zur Geraden $v=0$ orthogonal verlaufen, und ein Hinzufügen desselben bedeutet ein Combiniren beider Strömungen. Denken wir uns nun beide Strömungen über einander gelegt, so laufen durch jeden Punkt zwei Strömungsrichtungen, und diese werden sich nach dem Parallelogramm der Bewegungen zusammensetzen. Es wird also anfangs (d. h. bei kleinem C) in der Nähe der Unendlichkeitspunkte keine grosse Umänderung der Strömung entstehen, weil dort die Geschwindigkeit sehr gross ist; wohl aber in der Nähe der Kreuzungspunkte, in denen ja die Geschwindigkeit unendlich klein ist. In diesen Punkten wird sich sofort die Richtung der Strömung erster Gattung einstellen.

Auf Grund dieser Bemerkungen kann man nun die Strömungen, welche entstehen, wenn C von Null an ins Positive oder Negative wächst, successive zeichnen[1]). Dabei ist immer noch Folgendes im Auge zu behalten. Wenn wir eine von den successiven Strömungen vor uns haben, so wird die Geschwindigkeit in den Kreuzungspunkten unendlich klein sein. Fügen wir daher die Strömung erster Gattung von einer bestimmten Intensität

---

1) Wir wollen hier die Figuren nicht mittheilen; doch soll betont werden, dass die Aufstellung derselben keinerlei Schwierigkeiten bietet.

hinzu, so wird in der neuen Figur die Richtung der Strömungslinien in den früheren Kreuzungspunkten die der Strömung erster Gattung sein. Durch nochmalige Hinzufügung derselben wird jene Richtung in den früheren Kreuzungspunkten unverändert bleiben und die Intensität daselbst nur verstärkt werden; nie aber ist eine andere Richtung in denselben möglich. Daraus geht hervor, dass jene Curve des Rechtecks, welche der Geraden $z = a + \frac{i}{C}$ der z-Ebene entspricht, die Rolle einer Aequidirectrix[1]) für sämmtliche aufeinander folgende Strömungen spielt, und zwar haben die Strömungslinien aller Punkte derselben dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die in Betracht kommende Strömung erster Gattung.

Durch diese Beispiele werden wir uns Ueberblick genug verschafft haben, um sogleich zu dem allgemeineren Falle überzugehen. Die Kreuzungspunkte des Integrals dritter Gattung

$$W = \int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}} + Ce^{i\varphi} \int \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

wo C eine reelle Constante bedeutet, bewegen sich, für wechselnde C, auf der Curve $z = a - \frac{1}{C} e^{-i\varphi}$. Die beiden Punkte $z = a$ sind logarithmische Unendlichkeitspunkte; jedoch werden wir, damit dieselben reine Quellpunkte (d. h. keine Wirbel- oder Strudelpunkte) werden, wenn a eine complexe Constante ist,

$$W = \sqrt{A} \left\{ \int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}} + Ce^{i\varphi} \int \frac{dz}{\sqrt{Z}} \right\}$$

schreiben müssen, wo zur Abkürzung $a(1-a)(1-\varkappa^2 a) = A$ gesetzt ist. Wenn wir nun C verändern, so werden die successiven Strömungen dadurch entstehen, dass wir die vorhergehende immer mit der Strömung erster Gattung combiniren. Dabei werden die Kreuzungspunkte eine Aequidirectrix durchlaufen, und zwar wird dieselbe im Punkte a die Richtung der Strömung erster Gattung haben, wie wir aus folgender Ueberlegung sehen. Gehen wir nämlich von der Strömung erster Gattung selbst aus, und denken wir uns dann einen Quellpunkt von zunächst noch geringer Ergiebigkeit entstehen, so wird ein Kreuzungspunkt sich da einstellen, wo die beiden Strömungen sich gegenseitig aufheben, und das wird eben, von a aus gesehen, in einer Richtung geschehen, welche der betreffenden Strömung erster Gattung gerade entgegengesetzt ist.

Schliesslich wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass die beiden Unendlichkeitspunkte und die beiden Kreuzungspunkte nicht völlig unabhängig von einander liegen. Da nämlich bei unserer Normalform die ersteren auf der Riemann'schen Fläche über einander liegen,

1) Darunter verstehe ich eine solche Curve, welche gleichgerichtete Elemente eines gegebenen Curvensystems miteinander verbindet.

und ebenso die letzteren, so wird sich im Rechteck ein Parallelogramm angeben lassen, für welches die beiden Unendlichkeitspunkte einerseits und die beiden Kreuzungspunkte andererseits gegenüberliegende Ecken bilden. Der Mittelpunkt dieses Parallelogramms ist der Mittelpunkt des Rechtecks. Diese gegenseitige ausgezeichnete Lage der vier Punkte hat aber auch bei einer beliebigen Form des Integrales statt. Denn es lässt sich jedes elliptische Integral dritter Gattung in die Form eines Integrals einer elliptischen Function mit dem Integral erster Gattung als Argument, also in die Form $W=\int\varphi(w)\,dw$ bringen. Nun sind die Nullpunkte a von φ zugleich die Kreuzungspunkte von W, denn für dieselben ist $dW=0$, und die einfach algebraischen Unendlichkeitspunkte b von φ sind die logarithmischen Unendlichkeitspunkte von W. Zwischen a und b besteht aber die Relation $\Sigma a=\Sigma b$, und daraus folgt unmittelbar die obige Behauptung.

Das Integral ist nun, wenn die beiden Unendlichkeitspunkte und, in Uebereinstimmung mit dem genannten Satze, die beiden Kreuzungspunkte gegeben sind, bis auf eine multiplicative Constante vollständig bestimmt. Wir können uns daher die Aufgabe stellen, bei graphisch gegebener Lage jener vier Punkte im Rechteck die zugehörigen Strömungslinien zu construiren. Der Weg, den wir hierbei einzuschlagen haben, ist durch das Vorhergehende klar vorgezeichnet, so dass wir die Lösung gleich in die folgende Regel zusammenfassen können.

Regel. Sind im Rechteck von einem Strömungssystem dritter Gattung die beiden Quellpunkte und die beiden Kreuzungspunkte gegeben, so verschiebe man zunächst das durch sie bestimmte Parallelogramm so parallel mit sich selbst, dass sein Mittelpunkt mit dem des Rechtecks zusammenfällt. Dann fallen von selbst die zugehörigen Punkte der Riemann'schen Fläche beziehungsweise über einander, und zwar mögen diese beiden Stellen $z=a$ und $z=b$ sein. Darauf ziehe man die Gerade $\overline{ab}$ und übertrage sie auf's Rechteck. Die so entstehende Curve ist eine Aequidirectrix der gesuchten Strömung. Die Richtung der Strömung in den Punkten der Aequidirectrix ist durch die Richtung, welche diese in den Punkten a des Rechtecks besitzt, gegeben. Sodann zeichne man eine der beiden Strömungen erster Gattung von der eben genannten Richtung und lasse in den Punkten a Quellpunkte von gleicher, aber entgegengesetzter und zunächst noch geringer Ergiebigkeit entstehen. Die dabei sich bildenden Kreuzungspunkte liegen auf der Aequidirectrix. Nun lasse man die Quellen intensiver werden und variire das Strömungssystem dem entsprechend; oder, was graphisch dasselbe ist, man füge eine Strömung erster Gattung hinzu, welche der anfänglichen gerade ent-

gegengesetzt ist. Dabei werden sich die Kreuzungspunkte immer mehr von den Punkten a entfernen und in einem gewissen Momente mit den Punkten b zusammenfallen. Die so erhaltene Strömung ist, sofern man noch die obige Parallelverschiebung rückwärts vornimmt, die gesuchte, wenn die Unendlichkeitspunkte reine Quellpunkte sein sollen. Ist dies nicht verlangt, so ist das Curvensystem noch insofern willkürlich, als an einer beliebigen Stelle die Strömung eine beliebig vorgeschriebene Richtung haben kann, da jede Schaar von Trajectorien des gefundenen Strömungssystems den gegebenen Bedingungen genügt. — Bei besonders günstiger Lage der vier kritischen Punkte wird man, nachdem die Strömungsrichtung in den Punkten der Aequidirectrix markirt ist, die Figur gleich nach dem Gefühl vervollständigen können.

Analytische Erhärtung der vorhergehenden anschaulich gewonnenen Sätze (Fig. 4).

Im Folgenden soll analytisch bewiesen werden, dass jene Curve wirklich eine Aequidirectrix der Strömungslinien ist und zwar die Verbindungslinie aller der Punkte, in denen die Strömung die Richtung der Strömung des in Betracht kommenden Integrales erster Gattung besitzt. Der Bequemlichkeit halber wollen wir sie schon jetzt eine Aequidirectrix nennen.

Wir hatten die Riemann'sche Fläche abgebildet auf ein Rechteck mit Hilfe von

$$d(u+iv)=\frac{d(x+iy)}{\sqrt{Z}}.$$

Die Curven $y=const.$ der Riemann'schen Fläche verwandeln sich hierbei in Curven, welche vom Eckpunkte $z=\infty$ des Rechtecks aus- und wieder in denselben hineinlaufen, die Seiten des Rechtecks in diesem Punkte berühren und immer in demselben Quadranten des Rechtecks bleiben. In Fig. 4 sind einige derselben angegeben. Wir wollen auch im Rechteck von denselben als von den Curven $y=const.$ reden.

Die erste Frage, welche wir uns vorlegen wollen, sei nun: welchen Winkel α bildet die Tangente einer Curve $y=const.$ im Punkte $z=a$ des Rechtecks mit der Geraden $v=0$? Für diese Curven gilt offenbar $dy=0$, also haben wir

$$du+i\,dv=\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Nun ist aber der gesuchte Winkel gleich der Amplitude der complexen Grösse $du+i\,dv$, also auch, da dx reell ist, gleich der Amplitude der

Grösse $\frac{1}{\sqrt{Z}}$, wobei es uns hier und im Folgenden auf das Vorzeichen nicht ankommt. Es bestimmt sich daher α aus der Gleichung

$$R.e^{i\alpha}=\frac{1}{\sqrt{A}},$$

wo R den absoluten Betrag von $\frac{1}{\sqrt{A}}$ bedeutet.

Es sei ferner a Unendlichkeitspunkt, also ein Punkt der Aequidirectrix. Diese bilde mit der Curve $y=const.$ des Punktes a den Winkel φ. Dann müssen wir unser Integral dritter Gattung schreiben

$$\sqrt{A}.\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}+\sqrt{A}.C.e^{-i\varphi}.\int\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

wo C eine reelle Constante ist, denn dann liegen ja in der That die Kreuzungspunkte auf der Geraden $z=a+\frac{1}{C}\cdot e^{i\varphi}$.

Weiter sei ω der Winkel, welchen die Tangente der Aequidirectrix im Punkte a mit der Geraden $v=const.$ bildet. Dann ist $\omega=\varphi+\alpha$. Andererseits ist die Richtung der Strömung erster Gattung gleich der negativen Amplitude der Grösse $\sqrt{A}.e^{-i\varphi}$, also auch $\alpha+\varphi$ oder ω, d. h. die Aequidirectrix hat im Punkte a des Rechtecks dieselbe Richtung, wie die Strömung erster Gattung.

Schliesslich sei z ein beliebiger Punkt der Aequidirectrix, und ψ, ϑ und χ seien die Winkel, welche die Strömung in z mit der zugehörigen Curve $y=const.$, resp. mit der Geraden $v=const.$ und endlich die Curve $y=const.$ mit $v=const.$ bilden. Dann ist nachzuweisen, dass $\vartheta=\omega$.

Unsere Strömungsfunction W ist definirt durch

$$dU+i\,dV=\sqrt{A}\cdot\frac{dx+i\,dy}{(z-a)\sqrt{Z}}+\sqrt{A}.C.e^{-i\varphi}.\frac{dx+i\,dy}{\sqrt{Z}}.$$

Die Strömungscurven sind nun die Curven $V=const.$, folglich muss, wenn das Fortschreiten auf einer Strömungslinie geschehen soll, die ganze rechte Seite einer reellen Grösse dU gleich sein. Daraus folgt, wie wir gleich sehen werden, die obige Behauptung. Wir brauchen nur die Amplituden der in Betracht kommenden complexen Grössen zu berücksichtigen. Dann liefert der erste Ausdruck, da ausser den erwähnten Relationen auch $\psi+\chi=\vartheta$ ist,

$$\frac{e^{-i\alpha}.e^{i\psi}}{e^{i\varphi}.e^{-i\chi}}=e^{i(\vartheta-\omega)}.$$

Der zweite Ausdruck liefert

$$\frac{e^{-i\alpha}.e^{-i\varphi}.e^{i\psi}}{e^{-i\chi}}=e^{i(\vartheta-\omega)}.$$

Die ganze rechte Seite ist daher gleich

$$e^{i(\vartheta-\omega)}(r_1+r_2),$$

wo r_1 und r_2 reelle Grössen sind. Dieser Ausdruck soll nun reell sein, d. h. ϑ und ω sind (bis auf Vielfache von π) einander gleich, und das wollten wir eben beweisen.

Unser Schluss erleidet eine Ausnahme für $dU=0$, d. h. für die Kreuzungspunkte, in denen ja in der That die Richtung der Strömung ganz unbestimmt ist.

3. Die Integrale zweiter Gattung.

Nachdem die Strömung des allgemeinen Integrals dritter Gattung mit zwei logarithmischen Unendlichkeitspunkten eine ausführliche Besprechung erfahren hat, wird es leicht sein, die gewonnenen Resultate auf die Strömungen des Integrals zweiter Gattung zu übertragen. Dieses kann ja dadurch aus jenem entstanden gedacht werden, dass man die beiden logarithmischen Unendlichkeitspunkte zu einem einfach algebraischen zusammenrücken lässt[1]), indem wir unter einem Integral zweiter Gattung ein solches verstehen, welches nur algebraische Unendlichkeitspunkte von endlicher Ordnung und in endlicher Anzahl aufweist. Gemäss jener Eigenschaft der vier ausgezeichneten Punkte, die Ecken eines Parallelogramms zu bilden, wird jetzt der Unendlichkeitspunkt (wir betrachten nur Integrale mit einem Unendlichkeitspunkte) allemal genau in der Mitte zwischen den beiden Kreuzungspunkten seine Stelle haben. Die Behandlung wird aber einfacher, wenn wir nicht den Grenzübergang machen, sondern direct vorgehen. Dabei wird, da wir genau denselben Ideengang wie im vorigen Paragraphen verfolgen, eine gewisse Kürze gestattet sein.

Das Integral

$$\int\frac{z.dz}{\sqrt{Z}}$$

wird in dem Punkte $z=\infty$ einfach algebraisch unendlich. Die Kreuzungspunkte liegen vereinigt an der Stelle $z=0$. Da nun das Integral von $z=0$ bis 1 und von $\frac{1}{x^2}$ bis ∞ einen reellen Zuwachs erhält, dagegen von $z=1$ bis $\frac{1}{x^2}$ und von $-\infty$ bis 0 einen rein imaginären, so können die Strömungslinien ohne Weiteres angegeben werden (Fig. 5).

Betrachten wir nun gleich das allgemeinere Integral zweiter Gattung

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}+C.e^{i\varphi}.\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

für verschiedene positive Werthe von C. Die Kreuzungspunkte werden wieder auf einer Aequidirectrix der Strömung (5), von der wir hierbei ausgehen wollen, wandern, und zwar wird dieselbe mit der Geraden $v=0$

1) Vergl. Klein a. a. O. S. 11.

den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ bilden (da sie diese Gerade im Punkte $z=0$ trifft), während die Strömung des hinzugefügten Integrals erster Gattung den Winkel $-\varphi$ bildet.

Die Strömung des allgemeinsten Integrals endlich, welches für $z=\infty$ einfach algebraisch unendlich wird,

$$\Gamma.\left\{\int\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}+C.e^{i\varphi}.\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}\right\},$$

wo Γ eine complexe Constante bedeutet, entsteht aus der vorhergehenden Strömung, wenn wir die Trajectorien in Bezug auf denjenigen Winkel, negativ genommen, ziehen, der die Amplitude von Γ ist.

Damit sind aber die Integrale zweiter Gattung mit einem algebraischen Unendlichkeitspunkte überhaupt erschöpft, denn, geometrisch ausgedrückt: denken wir uns einen beliebigen Punkt auf dem Ringe markirt, so können wir den Ring immer so zerschneiden, dass der markirte Punkt Eckpunkt des entstehenden Rechtecks wird.

Die so gewonnenen Resultate können wir wieder in eine Regel zusammenfassen. Wir geben zwei Punkte, welche Kreuzungspunkte werden sollen, und in ihrer Mitte einen Punkt, welcher einfach algebraischer Unendlichkeitspunkt werden soll, und fragen nach der zugehörigen Strömung. Hierbei brauchen wir aber nicht die Strömung erster Gattung als Ausgangspunkt zu nehmen, sondern können von der Strömung (5) ausgehen.

Regel. Sind im Rechteck von einem Strömungssystem zweiter Gattung mit einem einfach algebraischen Unendlichkeitspunkte dieser Unendlichkeitspunkt und die beiden Kreuzungspunkte gegeben, so verschiebe man zunächst die durch diese drei Punkte bestimmte gerade Linie so parallel mit sich selbst, dass der Unendlichkeitspunkt in den Punkt $z=\infty$ des Rechtecks hineinfällt (wir sagen den Eckpunkt, da die vier Eckpunkte für uns identisch sind; nach demselben Princip befinden sich auch nach dieser Verschiebung beide Kreuzungspunkte innerhalb des Rechtecks). Nun beziehe man das Rechteck auf die oben betrachtete Fläche über der z-Ebene. Dabei werden in dieser von selbst die Kreuzungspunkte an einer Stelle $z=b$ über einander zu liegen kommen. Diesen Punkt b verbinde man mit dem Punkte $z=0$ durch eine gerade Linie und übertrage diese ins Rechteck, wo sie eine Aequidirectrix der gesuchten Strömung sein wird. Ihren Winkel mit der Geraden $v=0$ verdoppele man und spiegele ihn an dieser Geraden. Dann hat man diejenige Richtung, welche die Strömung in den Punkten der Aequidirectrix, oder, was dasselbe ist, die nach den obigen Entwickelungen der geforderten Strömung adjungirte Strömung erster Gattung

besitzt. Diese Strömung erster Gattung (in dem einen oder andern Sinne genommen, je nachdem die Kreuzungspunkte liegen) combinire man nun mit der Strömung (5), indem man ihre Intensität anfangs gering nimmt und nach und nach so gross werden lässt, dass die Kreuzungspunkte, welche bei diesen successiven Strömungen immer auf der Aequidirectrix fortrücken, mit den Punkten $z=b$ des Rechtecks zusammenfallen, was nach den vorhergehenden Entwickelungen eintreten muss. Die obige Parallelverschiebung, rückwärts vorgenommen, wird endlich die geforderte Strömung liefern, welche noch insofern willkürlich ist, als in einem beliebigen Punkte eine beliebig vorgegebene Strömungsrichtung angenommen werden kann. Diese gegebene Richtung erreicht man dadurch, dass man zum gefundenen Strömungssystem die passenden Trajectorien zieht.

(Schluss folgt.)

XII.

Die Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystalllinse der Fische.

Von

Prof. Dr. LUDWIG MATTHIESSEN

in Rostock.

(Fortsetzung.)

Hierzu Taf. V Fig. 1 u. 2.

In zwei früheren Aufsätzen (5. Heft des XXIV. Jahrg. und 3. Heft des XXVI. Jahrg. dieser Zeitschrift) sind die Differentialgleichungen für die Brennweiten der Axenstrahlen in centrirten Systemen mit stetig variabelem Brechungsindex, sowie für die Trajectorie schief in concentrisch geschichtete kugelförmige Linsen einfallender Strahlen von mir aufgestellt worden. Zugleich wurden für ein specielles Dichtigkeitsgesetz sowohl die Gleichung der Trajectorie, als auch die Brennweite berechnet und ausserdem mit Hilfe dieser Formeln die aplanatische Wirkung einer solchen Krystalllinse in den Augen der Fische dargethan.

Neuerdings sind nun von Hermann* auch die Differentialgleichungen der beiden Brennweiten schiefer Incidenz für concentrisch geschichtete kugelförmige Linsen abgeleitet worden. Da die von Hermann eingeführten Bezeichnungen von den von mir in meinen früheren Aufsätzen gebrauchten in manchen Stücken abweichen, so werde ich im Folgenden jene Gleichungen auf Grund der früher gegebenen Formeln herleiten und zwar, wie ich glaube, auf kürzerem Wege.

Es ist bekannt, dass bei schiefer Incidenz auf sphärische Flächen Astigmatismus unendlich dünner Strahlenbündel erfolgt. Von einem leuchtenden Punkte werden in den durchgehenden, gebrochenen Strahlen zwei unendlich kleine Brennlinien entworfen. Die sogenannte erste Brennlinie, entworfen von dem in einem Meridianschnitt (1. Hauptnormalschnitt) einfallenden Strahlenfächer, steht auf diesem Schnitte senk-

* Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. XXVII, 1882, S. 309 – 311.

recht; die zweite Brennlinie, entworfen von dem in den Normalschnitt (2. Hauptnormalschnitt) einfallenden Strahlenfächer, liegt in dem Meridionalschnitte. Der Abstand beider Brennlinien ist die Brennstrecke. Diese Bezeichnungen, welche von Hermann herrühren, sind von ihm früher gekennzeichnet mit den Indices 1 und 2.*

Ist e die Objectweite und sind f_1 und f_2 die beiden Bildweiten, so ist für eine einzige brechende Fläche vom Krümmungsradius r, dem Einfallswinkel φ und dem Brechungswinkel ψ:

$$f_1 = \frac{n r \cos\psi^2}{n \cos\psi - \cos\varphi - \frac{r}{e} \cos\varphi^2}, \quad f_2 = \frac{n r}{n \cos\psi - \cos\varphi - \frac{r}{e}}.$$

In seinem dritten Aufsatze führt Hermann folgende Bezeichnungen ein:

$$f^\dagger = \frac{n r \cos\alpha^2}{n \cos\alpha - \cos\varphi - \frac{r}{e^\dagger} \cos\varphi^2}, \quad f^* = \frac{n r}{n \cos\alpha - \cos\varphi - \frac{r}{e^*}}.$$

Daneben wird von Hermann auch seine frühere Nomenclatur der beiden Normalschnitte der brechenden Fläche geändert und, wie es scheint, für den Meridionalschnitt die Bezeichnung „Kreuzschnitt", für den Normalschnitt die Bezeichnung „Hauptschnitt" gewählt, aus dem Grunde, weil die Deductionen für den letzteren sämmtlich einfachere Formen annehmen. Um die Verwirrung, die schon jetzt theilweise zu herrschen beginnt, nicht noch mehr zu vergrössern, werde ich im Folgenden die früheren Bezeichnungen Meridionalschnitt (Index 1) und Normalschnitt (Index 2) beibehalten. Ich gebe derselben auch besonders deshalb den Vorzug, weil auf dem in einer convexen Fläche gebrochenen Strahl auch der Ordnung nach zuerst die Brennlinie der meridionalen Fächer auftritt (erste Brennlinie). Auch die letztere Bezeichnung ist von Hermann scheinbar aufgegeben, indem er sie Kreuzschnitt-Brennlinie nennt, wogegen er die zweite Brennlinie als Hauptschnitt-Brennlinie bezeichnet.

Hermann leitet nun die Differentialgleichungen der Brennweiten in folgender Reihenfolge ab:

a) Differentialgleichung für den Hauptschnitt (Normalschnitt);
b) Differentialgleichung für den Kreuzschnitt (Meridionalschnitt);
c) Differentialgleichung für den normalen Durchgang (Axenstrahlen).

I. Differentialgleichung für den Normalschnitt.

Wir setzen voraus, es sei (Fig. 14)

F_0 der leuchtende Punkt in unendlicher Entfernung,
O der Einfallspunkt des Strahlenfächers vor der Linse,
ONP die Trajectorie des Leitstrahles,

* Ebendaselbst XVIII, S. 448 – 455; XX, S. 370 – 387.

$NP = \partial s$ das Bogendifferential der Trajectorie,
$S_1 C$ die dem Strahle $F_0 O$ parallele Centrale der Kugellinse,
$CNP = e_1$ der Brechungswinkel hinter der Fläche $CN = y$,
$NPR = e_2 + \partial e_2$ der Einfallswinkel vor der Fläche $CP = y + \partial y$,
$CP\Phi = e_1 + \partial e_1$ der Brechungswinkel hinter der Fläche CP,
n der Brechungsindex zwischen N und P,
$n + \partial n$ der Index hinter P,
$S_1 S_2 = \eta = r - y$ die Dicke der durchbrochenen Schichten,
$S_2 S_3 = \partial \eta = - \partial y$ die Dicke der hinzutretenden brechenden Schicht,
F zweiter Bildpunkt hinter N, also Objectpunkt vor P,
NF zweite Bildweite der Schicht ON,
F die Objectweite des Punktes P,
Φ zweiter Bildpunkt hinter P,
$P\Phi = \varphi_2$ die zweite Bildweite der Schicht OP.

Alsdann ist für P

$$\varphi_2 = \frac{n y}{n \cos e_1 - \cos e_2 - \frac{y}{f}} = \frac{n y}{\frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} - \frac{y}{f}},$$

$$\frac{\sin e_1}{f} + \frac{\sin e_2}{\varphi} = \frac{\sin(e_2 - e_1)}{y},$$

Nun ist

$$\sin e_2 : \sin e_1 = (n + \partial n) : n,$$

folglich

$$\frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} = - \frac{\partial n}{n \cos e_1},$$

und demzufolge

$$1) \qquad \frac{1}{f} + \left(1 + \frac{\partial n}{n}\right) \frac{1}{\varphi_2} = \frac{\partial n}{n y \cos e_1}.$$

Weiter ist die negative Objectweite des Punktes P, nämlich $-f$, vermehrt um das Bogendifferential ∂s der Trajectorie, die Bildweite der Schicht ON, also

$$-f + \partial s = \varphi_2 - \partial \varphi_2.$$

Ferner ergiebt sich aus der Figur unmittelbar

$$\partial s = \frac{-\partial y}{\cos e_1}.$$

Wenn man alsdann den Werth

$$f = -\left(\varphi_2 - \partial \varphi_2 + \frac{\partial y}{\cos e_1}\right)$$

in die Gleichung 1) einsetzt, so erhält man

$$\frac{1}{-\varphi_2}\left(1 + \frac{\partial \varphi_2}{\varphi_2} - \frac{\partial y}{\varphi_2 \cos e_1}\right) + \left(1 + \frac{\partial n}{n}\right) \frac{1}{\varphi_2} = \frac{\partial n}{n y \cos e_1},$$

und endlich, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung, sowie $e_2 = e$:

2) $$\partial\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)=\frac{\partial n}{n\,y\cos e}-\frac{\partial n}{n\,\varphi_2}-\frac{\partial y}{\varphi_2^{\,2}\cos e}$$

oder

3) $$\partial\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)=-\frac{\partial n}{ny}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}-\frac{\partial n}{n\,\varphi_2}+\frac{\partial y}{\varphi_2^{\,2}}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}.$$

Nun ist in Formel 38) meines früheren Aufsatzes (3. Heft des XXVI. Jahrg.) folgende Differentialgleichung der Trajectorie aufgestellt:

4) $$\partial e\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\partial y}{y}+\frac{\partial n}{n}$$

oder

$$\cot e\,\partial e=\frac{\partial y}{y}+\frac{\partial n}{n};$$

ferner (S. 88) ihr Subintegral

5) $$y\,n\sin e=r\,N\sin\tau_0=r\sin\tau_1,$$

und die hieraus sich ergebende Differentialgleichung der Trajectorie in Kreiscoordinaten

6) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{y^2}{r^2}\left\{\frac{y^2 n^2}{r^2\sin\tau_1^{\,2}}-1\right\}.$$

Die Gleichungen 39) und 41) von Hermann sind mit 4) und 5) identisch. Ist n als Function von y gegeben, so ist φ_2 mit Hilfe der Gleichungen 2) und 5) bestimmbar; von mir ist dies in dem früheren Aufsatze für $n=N\left(1+\zeta\frac{r^2-y^2}{r^2}\right)$ auf indirectem Wege ausgeführt. Will man die Formel 2) benutzen, so muss man e eliminiren, woraus resultirt

7) $$\partial\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)=\frac{yn}{\sqrt{y^2n^2-r^2\sin\tau_1^{\,2}}}\left(\frac{\partial n}{ny}-\frac{\partial y}{\varphi_2^{\,2}}\right)-\frac{\partial n}{n\,\varphi_2}.$$

Diese Gleichung lässt sich leicht integriren bei der von Hermann gemachten Annahme $\eta n=const.$ Eine solche Linse würde die Dichtigkeit $n=\infty$ im Centrum haben, und folgeweise den Hauptbrennpunkt. Bei der von mir gemachten Voraussetzung, welche den natürlichen Verhältnissen entspricht, musste ich es vorziehen, zuvor das Integral der Gleichung 6) zu suchen.

II. Differentialgleichung für den Meridionalschnitt.

In diesem Falle gilt die der Gleichung 1) entsprechende

8) $$\frac{\cos e_2^{\,2}}{f}+\left(1+\frac{\partial n}{n}\right)\frac{\cos e_1^{\,2}}{\varphi_1}=\frac{\partial n}{n\,y\cos e_1}.$$

Wir fanden oben

$$\frac{\sin(e_2-e_1)}{\sin e_1}=\frac{\partial n}{n\cos e_1},\quad \frac{\sin e_2\cos e_1}{\sin e_1}-\cos e_2=\frac{\partial n}{n\cos e_1}.$$

Wenn man die zweite Gleichung nach $\cos e_2$ auflöst und $\sin e_2:\sin e_1=1+\frac{\partial n}{n}$ substituirt, so erhält man

$$\cos e_2 = \left(1 + \frac{\partial n}{n}\right) \cos e_1 - \frac{\partial n}{n \cos e_1},$$

und wenn man quadrirt,

$$\cos e_2^2 = \cos e_1^2 - 2 \frac{\partial n}{n} \sin e_1^2.$$

Die Gleichung 8) verwandelt sich demzufolge in

$$\frac{\cos e_1^2 - 2 \frac{\partial n}{n} \sin e_1^2}{f} + \left(1 + \frac{\partial n}{n}\right) \frac{\cos e_1^2}{\varphi_1} = \frac{\partial n}{n y \cos e_1}.$$

Nun ist

$$f = -\left(\varphi_1 - \partial \varphi_1 + \frac{\partial y}{\cos e_1}\right)$$

und man erhält

$$9) \qquad \partial\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{\partial n}{n y \cos e_1^3} - \frac{1 + \sin e_1^2}{\cos e_1^2} \cdot \frac{\partial n}{n \varphi_1} - \frac{\partial y}{\varphi_1^2 \cos e_1},$$

worin man ebenfalls e an die Stelle von e_1 setzen kann.

Führt man das Bogendifferential ∂s ein, so erhält man die der Gleichung 3) entsprechende Differentialgleichung der ersten Bildweite

$$10) \qquad \partial\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = -\frac{\partial n}{n y}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^3 - \frac{2 \partial n}{n \varphi_1}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial y}{\varphi_1^2}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{\partial n}{n \varphi_1}.$$

Das Differential ∂s findet man dann aus 6), nämlich

$$\partial s = \partial y \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}.$$

III. Differentialgleichung für die Axenstrahlen.

Man gelangt offenbar zu derselben, indem man in 2) oder 9) $e = 0$ setzt; sie lautet demnach

$$11) \qquad \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\partial n}{n y} - \frac{\partial n}{n \varphi} - \frac{\partial y}{\varphi^2}.$$

Diese Gleichung ist mit der von Hermann in 45) aufgestellten identisch; letztere ist

$$\mu \varrho + \varrho\left(f \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} - \mu \frac{\partial f}{\partial \varrho}\right) = f^2 \frac{\partial \mu}{\partial \varrho}.$$

Sie ist auch ein specieller Fall von der in meinem früheren Aufsatze abgeleiteten Formel 9), nämlich

$$12) \qquad \partial\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{\partial n}{n r} - \frac{\partial n}{n \varphi_1} + \frac{\partial \eta}{\varphi_1^2},$$

welche für jedes beliebige centrirte System gilt, und in der etwas abweichenden Form

$$-\partial\left(\frac{1}{x - \varphi}\right) = \frac{\partial n}{n r} + \frac{\partial n}{n (x - \varphi)} + \frac{\partial x}{(x - \varphi)^2}$$

bereits im Jahre 1877 von Lippich publicirt ist.

Die Gleichung 12), giltig für die Axenstrahlen beliebiger centrirter Systeme, lässt sich leicht direct ableiten. Bedeutet r den Krümmungs-

radius einer beliebigen Fläche S_3, r_0 den der vordersten Fläche S_1 des ganzen Systems, η die Dicke der endlichen Schicht $S_1 S_3$, so ist

$$\frac{1}{f}+\left(1+\frac{\partial n}{n}\right)\frac{1}{\varphi_1}=\frac{\partial n}{n r}$$

und

$$-f+\partial\eta=\varphi_1-\partial\varphi_1.$$

IV. Differentialgleichung der zweiten Hauptpunktsdistanz α_2 für den Normalschnitt.

Zur Construction der Bilder bedarf es der Kenntniss der Hauptpunktsdistanzen. Die zweiten Hauptpunkte sämmtlicher Strahlen, welche parallel zur optischen Axe einfallen, liegen nicht mehr in einer Ebene (Hauptebene), sondern in einer Rotationsfläche $h_2 H_2$ (Fig. 15), welche die optische Axe in H_2 senkrecht schneidet.

Es sei wiederum für den einfallenden Strahl $F_0 O$ der Punkt F Hauptbrennpunkt der Schicht ON, Φ Hauptbrennpunkt der Schicht OP, h zweiter Hauptpunkt der Schicht ON, h_2 zweiter Hauptpunkt der Schicht OP; ferner $h_2 P=\alpha_2$, $h P=\alpha_2-\partial\alpha_2$. Dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $P h h_2$ und $P F \Phi$:

$$\frac{\partial(s-\alpha_2)}{\alpha_2}=\frac{-\partial(\varphi_2+\alpha_2)}{\varphi_2+\alpha_2}$$

und

$$13)\quad \frac{\partial(s-\alpha_2)}{\alpha_2}=\frac{-\partial(\varphi_2+s)}{\varphi_2}.$$

Für Axenstrahlen wird $\partial s=\partial\eta$, also

$$14)\quad \frac{\partial(\eta-\alpha_2)}{\alpha_2}=\frac{-\partial(\varphi_2+\eta)}{\varphi_2}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der in meinem früheren Aufsatze unter 22) aufgestellten Formel. Die Gleichung 13) führt zur Kenntniss der Lage des Hauptpunktes h_2, beziehungsweise zur Gleichung der Hauptpunktsfläche $H_2 h_2$ bei einem concentrischen System brechender Flächen mit variabelem Index n. Unter Zugrundelegung des Gesetzes $n=N\left(1+\zeta\frac{r^2-y^2}{r^2}\right)$, welches für die Krystalllinse in den Augen der Fische gilt, sind in meinem früheren Aufsatze beide Hauptpunktsdistanzen α_1 und α_2 als algebraische Functionen von η bereits dargestellt. Mit Hilfe der Formel 13) lassen sich dieselben nunmehr für die schiefe Incidenz verallgemeinern. Ebenso lassen sich sämmtliche Differentialgleichungen für die Brennweiten durch die Substitution $\varphi_2=\varphi-\alpha_2$ so transformiren, dass die Brennweiten auf die Hauptflächen bezogen werden, wie dies in der Dioptrik der Linsensysteme in der Regel geschieht. Die in meinem früheren Aufsatze sub 1) bis 4) aufgestellten Differentialgleichungen haben für diesen Fall Giltigkeit.

Rostock, 1. Juni 1882.

XIII.

Grundzüge der mathematischen Chemie.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

IV.

Nähere Bestimmung der Constanten.

In meiner ersten Abhandlung über mathematische Chemie habe ich das Princip angegeben, nach dem die chemischen Processe sich entwickeln, und dabei bin ich auch zu der Bestimmung zweier Constanten gekommen, von denen die erste, der Quotient $\frac{b\mu}{am}$, angiebt, wieviel Atome von der Grösse eines Wasserstoffatomes nöthig sind, um ein Aethertheilchen zu neutralisiren, während die andere r das Verhältniss ausdrückt, in welchem die Summe der Radien einer Massenkugel und eines Aethertheilchens zu der sogenannten Aetherdistanz steht, als welche wieder diejenige Entfernung zu nehmen ist, in welcher zwei Aethertheilchenmittelpunkte von einander sich befinden, wenn das eine Aethertheilchen im Mittelpunkte eines sonst ganz leeren kugelförmigen Raumes, das andere an der Peripherie sich befindet. Das eine Aethertheilchen wird von dem innern mit einer Kraft abgestossen, welche dem Quadrate des Kugelradius umgekehrt proportional ist, während der dem Kugelradius direct proportionale Aetherdruck das peripherische Aethertheilchen gegen den Kugelmittelpunkt hinzuführen strebt. Die Entfernung der Mittelpunkte beider Aethertheilchen giebt alsdann die Aetherdistanz. Ich habe in der erwähnten Abhandlung $\frac{b\mu}{am} = 18{,}6$ und $r = 0{,}37296$ bestimmt.

Wären die chemischen Elemente so gegeben, dass ihre Atomgewichte eine in gleichen möglichst kleinen Intervallen wachsende Reihe bilden würden, so wäre es wohl nicht schwer, diese Constanten mit genügender Genauigkeit zu bestimmen; allein dies ist nicht der Fall, denn die Intervalle sind verschieden gross und bieten oft da, wo Zwischenglieder am

allernothwendigsten wären, recht beträchtliche Lücken. Darum kann eine genaue Feststellung der Constanten nur an der Hand der Erfahrung und nach und nach bewerkstelligt werden.

In meiner ersten Abhandlung habe ich unter den chemischen Elementen Kohlenstoff und Aluminium ausgewählt und aus den dort angeführten Gründen die gegenseitige Entfernung R eines Atomes und des nächstliegenden Aethertheilchens der Aetherdistanz gleich gesetzt. Bei dieser Annahme ergaben sich die vorstehenden Werthe von $\frac{b\mu}{am}$ und r. Als Controle verwendete ich noch ein zweites Mittel, nämlich das Aufsuchen der Grenzen, bei denen die Aufnahme eines neuen Aethertheilchens durch das Massentheilchen erfolgt, bei denen also der Uebergang von den elektronegativen zu den elektropositiven Elementen stattfindet. Als Ergebniss dieser Controle führte ich dann an, dass aller Wahrscheinlichkeit nach $b\mu > 18{,}6\,am$ und $r < 0{,}37296$; weil ich aber kein besseres Mittel wusste, die Constanten zu bestimmen, habe ich mich der letzteren bis jetzt bedient, und ich glaube nicht, dass meine bisher damit erzielten Resultate Veranlassung seien, diesen provisorischen Constantenwerthen grosses Misstrauen entgegenzubringen. Nichtsdestoweniger habe ich mich genöthigt gesehen, mich um ein Mittel zur bessern Annäherung umzusehen, da die bisherigen Werthe in einzelnen Fällen zu Inconsequenzen führen, welche vermieden werden müssen. So ist die Grenze des Atomgewichtes, bei welcher die Aufnahme des vierten Aethertheilchens stattfindet, nach S. 369 der genannten Abhandlung bei 32,2, ist also kleiner als das Atomgewicht des Chlors, während sie, wie die Eigenschaften dieses Stoffes zeigen, über 35,5, dagegen unter 39, dem Atomgewichte des Kaliums sein muss. Dieser Umstand hat mich veranlasst, die Constantenbestimmung neuerdings vorzunehmen, und ich habe dabei vorgezogen, den Atomgewichtswerth, bei dem der Uebergang von den elektronegativen zu den positiven Elementen stattfindet, bei dem also das Atom noch ein weiteres Aethertheilchen aufnimmt, also das, was ich in meiner ersten Arbeit nur zur Controle benützte, als Ausgangspunkt zu nehmen, den früheren Ausgangspunkt dagegen fallen zu lassen. Ich glaube, dass die so erhaltenen Resultate sich den Beobachtungen besser anschliessen als die früheren, ohne dass ich sie jedoch als mehr, wie als Näherungswerthe betrachtet wissen will.

Besitzt ein Massenatom bereits n Aethertheilchen, so wird sich in einiger Entfernung von ihm in derjenigen Richtung, wo die Abstossung der bereits gebundenen Aethertheilchen einen kleinsten Werth hat, ein weiteres Aethertheilchen befinden. Denken wir uns nun, die Grösse des Massentheilchens nehme allmälig zu, so wird das noch freie Aethertheilchen sich demselben mehr und mehr nähern und endlich, wenn die Grösse des Massentheilchens eine gewisse Grenze überschritten hat, geht

das Aethertheilchen plötzlich vollends zu dem Atom über, um fortan incorporirt zu sein, weil eine geringere Grösse des Atomes nöthig ist, ein Aethertheilchen incorporirt zu erhalten, als es bis zur Incorporation aus der Ferne anzuziehen.

Wie ich bereits in meiner ersten Arbeit (S. 362) bemerkte, besitzt das Wasserstoffatom ausser seinem Massentheilchen noch ein Aethertheilchen, während das Lithium deren zwei hat. Es muss also die Aufnahme dieses zweiten stattfinden, während das Atomgewicht von 1 bis 7 steigt, d. h. wenn man sich das Atomgewicht allmälig wachsend denkt, muss zwischen 1 und 7 eine Grenze kommen, bei welcher die Aufnahme stattfindet. Die Einverleibung eines dritten Aethertheilchens findet irgendwo zwischen Fluor und Natrium, also zwischen 19 und 23 statt, während das vierte zwischen Chlor und Kalium (35,5 und 39) aufgenommen wird. Während hier die Grenze, welche durch die Aufnahmsgrösse nicht überschritten werden darf, sich genau angeben lässt, geht dieses weniger leicht im nächsten Falle bei der Aufnahme des fünften Aethertheilchens. Nach der in meiner ersten Abhandlung reproducirten Tafel von L. Meyer fällt der kritische Punkt aller Wahrscheinlichkeit nach in die Nähe des Eisens (56). Das sechste Aethertheilchen wird aufgenommen zwischen Brom (80) und Rubidium (85,5). Hier sind die Grenzen wieder sicher. Bei dem siebenten ist die Grenze neuerdings zweifelhaft, sie fällt nach der Tafel zwischen Molybdän (96) und Ruthen (104). Das achte Aethertheilchen findet seine Aufnahme zwischen Jod (127) und Cäsium (133).

Die Stellen, an denen die Aufnahme je eines weiteren Aethertheilchens stattfindet, müssen sich nun zur Bestimmung des Quotienten $\frac{b\mu}{am}$, den ich in der Folge mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen will, und der Constanten r benützen lassen, doch ist die Verwendbarkeit der einzelnen sowohl bezüglich der Sicherheit ihrer Angaben, als auch bezüglich der Weitläufigkeit der mathematischen Formeln eine sehr verschiedene. Am einfachsten bezüglich der letzteren ist diejenige Stelle, bei welcher die Aufnahme des zweiten Aethertheilchens vor sich geht. Eines derselben befindet sich an dem einen Punkte der Oberfläche der Massenkugel, das zweite kommt von derjenigen Seite herein, an welcher das erste den geringsten Widerstand leistet, und lagert sich dorthin, wo die gegenseitige Abstossung eine kleinste ist, also dem ersten Theilchen gegenüber. Trotz aller Einfachheit lässt sich dieser Fall nicht verwenden, weil der Zwischenraum zwischen den Atomgewichten des Wasserstoffs und des Lithiums zu gross ist. Gäbe es noch Elemente, deren Atomgewicht zwischen beiden, etwa bei 4 oder 5 läge, so würde das ausserordentlich förderlich sein; allein solche Elemente giebt es nicht. Die Aufnahmsstelle kann, wenn nur ganze Zahlen berücksichtigt werden, zwischen den Atomgewichten 2 und 6 schwanken, und da letztere Zahl dreimal so gross ist als die

erstere, kämen Differenzen in den Werthen der Constanten zum Vorschein, die das Resultat vollständig illusorisch machen würden.

Die Aufnahme des dritten Aethertheilchens findet zwischen 19 und 23 statt. Hier ist die Differenz eine kleinere und der Werth von $\mathfrak{A}$ und r schwankt an und für sich weniger, also lässt sich diese Gruppirung verwenden. Noch besser gestaltet sich die Sache bei dem vierten Aethertheilchen, weil der Zwischenraum zwischen den Grenzelementen 35,5 und 39 noch etwas kleiner und infolge der grösseren Atomgewichtszahlen der Einfluss auf die Schwankungen von $\mathfrak{A}$ wieder geringer geworden ist.

Die Stellen, an denen das fünfte und das siebente Aethertheilchen aufgenommen werden, sind zu zweifelhaft, als dass die darauf gestützten Formeln weiter, wie als Correctiv der aus den beiden vorhergehenden Stationen erzielten Grössen der Constanten benutzt werden könnten.

Bei den Aethertheilchen 6) und 8) wären wohl die Grenzen der Aufnahme wieder sicher; allein die Sache hat eine andere Schwierigkeit, und diese ist die Bestimmung der Lage der bereits vorhandenen gebundenen Aethertheilchen. Im ersten der beiden Fälle sind fünf Aetherkugeln so über eine Massenkugel vertheilt, dass ihre gegenseitige Abstossung ein Minimum wird. Die Aufgabe, die Lage der einzelnen Aethertheilchen zu bestimmen, ist zwar lösbar, allein von einer derartigen Weitläufigkeit, dass ich glaubte, die Lösung unterlassen zu dürfen, weil doch die Grenzen, innerhalb deren die Aufnahme des sechsten Aethertheilchens erfolgt, wieder zu weit auseinander liegen, um ein der aufgewendeten Arbeit entsprechendes Resultat erwarten zu lassen. Das Nämliche ist der Fall, wenn es sich bei bereits sieben incorporirten Aethertheilchen um die Aufnahme des achten handelt.

Es bleiben daher zunächst die beiden Fälle übrig, in denen zwei (drei) Aethertheilchen bereits aufgenommen sind und ein drittes (viertes) incorporirt werden soll.

Sind zwei Aethertheilchen auf einer Massenkugel bereits vorhanden und soll ein drittes aufgenommen werden, so geschieht dieses am leichtesten dann, wenn das neu aufzunehmende Theilchen sich in einer Geraden befindet, welche durch den Mittelpunkt des Massentheilchens geht und normal auf der Verbindungslinie der beiden bereits aufgenommenen Aetherkugeln steht. Ist R die Entfernung der noch freien Aetherkugel von dem Mittelpunkte des Massentheilchens, r die Summe der Halbmesser des letzteren und eines Aethertheilchens, bedeutet ferner m das Atomgewicht, $\mathfrak{A}$ die Zahl von Wasserstoffatomen, welche zur Neutralisation eines Aethertheilchens genügen, so ergiebt sich nach dem, was ich in meinen früheren Abhandlungen [speciell: erste Abhandlung, Gleichg. 14)] hierüber angeführt habe, die Gleichung:

$$1)\qquad \frac{m}{\mathfrak{A} R^2} - \frac{2R}{(R^2+r^2)^{3/2}} + R = 0 = U.$$

Denken wir uns nun, das Atomgewicht m wachse von einer gewissen Grösse, allenfalls von 10 an, fortwährend, so wird R continuirlich kleiner, endlich bei einem gewissen Werthe von R ist ein Maximum von m nöthig, um das freie Aethertheilchen dort zu erhalten, und sowie diese Grenze überschritten ist, nähert sich das Aethertheilchen dem Atom vollständig. Dieser Fall tritt ein, während das Atomgewicht von 19 auf 23 steigt, denn das Fluoratom hat noch zwei Aethertheilchen, während das Natrium deren drei besitzt. Für die kritische Stelle ist m ein Maximum und für sie gilt neben 1) auch die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{\partial U}{\partial R} = 0 = 6\,R^2(R^2+r^2)^{-3/2} - 6\,R^4(R^2+r^2)^{-5/2} - 3\,R^2.$$

Wird aus 1) und 2) R eliminirt, so ergiebt sich:

$$3)\qquad \frac{m}{\mathfrak{A}} = (4^{0,2}r^{0,8} - r^2)^{3/2}\,(4^{0,2}r^{-1,2} - 1).$$

Bei dem Uebergange von drei Aethertheilchen auf vier ergiebt sich in gleicher Weise:

$$1^*)\qquad \frac{m_1}{\mathfrak{A}\,R_1^2} - \frac{3\,R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}} + R_1 = 0 = U_1$$

und

$$3^*)\qquad \frac{m_1}{\mathfrak{A}} = (9^{0,2}r^{0,8} - r^2)^{3/2}\,(9^{0,2}r^{-1,2} - 1).$$

Wären nun die Atomgewichte m und m_1 genau bekannt, so wäre nichts einfacher, als aus 3) und 3*) $\mathfrak{A}$ und r zu bestimmen; allein die Sache ist nicht so leicht, denn m kann alle möglichen Werthe zwischen 19 und 23 haben, während m_1 zwischen 35,5 und 39 zweifelhaft ist. Da nun unmöglich alle die unendlich vielen Combinationen der Reihe nach benutzt werden können, habe ich für m der Reihe nach die Grössen 20, 21 und 22, und für m_1 36,375, 37,250 und 38,125 gesetzt, alle mit allen mit einander verbunden und aus den einzelnen Combinationen $\mathfrak{A}$ und r berechnet. Es ergeben sich dabei als erste Näherungswerthe:

	m	m_1	$\mathfrak{A}$	r
1.	20	36,375	28,212	0,5022
2.	21	36,375	23,989	0,4359
3.	22	36,375	19,767	0,3413
4.	20	37,250	30,923	0,5269
5.	21	37,250	26,700	0,4713
6.	22	37,250	22,478	0,3948
7.	20	38,125	33,633	0,5477
8.	21	38,125	29,410	0,5001
9.	22	38,125	25,188	0,4367.

Wir haben so für $\mathfrak{A}$ und R je neun verschiedene Werthe und es handelt sich nun darum, aus denselben diejenigen auszusuchen, welche den

Beobachtungen am besten entsprechen. Hier müssen die Uebergangspunkte von vier auf fünf Aethertheilchen und von sechs auf sieben zu Rathe gezogen werden. Die Aufnahme des früheren Aethertheilchens findet nach dem, was oben hierüber erwähnt wurde, in der Gegend des Eisens (56) statt, die Aufnahme des siebenten in der Gegend des Ruthens (104) (doch wohl etwas unterhalb desselben), und es müssen daher in den Gleichungen:

$$4)^* \quad R_2 + \frac{m_2}{\mathfrak{A} R_2^2} = \frac{3\left(R_2 - \frac{r}{3}\right)}{(R_2^2 - \frac{2}{3} R_2 r + r^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R_2 + r)^2}$$

und

$$5)^* \quad R_3 + \frac{m_3}{\mathfrak{A} R_3^2} = 3\left[\frac{(R_3 + r\sqrt{\frac{1}{3}})}{(R_3^2 + 2 R_3 r \sqrt{\frac{1}{3}} + r^2)^{3/2}} + \frac{(R_3 - r\sqrt{\frac{1}{3}})}{(R_3^2 - 2 R_3 r \sqrt{\frac{1}{3}} + r^2)^{3/2}}\right]$$

die Maximalwerthe von m_2 und m_3 möglichst nahe an 56 und 104 fallen.

Versuchen wir zunächst die Combination 3, welche die kleinsten Werthe von $\mathfrak{A}$ und r verlangt, so ist zunächst zu bemerken, dass durch Annäherung sich die genaueren Werthe 19,803 bezw. 0,3426 ergeben, und bei Einsetzung derselben erhalten wir $m_2 = 59{,}594$ bei $R_2 = 0{,}6738$ und $m_3 = 102{,}29$ bei $R_2 = 0{,}7675$. Es ist also m_2 um etwa drei Einheiten zu gross, während m_3 als richtig angenommen werden kann. Die Combination 6 giebt als genaue Werthe $\mathfrak{A} = 22{,}522$ und $r = 0{,}3959$, welche ihrerseits zu $m_2 = 63{,}024$ bei $R_2 = 0{,}8085$ und $m_3 = 111{,}39$ bei $R_3 = 0{,}8267$ führen. Beide Werthe sind erheblich zu gross. Die Combination 2 giebt $\mathfrak{A} = 24{,}165$ und $r = 0{,}4407$, welche ihrerseits $m_2 = 63{,}255$ bei $R_2 = 0{,}8411$ und $m_3 = 114{,}77$ bei $R_3 = 0{,}8725$ entziffern lassen. Nimmt man die Combination 4, so resultiren $\mathfrak{A} = 32{,}633$ und $r = 0{,}5589$, und daraus wieder erhält man $m_2 = 69{,}712$ bei $R_2 = 0{,}9114$ und $m_3 = 136{,}45$ bei $R_3 = 0{,}9799$.

Man sieht aus diesen einzelnen Beispielen, dass mit $\mathfrak{A}$ und r auch die Maxima wachsen; diese sind aber beide schon bei der zweiten der vorausgesetzten Combinationen zu gross, und ich werde mich daher auf die Combination 3 beschränken, da ich die Berechnung der Gesammtheit der übrigen für überflüssig halte.

Die Combination 3 giebt also m_2 etwas zu gross, während m_3 zwischen Molybdän und Ruthen fällt, wohin es nach der Meyer'schen Tafel gehört, wenn man Eisen und Ruthen als diejenigen Elemente annimmt, bei welchen die Aufnahme eines neuen Aethertheilchens stattfindet. Durch kleine Abänderung der Combination wäre es am Ende schon möglich gewesen, dem Eisen wenigstens näher zu kommen; es darf aber nicht ausser Augen gelassen werden, dass es doch nicht so ganz sicher ist, dass die Aufnahme gerade dann stattfinde, wenn das Atomgewicht 56 beträgt. Es giebt übrigens noch einen weiteren Um-

* Diese Zeitschrift XXV, 369.

stand, welcher es möglich macht, dass die Aufnahme eines weiteren Aethertheilchens etwas früher stattfinden kann, als das Atomgewicht es verlangt, und dieser Umstand ist erhöhte Temperatur, welche bei der Bildung unserer Elemente jedenfalls von Einfluss gewesen ist. Denken wir uns, es gebe ein Element, welches ein Atomgewicht etwas unterhalb 22 besitzt, so wird dasselbe von vornherein zwei Aethertheilchen aufnehmen und bei 0^0 absoluter Temperatur wird sich ein drittes in einer Entfernung von dem Atom aufstellen, welche etwas grösser ist als 0,7638. Wenn nun infolge erhöhter Temperatur Schwingungen eintreten, so ist es nicht zu vermeiden, dass das Aethertheilchen dem Atom bald etwas ferner, bald etwas näher ist. Im ersten Falle kehrt es von selbst wieder um, weil die Abstossung abnimmt, der äussere Aetherdruck wächst; nähert es sich dagegen dem Atom auf eine geringere Distanz als 0,7638, so kehrt es nicht mehr um, denn es kommt in einen Bereich, in welchem es von dem Atom weniger abgestossen wird, als bei 0,7638, und es nähert sich also demselben bis zum Contact, es wird also früher aufgenommen, als dieses bei 0^0 stattfinden würde. Dadurch könnte es kommen, dass das fünfte Aethertheilchen schon früher aufgenommen würde, als bei dem Atomgewichte 59,6, wie obige Voraussetzung es erheischt. Vielleicht ist auch die Aufnahmsstelle des vierten Aethertheilchens bei 0^0 etwas grösser als 36,375, weil letztere Grösse so nahe an 35,5 liegt, dass erhöhte Temperatur dem Chlor schon das vierte Aethertheilchen einbringen könnte. Da nun das Chlor dieses vierte Aethertheilchen nicht besitzt, würde daraus folgen, dass die Aufnahmsstelle für 0^0 etwas höher liege als 36,375; dann würde aber auch die nächstuntere kritische Stelle für 0^0 etwas höher liegen als 22, und die Constanten $\mathfrak{A}$ und r würden daher keine wesentliche Aenderung erfahren.

Eine wenn auch geringe Erniedrigung der kritischen Stelle kann auch durch die Einwirkung des aufzunehmenden Aethertheilchens auf die bereits incorporirten hervorgebracht werden. Haben wir z. B. zwei der letzteren einander diametral entgegengesetzt bereits auf einem Atom, und kommt ein drittes in der Aequatorialebene daher, so werden sich die beiden incorporirten Theilchen aus ihrer Axenstellung weg und gegen die abgewendete Seite hin bewegen, wodurch bewirkt wird, dass ihre Abstossung auf das neu aufzunehmende Aethertheilchen sich verringert und dieses schon bei einem geringeren Atomgewichte aufgenommen werden kann. Diese Einwirkung ist Null, wenn nur ein einziges Aethertheilchen incorporirt ist; sie wächst aber mit der Zahl der bereits auf einem Atom versammelten Theilchen.

Es kann noch eingewendet werden, dass die Grösse r schwerlich für alle Elemente die nämliche sei. Aller Wahrscheinlichkeit nach besitzt r die Form $a + b\sqrt[3]{m}$, wenn a und b Constante, m das Atomgewicht ver-

stellen; ich halte es jedoch nicht für zeitgemäss, noch eine weitere Unbekannte einzuführen.

Nach all' diesem halte ich es für das Zweckmässigste, bei den beiden Constanten $\mathfrak{A} = 19{,}803$ und $r = 0{,}3426$ für so lange stehen zu bleiben, bis sich weitere Anhaltspunkte ergeben, welche eine genauere Bestimmung gestatten.

Nach Bestimmung der Constanten erübrigt noch die Umarbeitung der bisherigen Rechnungen auf Grund der neuen Werthe von A und r. Für den Wasserstoff ist noch ausserdem die Einreihung in die Art der Behandlung der übrigen bereits bearbeiteten Elemente nöthig. Ich habe nämlich bei dem Sauerstoff aus den dort angegebenen Gründen das Zusammenwirken von drei in einer Geraden befindlichen Theilchen untersucht und dieses Verfahren auch bei den übrigen Elementen beobachtet; da jedoch die Besprechung des Wasserstoffes derjenigen des Sauerstoffes vorausging und bei ersterem das erwähnte Verfahren noch nicht in Anwendung gebracht ist, will ich dasselbe bei dieser Gelegenheit nachholen.

Befindet sich in einem mit Aether erfüllten Raume ein Wasserstoffatom, d. h. die Massenkugel und das mit ihr vereinigte Aethertheilchen, so wird es sich gegen eines der umgebenden Aethertheilchen A_1 so stellen, dass es diesem gegenüber seine Massenkugel H hat, während auf der abgewendeten Seite das gebundene Aethertheilchen A sich befindet, d. h. es ergiebt sich die Stellung $A H \; A_1$. Nach unserer Voraussetzung ist dann auf der dem freien Aethertheilchen A_1 abgewendeten Seite des Atomes ein weiteres Aethertheilchen A_2, so dass also die Stellung $A_2 \; A H \; A_1$ zum Vorschein kommt.

Die Behandlung des Wasserstoffes bietet gegen diejenige der übrigen Elemente die Schwierigkeit, dass das Atom nicht einen Mittelpunkt hat, wie dieses bei den übrigen Atomen der Fall ist. Bei letzteren ist der Mittelpunkt der Massenkugel offenbar auch derjenige des ganzen Atomes, d. h. der Massenkugel und der von ihr incorporirten Aethertheilchen. Bei dem Wasserstoffe, der aus einer Massenkugel und einem einzigen Aethertheilchen zusammengesetzt ist, lässt sich das nicht anwenden. Wären beide das Wasserstoffatom zusammensetzenden Kugeln gleicher Art und nur durch ihre Grösse von einander verschieden, so wäre die Sache wieder einfach, denn man hätte nur analog den Schwerpunktsbestimmungen vorzugehen und in unserem Falle also die Grösse $r = 0{,}3426$ in $19{,}803 + 1 = 20{,}803$ Theile zu theilen, worauf der den Schwerpunkt ersetzende Punkt sich in der Entfernung 19,803 von dem Massenkugelmittelpunkte und in der Entfernung 1 von dem Aethertheilchen befände. In unserem Falle wirken jedoch die beiden Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne. Unter diesen Umständen habe ich es in meiner letzten

Abhandlung vorgezogen, bei der Bestimmung des Atommittelpunktes des Wasserstoffes, der zur Festsetzung des Abstandes des Atoms von den übrigen Theilen der Combination dient, trotz der vorhandenen Verschiedenheit analog der Schwerpunktsbestimmung vorzugehen, wobei ich jedoch bemerken muss, dass es sich hier nicht um die Grösse des R des Wasserstoffes an und für sich, sondern nur um die Vergleiche mit anderen R handelt. Haben wir z. B. die Combination KOH, so ist der Mittelpunkt des Kalium- und des Sauerstoffatomes auch der Mittelpunkt der jeweiligen Massenkugel, und die Entfernung der Bestandtheile des Wasserstoffs von dem Sauerstoff einer-, derjenigen das Kaliums andererseits lassen sich leicht bestimmen. Es kommt nur dann eine Schwierigkeit zum Vorschein, wenn die Entfernung KO mit derjenigen OH verglichen werden soll, denn da ist es nicht gleichgiltig, ob man von dem Sauerstoff zu der Massenkugel oder bis zu dem Aethertheilchen des Wasserstoffs misst. In Ermangelung eines besseren Anhaltspunktes muss ich bis auf Weiteres dem erwähnten Verfahren treu bleiben und ich setze daher als Mittelpunkt des Wasserstoffatoms denjenigen Punkt, der $\frac{r}{20,803} = 0,0165$ von dem Aethertheilchen entfernt zwischen diesem und der Massenkugel gelegen ist. Vielleicht gelingt es, bei näherem Eingehen auf die thermischen Verhältnisse über diese Schwierigkeit wegzukommen; allein einstweilen bin ich noch nicht so weit, da dem Gange jeder derartigen Untersuchung zufolge zuerst die einfacheren Verhältnisse durchgenommen werden müssen, um für die verwickelteren Fälle mit Orientirungspunkten ausgerüstet zu sein.

Ist die Stellung $A_2 \quad AH \; A_1$ gegeben und bezeichnet man mit R und R_1 die Entfernungen $A_1 A$ und $A A_2$, so ist nach dem Vorstehenden der Mittelpunkt des Wasserstoffs zwischen H und A und um 0,0165 von letzterem entfernt. Der auf A_1 ausgeübte Aetherdruck wird durch $R - 0,0165$ gemessen, der auf A_2 ausgeübte durch $R_1 + 0,0165$. Nach dem Früheren ergeben sich nun die Gleichungen:

$$6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{19,803} \cdot \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+R_1)^2} + R - 0,0165 = 0 \\ \text{und} \\ \frac{1}{19,803} \cdot \frac{1}{(R_1+r)^2} - \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{(R+R_1)^2} + R_1 + 0,0165 = 0. \end{array} \right.$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe $R = 1,0485$ und $R_1 = 1,0645$.

Es kann nun eines der Aethertheilchen — wir wollen zunächst setzen A_1 — durch ein zweites Wasserstoffatom ersetzt werden, wenn letzteres HA sich mehr nähert als A_1. Die Stellung der einzelnen Glieder ist alsdann gegeben durch $A_1 H_1 \; AH \quad A_2$, die Wasserstoffatome sind also abweichend von der früheren Annahme gegen einander so gerichtet, wie zwei Magnetnadeln thun würden. Daraus folgen die Gleichungen:

$$7)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{19{,}803}\left(\frac{1}{(R-r)^2}+\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{1}{(R+R_1-r)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{19{,}803^2}\right)\frac{1}{R^2}\\ -\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{18{,}303}{19{,}803}R+r\left(\frac{1}{19{,}803}+\frac{1}{20{,}803}-\frac{1}{19{,}803}\cdot\frac{1}{20{,}803}\right)=0\\ \text{und}\\ \frac{1}{19{,}803}\left(\frac{1}{(R_1-r)^2}+\frac{1}{(R+R_1-r)^2}\right)-\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{(R+R_1)^2}+R_1-0{,}0165=0.\end{array}\right.$$

Hier ist $R(A_1 A)=1{,}0376$ und $R_1(A A_2)=1{,}0466$, es ist also R in 7) $< R$ in 6), und es bildet sich darum durch Abdrängen von A_1 in 6) das Wasserstoffmolecul 7).

Man kann nun auch noch das letzte Aethertheilchen A_2 in 7) durch ein Wasserstoffatom ersetzen und seine Entfernung von $H A$ berechnen, wodurch dann die Stellung $A_1 H_1 \quad A H \quad A_2 H_2$ zum Vorschein kommt, welche zu folgenden Gleichungen führt:

$$8)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{19{,}803}\left(\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{1}{(R-r)^2}+\frac{1}{(R+R_1+r)^2}+\frac{1}{(R+R_1-r)^2}\right)\\ -\left(1+\frac{1}{19{,}803^2}\right)\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)+\frac{18{,}803}{19{,}803}R\\ +r\left(\frac{1}{19{,}803}+\frac{1}{20{,}803}-\frac{1}{19{,}803.20{,}803}\right)=0\\ \text{und}\\ \frac{1}{19{,}893}\left(\frac{1}{(R_1+r)^2}+\frac{1}{(R_1-r)^2}+\frac{1}{(R+R_1+r)^2}+\frac{1}{(R+R_1-r)^2}\right)\\ -\left(1+\frac{1}{19{,}803^2}\right)\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)+\frac{18{,}803}{19{,}803}R_1\\ -r\left(\frac{1}{19{,}803}+\frac{1}{20{,}803}-\frac{1}{19{,}803}\cdot\frac{1}{20{,}803}\right)=0.\end{array}\right.$$

Jetzt ist $R(A_1 A)=1{,}0317$ und $R_1(A A_2)=1{,}0595$. Da nun R_1 in 8) grösser ist als in 7), kann das zweite Aethertheilchen in 7) nicht durch ein weiteres Wasserstoffatom abgedrängt werden, und es hat daher bei der Bildung des Wasserstoffmoleculs H_2 sein Verbleiben. Ich muss hier darauf aufmerksam machen, dass sich die vorstehenden Formeln auf 0^0 absoluter Temperatur beziehen, und es ist demnach eine Condensation des Wasserstoffes durch blosse Abkühlung, selbst wenn diese bis 0^0 gehen würde, unmöglich. Soll eine Condensation vor sich gehen, so müssen zur Herstellung der Molecularwirkung die Aetherhüllen der Molecule möglichst abgestreift werden und dieses kann hier nur durch ungeheure Compression geschehen.

Infolge der Aenderung der Constanten haben sich auch die Entfernungen etwas geändert, welche die übrigen bisher besprochenen Elemente gegen einander beobachten, und ich gebe daher im Nachstehenden

die neuen Ziffern. Die Veränderungen sind nicht bedeutend und ich habe es daher für überflüssig gehalten, alle die Combinationen durchzurechnen, von denen weiter nichts zu sagen ist, als dass sie in der Natur nicht vorkommen können.

Für den Sauerstoff und seine Verbindungen mit Wasserstoff ergeben sich nachstehende Resultate, wobei bemerkt wird, dass bei dem Wasserstoffe die constante Grösse $\frac{r}{20,803}$, d. i. 0,0165, bereits abgezogen ist.

α) $A \underset{1,0510}{\;} O \underset{1,0510}{\;} A$ Sauerstoffatom;

β) $O \underset{0,9568}{\;} O \underset{1,0715}{\;} A$ Sauerstoffmolecul;

γ) $O \underset{0,9820}{\;} O \underset{0,9820}{\;} O$ Ozon;

δ) $H \underset{1,0144}{\;} O \underset{1,0457}{\;} A$ ½ Wasserstoffhyperoxyd;

ε) $H \underset{1,0091}{\;} O \underset{1,0091}{\;} H$ Wasser.

Man sieht hieraus, dass das Sauerstoffmolecul O_2 eine festere Verbindung sein müsse als das Ozon O_3, und die Differenz der Distanzen der Atome in den beiden Verbindungen 0,9820 — 0,9568 ist sogar eine ziemlich bedeutende. Nichtsdestoweniger ist ein grosser Unterschied zwischen dem Verhalten des Sauerstoffes und dem oben erwähnten des Wasserstoffes insofern zu bemerken, als ersterer durch blosse Temperaturerniedrigung condensirbar sein muss, was bei letzterem nicht der Fall ist. Für 0^0 der absoluten Temperatur zeigt sich eine Analogie in dem Verhalten des Sauerstoffes und dem des in meiner vorigen Arbeit besprochenen Lithiums, und die dortige Gleichung 42) entspricht derjenigen des Ozons.

Meine bisherigen Rechnungen beziehen sich auf 0^0 abs. und es fehlt demnach in den Gleichungen noch ein Glied, welches den Einfluss der Schwingungen angiebt.

In einer früheren Abhandlung* habe ich gezeigt, dass, wenn infolge von Temperaturerhöhung eine Volumvergrösserung eines Körpers erfolgt, endlich einmal eine Stelle kommt, bei welcher die Rechnung für die Volumzunahme einen imaginären Werth ergiebt, was darauf hinweist, dass der Körper bei der entsprechenden Temperatur in der bisherigen Weise nicht mehr fortbestehen kann und eine Aenderung des Aggregatzustandes erfolgen muss. Ein derartiger Vorgang mag auch bei den chemischen Verbindungen stattfinden und durch Imaginärwerden des Werthes von R eine Zersetzung erfolgen. Es ist übrigens auch möglich, dass, wenn infolge der Schwingungen die Atome weiter und weiter aus-

* Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung, diese Zeitschrift XXIII, 5.

einanderrücken, sie nach und nach mehr und mehr von den umgebenden Aethertheilchen abgedrängt werden, so dass also eine allmälige Zersetzung eintritt. Das allmälige Verschwinden des Ozons bei Temperaturerhöhung scheint auf letzteren Vorgang hinzudeuten. Mag nun in der Natur die eine oder andere dieser Möglichkeiten ihre Anwendung finden, so müssen, wenn in die Sauerstoffgleichung ein von der Temperatur abhängiges Glied eingeführt wird, die Sauerstoffatome bei höheren Temperaturen in den Fall kommen, in dem die Atome des Wasserstoffs sich schon bei 0° abs. befinden, nämlich, dass nur Verbindungen je zweier Atome stattfinden können, und es kann dann nicht, wenigstens nicht ohne Anwendung von Compression, zur Bildung von Ozon oder gar zu derjenigen eines tropfbarflüssigen oder eines festen Körpers kommen. Thatsache ist, dass das Ozon gegen erhöhte Temperatur sehr empfindlich ist und bei dem Erhitzen sich sehr leicht zersetzt. Künstliche Kälte muss wohl ein Mittel sein, eine ozonreichere Luft herzustellen, als dieses bei gewöhnlicher Temperatur der Fall ist.

Die Verbindungen der Alkalimetalle geben bei Anwendung der neuen Constanten nachstehende Resultate:

K	*O*	*K*	*Na*	*O*	*Na*	*Li*	*O*	*Li*
1,1159	1,1159		1,0700	1,0700		1,0497	1,0497	
K	*O*	*A*	*Na*	*O*	*A*	*Li*	*O*	*A*
1,0110	1,1523		0,9975	1,1262		0,9820	1,1137	
K	*O*	*O*	*Na*	*O*	*O*	*Li*	*O*	*O*
1,0317	1,0744		1,0161	1,0463		1,0044	1,0318	
K	*O*	*H*	*Na*	*O*	*H*	*Li*	*O*	*H*
1,0058	1,1313		0,9928	1,1057		0,9764	1,0930.	

Vergleicht man diese Zahlen mit denjenigen, welche ich in meiner vorigen Abhandlung gegeben, so findet man ausser dem, dass sie allgemein etwas grösser geworden sind, noch den Unterschied, dass die Distanzen *NaO* in *NaOA* und *NaO* in *NaOO* und *NaOH* etwas kleiner sind, als die entsprechenden Entfernungen bei den Kaliumverbindungen, und es gilt also, abweichend von den früheren Schlüssen, für die Verwandtschaftsverhältnisse des Natriums dasselbe, was ich über diejenigen des Lithiums angegeben habe.

XIV.

Ueber die Bewegung eines starren räumlichen Systems.

Von

Dr. A. Schoenflies,
Oberlehrer am Lyceum in Colmar i. E.

Bereits vor längeren Jahren ist von Chasles* eine Reihe von Sätzen über die unendlich kleine Bewegung eines starren unveränderlichen Systems aufgestellt worden. In neuerer Zeit hat besonders Mannheim** in seiner grundlegenden Arbeit: „Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales.“ die Chasles'schen Untersuchungen nach neuen Methoden um ein Bedeutendes weiter geführt. Es hat sich herausgestellt, dass mit der unendlich kleinen Bewegung eines starren Systems zwei Complexe eng verknüpft sind, nämlich erstens ein Complex ersten Grades, gebildet von den Normalen der Bahnen aller Systempunkte, und zweitens ein Complex zweiten Grades, den die Tangenten dieser Bahnen oder, was dasselbe ist, die Charakteristiken aller Ebenen des starren Systems repräsentiren. Es bilden demnach, wie Chasles zuerst gezeigt hat, die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer Geraden ein hyperbolisches Paraboloid, die Charakteristiken aller Ebenen, die durch eine Gerade gehen, ein Hyperboloid, die Tangenten der Bahnen, die durch einen Punkt gehen, einen Kegel zweiten Grades, die Punkte, deren Tangenten diese Geraden sind, eine Raumcurve dritter Ordnung, die Normalebenen der Bahnen dieser Punkte eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung etc. etc.

Chasles hat die von ihm entdeckten Gesetze ohne Beweis mitgetheilt; es ist jedoch augenscheinlich, dass er sie aus den Lehren der synthetischen Geometrie entnommen hat. In der That bilden ja die beiden unendlich nahen Lagen des beweglichen Systems zwei collineare Räume; die Gesammtheit der Tangenten der Systempunkte oder die Gesammtheit

---

* Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Comptes rendus Bd. 16 S. 1420 flgg.

** Journal de l'école polytechnique Heft 43 S. 57 flgg.

der Charakteristiken aller Ebenen des Systems ist daher nichts Anderes, als das Erzeugniss dieser collinearen Räume, die in dem hier betrachteten Falle überdies congruent sind. Die Chasles'schen Sätze sind später von Jonquières* und Brisse** synthetisch bewiesen worden; allein die besonderen Lagen- und Grössenverhältnisse jener geometrischen Gebilde, welche offenbar nur von den Constanten der augenblicklichen Schraubenbewegung abhängig sein können, sind bisher noch nicht untersucht worden. Die nachfolgende Arbeit ist der Bestimmung derselben gewidmet.

---

§ 1.

Die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer Geraden g bilden bekanntlich ein hyperbolisches Paraboloid***. Denn sie sind das Erzeugniss von zwei gleichen Punktreihen auf g und g_1, wo g_1 die Lage der Geraden g nach der unendlich kleinen Verschiebung des betrachteten Systems bedeutet.

Sei nun g' die zu g conjugirte Gerade, P ein Punkt von g, und t die Tangente der Bahn von P, so ist die durch P und g' gelegte Ebene die Normalebene der Bahn von P. Da demnach t senkrecht zur Geraden g' ist, so folgt zunächst, dass alle Tangenten t parallel mit einer zu g' senkrechten Ebene sind. Ist S derjenige Punkt von g, welcher von g' die kürzeste Entfernung hat, und k die Gerade kürzesten Abstandes, so ist eine solche Ebene τ z. B. diejenige, welche durch k und die zum Punkte S gehörige Tangente t_0 geht.

Die Ebene, welcher die andere Geradenschaar des Paraboloids parallel läuft, ist offenbar parallel zu g und g_1. Nun existirt eine Gerade d parallel zu g, welche ebenfalls auf k senkrecht steht und Tangente der Bahn eines ihrer Punkte ist. Sie liegt mit ihrer unendlich nahen Geraden d_1 in einer Ebene γ, nämlich in derjenigen, deren Charakteristik sie ist. Diese Ebene geht durch k und d, also auch durch g. Da nun g parallel mit d, und ebenso g_1 parallel mit d_1 ist, so folgt sofort, dass die zweite Geradenschaar des Paraboloids der Ebene γ parallel läuft. Demnach ist S der Scheitel des Paraboloids und k die im Endlichen liegende Axe desselben.

Die beiden Hauptebenen des Paraboloids halbiren die von g und t_0 gebildeten Winkel. Jede schneidet das Paraboloid in einer Parabel; ihre Oeffnungen sind bekanntlich nach entgegengesetzten Seiten der Haupt-

* Mélanges de géométrie pure. Paris 1856. S. 1–54.

** Mémoire sur le déplacement des figures. Journal de math. pures et appliquées p. Liouville. (2.) Bd. 15 S. 281.

*** Chasles a. a. O. Satz 25.

axe k hin gerichtet. Die Parameter dieser Parabeln lassen sich folgendermassen bestimmen.

Sei η diejenige der beiden Hauptschnittsebenen, für welche die Oeffnung der zugehörigen Parabel nach der zu g conjugirten Geraden g' hingewandt ist,* und h ihr Schnitt mit der von g und t_0 gebildeten Ebene, so ist h die Scheiteltangente dieser Parabel. Zieht man noch durch S eine Gerade g_0 parallel zu g', so liegen die vier Geraden g_0, g, h, t sämmtlich in einer Ebene α, nämlich in der Tangentialebene des Paraboloids für den Scheitelpunkt S. Ist nun ε eine beliebige zu g' senkrechte Ebene, welche die Geraden g', g_0, g, h resp. in den Punkten G', G_0, G, H treffen möge, so schneidet sie das Paraboloid in einer Geraden t, und zwar in derjenigen, welche durch G geht. Diese Gerade t trifft die Ebene η in einem Punkte T, welcher der in dieser Ebene liegenden Parabel angehört, da er ja ihr Schnitt mit t ist. Nennt man noch den von g und t_0 gebildeten Winkel φ, den von $\overline{G'G_0}$ und $\overline{G'G}$ gebildeten ψ, so erhält man

$$GH = GS = \frac{G_0 S}{\sin\varphi}, \quad HS = \frac{G_0 S}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$HT = GH\, tg\,\psi = \frac{G_0 S}{\sin\varphi} \cdot tg\,\psi.$$

Ferner ist

$$G_0 G = G_0 S . ctg\,\varphi = G_0 G' . tg\,\psi,$$

also ergiebt sich

$$HT = \frac{\overline{G_0 S}^2}{G_0 G'} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Nun ist, wie wir oben sahen, HS die Scheiteltangente der Parabel. Verbinden wir ihren Halbirungspunkt L mit T und ziehen $LF \perp TL$, so ist F der Brennpunkt der Parabel, und es ergiebt sich

$$FS = G_0 G' \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

$G_0 G'$ ist gleich dem kürzesten Abstande der beiden conjugirten Geraden g und g'. Bezeichnen wir denselben noch mit $\bar{k}$, so erhalten wir

---

* Für welche der beiden Hauptschnittsebenen dies der Fall ist, lässt sich leicht bestimmen. In der That, denkt man sich durch den Scheitel des Paraboloids eine Gerade x_0 parallel der augenblicklichen Momentanaxe x der Schraubenbewegung gezogen, so bilden die Geraden x_0 und t_0 einen spitzen und einen stumpfen Winkel mit einander. Nennt man nun diejenige Drehung, bei welcher t_0 den spitzen Winkel durchläuft, um mit x_0 zusammenzufallen, positiv, so überzeugt man sich, dass, wenn g in dem von t_0 und x_0 gebildeten spitzen Winkelraum liegt, t_0 im positiven Sinne zu drehen ist, um in die Lage von h zu kommen, dagegen, wenn g in dem andern Winkelraum liegt, im negativen.

$$1) \qquad FS = \bar{k} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Wie die analoge Rechnung zeigen würde, ergiebt sich für die Entfernung des Brennpunktes der andern Parabel vom Scheitel der Werth

$$2) \qquad F_1 S = \bar{k} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Wie Mannheim gezeigt hat,* besitzt der Punkt S die besondere Eigenschaft, dass er Centralpunkt der von g erzeugten geradlinigen Fläche auf g ist. Ferner ist** die Gerade k kürzesten Abstandes von g und g' die Normale der von g erzeugten Fläche im Centralpunkte S von g. Mit Rücksicht darauf lässt sich nunmehr folgendes zusammenfassende Resultat aussprechen:

I. Die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer beliebigen Geraden g bilden in jedem Augenblicke der Bewegung eines unveränderlichen starren Systems ein hyperbolisches Paraboloid. Der Scheitel des Paraboloids ist der Centralpunkt von g auf der geradlinigen Fläche, welche diese Gerade erzeugt. Die Hauptaxe des Paraboloids ist die Normale der von g erzeugten Fläche im Centralpunkte von g. Die beiden Hauptebenen halbiren die Winkel, welche von g selbst und von der Tangente der Bahn des Centralpunktes von g gebildet werden. Die Parameter der beiden Hauptschnittsparabeln haben die durch die Gleichungen 1) und 2) gegebenen Werthe.

Ist $\angle \varphi = \frac{\pi}{2}$, d. h. steht g senkrecht auf der Tangente t_0, so sind bekanntlich die Tangenten der Bahnen aller Punkte von g senkrecht zu g, und das Paraboloid ist ein gleichseitiges. Alsdann ist g sich selbst conjugirt, demnach ist $\bar{k} = 0$ und die Gleichungen 1) und 2) geben unbestimmte Werthe für die Parameter der beiden Parabeln. Wir wollen deshalb die obigen Ausdrücke noch so umformen, dass sie in allen Fällen brauchbare Werthe liefern.

Bezeichnen wir den Parameter der momentanen Schraubenbewegung mit p, und die Abstände der Geraden g und g' von der Momentanaxe der Schraubenbewegung mit r und r', so bestehen die Gleichungen***

$$r \, tg(g'x) = h \quad \text{und} \quad r' \, tg(gx) = h,$$

also ist

---

* Mannheim, a. a. O. S. 73.

** Vergl. Mannheim, a. a. O. S. 65.

*** Chasles, a. a. O. Satz 37, oder Mannheim, a. a. O. S. 74.

$$r + r' = h(ctg(gx) + ctg(g'x))$$
$$= \frac{h \sin(g, g')}{\sin(gx) . \sin(g'x)}.$$

Nun ist aber $\sin(gg') = \cos\varphi$ und $r + r' = G_0 G = \bar{k}$, also folgt

$$3) \qquad FS = \frac{p . \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin(gx) . \sin(g'x)}$$

und

$$4) \qquad F_1 S = \frac{p . \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin(gx) . \sin(g'x)}.$$

Sowohl diese Ausdrücke, als auch die in den Gleichungen 1) und 2) stehenden lassen sich, wie augenscheinlich ist, ohne Weiteres geometrisch construiren, wenn der Parameter der momentanen Schraubenbewegung und die Lage der Geraden g zur augenblicklichen Momentanaxe bekannt sind.

Ist im Besondern $\varphi = 0$, d. h. ist g selbst Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, so liegen, wie bekannt, die Tangenten der Bahnen aller ihrer Punkte in einer Ebene, nämlich in derjenigen, deren Charakteristik g ist. Die Tangenten umhüllen eine Parabel, deren Brennpunkt der Pol dieser Ebene ist. Auch dieses specielle Resultat ergiebt sich unmittelbar aus den obigen Gleichungen.

§ 2.

Die Charakteristiken aller Ebenen ε, welche durch eine beliebige Gerade g des starren Systems hindurchgehen, bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloids; denn sie sind das Erzeugniss zweier projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen g und g_1 sind, wo g_1 wieder die Lage von g nach der unendlich kleinen Bewegung bedeutet. Da die beiden durch g und g_1 gehenden Ebenenbüschel in unserem speciellen Falle überdies congruent sind, so lässt sich sofort schliessen, dass das Hyperboloid ein orthogonales ist.*

Der eben angezogene Satz, dass zwei congruente Ebenenbüschel eine orthogonale Geradenschaar erzeugen, ist jedoch bisher unmittelbar nur unter der Bedingung bewiesen worden, dass die Axen der Büschel sich schneiden, d. h. wenn die Büschel einen Kegel ergeben. Der entsprechende Satz für das Hyperboloid ist — wie a. a. O. zu sehen — nur durch Analogie mit dem eben genannten Kegel abgeleitet worden. Ich werde nun zeigen, dass sich in dem hier betrachteten Falle, d. h. wenn

* Ruth, Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloids und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 80 S. 257.

die Axen der beiden Büschel unendlich nahe liegen, die Orthogonalität des Hyperboloids ganz unmittelbar aus den Gesetzen der Kinematik ergiebt, ohne dass es nöthig wäre, auf den Asymptotenkegel zurückzugehen.

Wie Mannheim bewiesen hat,* ist die Charakteristik einer Ebene ε die Projection irgend einer Geraden auf ε, welche einer beliebigen zu ε senkrechten Ebene ε' adjungirt ist. Demnach lässt sich auch umgekehrt schliessen, dass, wenn man durch die Charakteristik von ε eine zu dieser Ebene ε senkrechte Ebene legt, diese Ebene alle diejenigen Geraden enthält, welche den zur ursprünglichen Ebene ε senkrechten Ebenen ε' adjungirt sind. Denken wir uns nun ein Büschel von Ebenen ε, dessen Axe die Gerade g ist, so giebt es eine Ebenenschaar ε', welche zu allen diesen Ebenen ε senkrecht ist, nämlich die Schaar der zu g senkrechten Ebenen. Construiren wir nun zu jeder Ebene ε die Ebene, welche durch ihre Charakteristik geht und senkrecht zu ε ist, so enthält sie die adjungirten aller zu ε senkrechten Ebenen, also auch sicher die adjungirte l der Ebenenschaar ε'. Da dies für jede Ebene ε des betrachteten Büschels gilt, so folgt sofort, dass alle Ebenen, welche man senkrecht zu den Ebenen ε in ihren Charakteristiken errichtet, durch eine und dieselbe Gerade l gehen, und zwar ist diese Gerade adjungirt zu der Ebenenschaar, die senkrecht zu g ist.**

Demnach ist das von den Charakteristiken gebildete Hyperboloid das Erzeugniss zweier zu einander rechtwinkligen Ebenenbüschel, d. h.*** es ist orthogonal. Also ergiebt sich folgender Satz:

II. Die Charakteristiken aller Ebenen eines starren räumlichen Systems, welche durch eine Gerade g gehen, bilden in jedem Augenblicke der Bewegung ein orthogonales Hyperboloid. Dasselbe erscheint als das Erzeugniss von zwei orthogonalen Ebenenbüscheln, deren eines die Gerade g zur Axe hat, während die Axe des andern die zu den Ebenen senkrecht g adjungirte Gerade l ist.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Kinematik den Nachweis der Identität des durch zwei congruente Büschel erzeugten Hyperboloids und des durch zwei orthogonale Büschel erzeugten für den hier in Frage kommenden Fall ganz besonders einfach zu führen im Stande ist.

Unter den Ebenen des durch g gehenden Ebenenbüschels sind zwei besonders ausgezeichnet, erstens die Ebene parallel zur Momentanaxe x, und zweitens die Ebene, welche die Gerade k kürzesten Abstandes von x

* Mannheim, a. a. O. S. 69.

** Vergl. auch Mannheim, a. a. O. S. 70.

*** H. Schröter: Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Borchardt's Journ. f. Math. Bd. 85 S. 26.

und g enthält. Die Charakteristik l' der ersten Ebene ist parallel zur Momentanaxe x und ist die Projection dieser Momentanaxe auf sie, die Charakteristik g'' der zweiten Ebene ist parallel zu g und geht durch den Brennpunkt derjenigen durch k gelegten Ebene, welche senkrecht zu g ist. Folglich geht l durch denselben Punkt S'' von k, wie g'', denn die adjungirte einer Ebene ist ja die durch ihren Brennpunkt parallel zur Momentanaxe gezogene Gerade. Demnach ergiebt sich, dass k eine Hauptaxe des orthogonalen Hyperboloids ist und dass die Ebenen (gl') und $(g''l)$ die Tangentialebenen in den Endpunkten S und S'' dieser Hauptaxe sind.

Die Länge der Hauptaxe SS' ist gleich der Entfernung der beiden parallelen Geraden g und g''. Ist g, die Momentanaxe x und der Parameter der augenblicklichen Schraubenbewegung dem Sinne und der Grösse nach gegeben, so lässt sich die Gerade g'' ohne Weiteres construiren; sie schneidet k in einem Punkte, dessen Abstand r'' von x sich aus der Gleichung $p = r'' ctg(gx)$ ergiebt; die Seite von x, auf welcher sie liegt, ist durch die Richtung der Schraubenbewegung unmittelbar bestimmt. Bezeichnen wir noch den Abstand von g und x mit r und die Axe SS'' mit $2a$, so gilt die Gleichung

$$2a = r + r'',$$

wo r'' positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem g und g'' auf verschiedenen oder auf derselben Seite von x liegen. Diese Gleichung gilt überdies auch dem Sinne nach.

Die beiden anderen Hauptaxen des Hyperboloids sind durch den von g und x gebildeten Winkel bestimmt. Die beiden durch S gehenden Geraden g und l' bilden nämlich, da l parallel zu x ist, denselben Winkel mit einander, wie g und x. Dieser Winkel ist der Asymptotenwinkel derjenigen Hyperbel, in welcher die zur Axe a senkrechte Hauptebene das Hyperboloid schneidet. Nennen wir ihn φ und führen einen einen Winkel ψ durch die Gleichung

$$\sin\frac{\psi}{2} = tg\frac{\varphi}{2}$$

ein, so bestehen* die beiden Relationen

$$b = a\cos\frac{\psi}{2}, \quad b = c\sin\frac{\psi}{2},$$

und zwar ist ψ der Asymptotenwinkel derjenigen Hyperbel, welche von einer durch die a- und c-Axe gelegten Ebene aus dem Hyperboloid herausgeschnitten wird.

Damit haben wir auch für das Hyperboloid die Lage und Grösse der Hauptaxen durch die Constanten der momentanen Schraubenbewegung vollständig bestimmt.

---

* Schröter, a. a. O. S. 46.

Betrachten wir jetzt die Gesammtheit aller zu g parallelen Geraden, so gehört zu jeder derselben ein orthogonales Hyperboloid. Jedes dieser Hyperboloide enthält die Gerade l, denn l ist ja adjungirt zu den auf g senkrechten Ebenen, kann sich also für die verschiedenen Geraden des Parallelstrahlenbündels nicht ändern. Denken wir uns nun zwei beliebige Gerade des Bündels und legen durch sie je eine Ebene, die einander parallel sind, so sind auch ihre Charakteristiken einander parallel, denn die Charakteristiken sind ja die Projectionen von l auf diese Ebenen. Daher sind alle Charakteristiken, welche zu parallelen Ebenen gehören, einander parallel, und es folgt sofort, dass die Geradenschaaren der sämmtlichen Hyperboloide einander parallel sind. Hiermit aber ist bewiesen, dass alle betrachteten Hyperboloide unter einander ähnlich sind, also ergiebt sich folgender Satz:

III. Die sämmtlichen orthogonalen Hyperboloide, welche zu den unter einander parallelen Geraden g des starren Systems gehören, sind ähnlich und enthalten die Gerade l, welche den zu g senkrechten Ebenen adjungirt ist.

In Uebereinstimmung hiermit zeigen auch die obigen Gleichungen, dass die Axen der Hyperboloide in constantem Verhältniss zu einander stehen; denn die Winkel φ und ψ haben für alle Hyperboloide denselben Werth.

Endlich ergiebt sich noch, dass diejenigen Hyperboloide, welche den Geraden eines Büschels paralleler Strahlen entsprechen, ausser der Geraden l noch eine zweite Gerade gemeinsam haben, nämlich die Charakteristik der Ebene dieses Büschels.

§ 3.

Unter der Schaar der ebengenannten orthogonalen Hyperboloide giebt es auch eine Reihe orthogonaler Kegel. Ihre Scheitel liegen sämmtlich auf l; sie gehören zu denjenigen Geraden, welche Tangenten der Bahn eines ihrer Punkte sind.

Ist nämlich allgemein d eine solche Gerade, so wird sie von der adjungirten l der zu ihr senkrechten Ebenen in ihrem Gleitungspunkte D geschnitten; also erzeugen die beiden durch d und l als Axen gelegten orthogonalen Ebenenbüschel einen orthogonalen Kegel, dessen Scheitel D ist. Dieser Scheitel kann auch als das Erzeugniss der beiden durch d und d_1 gehenden gleichen Ebenenbüschel betrachtet werden, wo d_1 wieder die Lage von d nach der unendlich kleinen Bewegung bedeutet; denn d und d_1 schneiden sich in diesem Falle in D.

Die durch d und l gelegte Ebene ist eine Hauptebene des Kegels, die andere halbirt den von beiden Geraden gebildeten Winkel. Zwischen den Winkeln der beiden Hauptschnitte besteht die Relation

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = sin\,\frac{\psi}{2}\,,$$

wo wieder φ der von g und der Momentanaxe x gebildete Winkel ist. Alle diese Resultate ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden des vorigen Paragraphen.

Jede Ebene, welche durch d geht, hat mit dem Kegel zwei Gerade gemein, nämlich d und ihre Charakteristik. Daraus folgt, dass diejenige Ebene, deren Charakteristik d selbst ist, den Kegel längs d berührt. Auch jede durch l gehende Ebene schneidet den Kegel noch in einer zweiten Geraden, mit Ausnahme derjenigen, welche auf der von d und l gebildeten Hauptebene senkrecht steht. Diese letztere ist daher Tangentialebene des Kegels längs l. Beide Tangentialebenen schneiden sich in der Geraden kürzesten Abstandes k von d und x. Die längs l berührende Ebene enthält überdies die Momentanaxe x. Demnach ergiebt sich folgendes Resultat:

IV. Ist eine Gerade d Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, so bilden die Charakteristiken aller durch sie gehenden Ebenen einen orthogonalen Kegel.* Derselbe ist das Erzeugniss zweier orthogonalen Ebenenbüschel, deren Axen d und die zu den Ebenen senkrecht d adjungirte Gerade l sind. Der Gleitungspunkt von d ist der Scheitel des Kegels, die von d und l gebildete Ebene eine Hauptebene desselben. Die Ebene, deren Charakteristik d selbst ist, berührt ihn längs d, und die ihn längs l berührende Tangentialebene enthält die Momentanaxe der Schraubenbewegung.

Ist d' die zu d conjugirte Gerade, so ist sie ebenfalls Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, also bilden die Charakteristiken aller durch sie gehenden Ebenen ebenfalls einen Kegel. Derselbe enthält die Gerade l', welche den zu d' senkrechten Ebenen adjungirt ist, und wird von der durch l' und x gelegten Ebene längs l' berührt. Da nun die beiden Ebenen, welche durch l und x, resp. durch l' und x gehen, zusammenfallen, so folgt:

V. Ist d Tangente der Bahn eines ihrer Punkte, und d' ihre conjugirte Gerade, so besitzen die beiden Kegel, welche von den Charakteristiken aller durch d, resp. d' gehenden Ebenen gebildet werden, eine gemeinsame Tangentialebene. Dieselbe geht durch die Momentanaxe x der Schraubenbewegung und die beiden Geraden l und l', welche den zu d resp. d' senkrechten Ebenen adjungirt sind. Diese Geraden l und l' sind gleichzeitig die Berührungslinien der Tangentialebene und der Kegel.

---

* Vergl. Chasles, a. a. O. Satz 29.

Da d und d' sich rechtwinklig kreuzen, so folgt noch, dass die Winkelöffnungen φ und φ' der beiden Kegel in denjenigen Hauptschnittsebenen, welche zur Momentanaxe, also auch zu einander parallel sind, sich zu einem Rechten ergänzen.

Auch ergiebt sich jetzt, dass, wie im Anfang des Paragraphen behauptet wurde, die Scheitel aller in der Schaar der Hyperboloide enthaltenen Kegel auf l liegen.

§ 4.

Es ist bekannt, dass bei der Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene die Gleitungspunkte aller Geraden, die durch einen Punkt gehen, d. h. diejenigen Punkte, in denen die Geraden die von ihnen umhüllten Enveloppen berühren, auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser der Abstand des Punktes P vom momentanen Drehungspol ist. Diesem Satze entspricht ein analoges Theorem für die allgemeinste Bewegung eines räumlichen Systems.

Sei nämlich P ein beliebiger Punkt des Raumes, so beschreibt jede durch ihn gehende Gerade g ein Element einer geradlinigen Fläche. Auf ihr giebt es stets einen ausgezeichneten Punkt, nämlich den Centralpunkt; er ist, wie oben erwähnt wurde, derjenige Punkt dieser Geraden, welcher von der Momentanaxe oder auch von der zu g conjugirten Geraden g' die kürzeste Entfernung hat. Es entsteht demnach die Aufgabe, die von den Centralpunkten aller durch P gehenden Geraden gebildete Fläche zu bestimmen.

Man lege durch den Punkt P eine zur Momentanaxe x parallele Gerade l und durch l irgend eine Ebene ε; sie schneidet das von den Geraden g gebildete Strahlenbündel in einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt P ist. Da nun die Ebene ε parallel zu x ist, so liegen die Punkte kürzesten Abstandes für die Geraden dieses Büschels auf der Projection von x auf ε, d. h. sie liegen auf einer Geraden, welche der Schnitt zweier durch l und x gehenden zu einander senkrechten Ebenen ist. Die Gesammtheit der betrachteten Punkte ist daher das Erzeugniss zweier orthogonalen Ebenenbüschel, deren Axen parallel sind, d. h. sie bilden einen Kreiscylinder, dessen Durchmesserebene die durch x und l gehende Ebene ist. Also lässt sich folgender Satz aussprechen:

VI. Bei der Bewegung eines räumlichen unveränderlichen Systems liegen die Centralpunkte der Flächen, welche von allen durch einen Punkt P gehenden Geraden beschrieben werden, in jedem Augenblick auf einem Kreiscylinder, dessen Durchmesser der Abstand des Punktes P von der Momentanaxe und dessen Durchmesserebene die durch P und diese Axe gehende Ebene ist.

Da die Gerade l parallel zu x ist, so beschreibt sie in dem betrachteten Moment ein Element einer cylindrischen Fläche. Daher ist jeder ihrer Punkte als Centralpunkt zu betrachten, und so ist es zu erklären, dass sie ganz dem Kreiscylinder angehört.

Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich unmittelbar:

VII. Bei der Bewegung eines räumlichen unveränderlichen Systems liegen die Centralpunkte der Flächen, welche von den Geraden eines ebenen Strahlenbüschels beschrieben werden, in jedem Augenblick im Allgemeinen auf einer Ellipse; sie liegen auf einem Kreise, wenn die Ebene des Büschels senkrecht zur Momentanaxe ist, und auf einer Geraden, wenn sie ihr parallel ist.

Unter den Geraden, welche durch den Punkt P gehen, verdienen diejenigen ein besonderes Interesse, welche Tangenten der Bahnen eines ihrer Punkte sind. Sie sind bekanntlich identisch mit den Geraden des im vorigen Paragraphen betrachteten Kegels. Die Punkte, deren Bahnen diese Geraden zu Tangenten haben, sind die Centralpunkte der Geraden, sie liegen daher auf dem Durchschnitt des Kegels und des Cylinders. Beide Flächen enthalten die zur Momentanaxe parallele Gerade l; ihre Tangentialebenen längs l schneiden einander rechtwinklig. Denn der Kegel wird von einer Ebene berührt, welche durch x und l geht, während diese Ebene für den Cylinder eine Durchmesserebene ist. Demnach ergiebt sich:

VIII. Bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems liegen in jedem Augenblick die Punkte, deren Bahnen nach einem festen Punkte des Raumes gerichtet sind, auf einer speciellen Raumcurve dritter Ordnung.* Dieselbe ist der Durchschnitt eines Kreiscylinders und eines orthogonalen Kegels, welche eine zur Momentanaxe parallele Gerade gemein haben, also ein kubischer Kreis. Beide Flächen schneiden einander in der gemeinsamen Erzeugenden rechtwinklig.

Die Raumcurve dritter Ordnung kann auch als das Erzeugniss zweier congruenten Strahlenbündel betrachtet werden, nämlich des durch P gehenden und des durch P_1 gehenden, wo P_1 wieder die Lage von P nach der unendlich kleinen Bewegung bedeutet. Es lässt sich übrigens synthetisch zeigen — worauf ich jedoch an dieser Stelle nicht näher eingehen will —, dass P nicht der einzige Punkt ist, aus welchem die Curve durch einen orthogonalen Kegel projicirt wird; vielmehr lässt sich beweisen, dass der kubische Kreis aus jedem seiner Punkte durch einen orthogonalen Kegel projicirt wird.

---

* Vergl. Chasles, a. a. O. Satz 30.

Da jede Secante einer Raumcurve dritter Ordnung Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen der beiden erzeugenden Bündel ist, so lässt sich dem Satz VIII noch folgende Form geben:

IX. Bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems bilden in jedem Augenblick die Charakteristiken aller Ebenen, welche durch einen Punkt des Systems gehen, die sämmtlichen Secanten eines kubischen Kreises.

Die vorstehenden Untersuchungen zeigen, dass dieser kubische Kreis vollständig bestimmt werden kann, wenn der Punkt P, die Momentanaxe der Schraubenbewegung und der Parameter derselben gegeben sind. Denn der Kreiscylinder hat den Abstand r des Punktes P von der Momentanaxe zum Durchmesser, und die Gerade d, welche zur Construction des orthogonalen Kegels nöthig ist, geht durch P, ist senkrecht zu jenem Abstande r und bildet mit der Momentanaxe einen Winkel φ, dessen Grösse durch die charakteristische Gleichung

$$p = r \operatorname{ctg} \varphi$$

gegeben ist. Ueberdies bestimmt der Sinn des Parameters p die Seite, nach welcher die Gerade d gerichtet ist.

Es zeigt sich demnach, dass die geometrischen Gebilde, welche den von den Tangenten der Bahnen aller Punkte gebildeten Complex zweiten Grades charakterisiren, von ganz specieller Natur sind. Rein geometrische Betrachtungen haben zu dem Resultat geführt, in dem orthogonalen Hyperboloid und dem orthogonalen Kegel das räumliche Analogon des Kreises zu erblicken. Es erscheint nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass auch die Kinematik zu demselben Ergebniss führt.

Colmar i. E., November 1882.

Kleinere Mittheilungen.

XVII. Bemerkungen zur Differentialgleichung

$$1)\quad (a+bx+cx^2)^2\frac{d^2v}{dx^2}+(a+bx+cx^2)(a_1+b_1x)\frac{dv}{dx}+(a_0+b_0x+c_0x^2)v=0.$$

Diese Gleichung ist insofern interessant, als sie eine grosse Anzahl von bisher integrirten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung als Specialfälle enthält, so insbesondere gewisse von Liouville, Spitzer, Weiler u. A. betrachtete Gleichungen.

Wir wollen im Folgenden auf eine neue Differentialgleichung aufmerksam machen, deren Integration auf die Gleichung 1) führt; es ist folgende:

$$2)\quad (\alpha+\beta\xi+\gamma\xi^2+\delta\xi^3)^2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\alpha_1(\alpha+\beta\xi+\gamma\xi^2+\delta\xi^3)\frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_0+\beta_0\xi+\gamma_0\xi^2)\eta=0.$$

Substituirt man in diese*

$$\xi=\frac{x}{\lambda x+1},\quad \eta=\frac{v}{\lambda x+1},$$

mithin

$$\frac{d\eta}{d\xi}=(\lambda x+1)\frac{dv}{dx}-\lambda v,\quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2}=(\lambda x+1)^3\frac{d^2v}{dx^2},$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha(\lambda x+1)^3+\beta(\lambda x+1)^2x+\gamma(\lambda x+1)x^2+\delta x^3]^2\frac{d^2v}{dx^2}\\ &+\alpha_1[\alpha(\lambda x+1)^3+\beta(\lambda x+1)^2x+\gamma(\lambda x+1)x^2+\delta x^3]\left[(\lambda x+1)\frac{dv}{dx}-\lambda v\right]\\ &+\quad[\alpha_0(\lambda x+1)^2+\beta_0(\lambda x+1)x+\gamma_0x^2]v\end{aligned}\right\}=0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha\lambda^3+\beta\lambda^2+\gamma\lambda+\delta=\varphi(\lambda)\ \text{ und }\ \alpha_0\lambda^2+\beta_0\lambda+\gamma_0=\psi(\lambda),$$

so kann die letzte Gleichung auch folgendermassen geschrieben werden:

---

* Diese Substitutionen habe ich bereits früher, bei der Integration der Differentialgleichung

$$(a+bu+cu^2)\frac{dv}{du}+Au^2+Bv^2+Cuv+Du+Ev+F+a_1u^2\left(u\frac{dv}{du}-v\right)=0,$$

benutzt. Es besteht auch thatsächlich zwischen der letzten Gleichung und der oben angegebenen Gleichung 2) ein gewisser Zusammenhang. – Man vergl. diese Zeitschrift, Jahrg. XXVIII S. 56.

$$\left.\begin{array}{l}[\varphi.x^3+\varphi'.x^2+\tfrac{1}{2}\varphi''.x+\tfrac{1}{6}\varphi''']^2\dfrac{d^2v}{dx^2}\\ +\alpha_1[\varphi.x^3+\varphi'.x^2+\tfrac{1}{2}\varphi''.x+\tfrac{1}{6}\varphi''']\left[(\lambda x+1)\dfrac{dv}{dx}-\lambda v\right]\\ +\quad[\psi.x^2+\psi'.x+\tfrac{1}{2}\psi'']v\end{array}\right\}=0,$$

wobei

$$\varphi=\varphi(\lambda),\quad \varphi'=\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\ \text{etc.}$$

Bestimmt man jetzt λ so, dass $\varphi(\lambda)=0$, d. h. wählt man für λ irgend eine der Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\alpha\lambda^3+\beta\lambda^2+\gamma\lambda+\delta=0,$$

so geht die letzte Differentialgleichung über in

$$\text{1a)}\quad \begin{array}{l}[\varphi'.x^2+\tfrac{1}{2}\varphi''.x+\tfrac{1}{6}\varphi''']^2\dfrac{d^2v}{dx^2}+\alpha_1[\varphi'.x^2+\tfrac{1}{2}\varphi''.x+\tfrac{1}{6}\varphi'''](\lambda x+1)\dfrac{dv}{dx}\\ +[(\psi-\alpha_1\lambda\varphi')x^2+\tfrac{1}{2}(2\psi'-\alpha_1\lambda\varphi'')x+\tfrac{1}{6}(3\psi''-\alpha_1\lambda\varphi''')]v=0\end{array}$$

und lässt sich wie Gleichung 1) integriren.*

Um die Form des Integrals der Gleichung 2) festzustellen, zerlege man den Coefficienten

$$\varphi'.x^2+\tfrac{1}{2}\varphi''.x+\tfrac{1}{6}\varphi'''$$

in lineare Factoren $\nu(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ und transformire die Gleichung 1a) mit Hilfe der Substitution

$$v=we^{\int\frac{g+hx}{(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)}}=w(x-\varepsilon_1)^{\mu_1}(x-\varepsilon_2)^{\mu_2}.$$

Alsdann lassen sich die Grössen g und h, resp. μ_1 und μ_2 im Allgemeinen so bestimmen, dass eine Gleichung von der Gestalt

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{d^2w}{dx^2}+(\alpha'+\beta'x)\frac{dw}{dx}+\gamma'w=0$$

entsteht. Ist das Integral der letzten Gleichung $w=f(x)$, so genügt der vorgelegten Gleichung 2) folgender Ausdruck:

$$\eta=\frac{(x-\varepsilon_1)^{\mu_1}(x-\varepsilon_2)^{\mu_2}}{\lambda x+1}f(x),\quad\text{wobei}\quad x=\frac{\xi}{1-\lambda\xi}.$$

Abgesehen von den besonderen Fällen, welche die Gleichung 1a) in sich schliesst und die wir früher a. a. O. discutirt haben, ist hier nur ein Ausnahmefall zu erwähnen. Verschwinden nämlich die Coefficienten der kubischen Gleichung für λ, ausgenommen δ, so ist eine Bestimmung von λ nicht möglich. Dann liegt aber, wenn wir δ in die übrigen Coefficienten eingehen lassen, folgende einfache Differentialgleichung vor:

---

* Ueber die Integration dieser Gleichung vergl. meinen Aufsatz: Transformation der Differentialgleichung $\varphi_0\dfrac{dy}{dx}+\varphi_1y^2+\varphi_2y+\varphi_3=0$ (diese Zeitschrift, Jahrg. XXVII, 6).

$$\xi^6 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \alpha_1 \xi^3 \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_0 + \beta_0 \xi + \gamma_0 \xi^2)\eta = 0,$$

und diese geht für

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{v}{x}; \quad \text{mithin} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = v - x\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = x^3 \frac{d^2 v}{dx^2}$$

über in

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \alpha_1 x \frac{dv}{dx} + (\alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 + \alpha_1)v = 0,$$

was als Specialfall der Gleichung 1) angesehen werden kann.

Wir fügen schliesslich hinzu, dass sich in derselben Weise als Gleichung 2) die allgemeinere

$$(\alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3)^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\alpha_1 + \beta_1\xi)(\alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3) \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_0 + \beta_0\xi + \gamma_0\xi^2 + \delta_0\xi^3)\eta = 0$$

behandeln lässt; doch muss man, falls eine Reduction auf Gleichung 1) möglich sein soll, die Bedingung

$$\beta_1 \delta + \delta_0 = 0$$

festsetzen. Diese letzte Differentialgleichung ist insofern bemerkenswerth, als sie beide Gleichungen 1) und 2) im Speciellen in sich begreift, nämlich für $\delta = \delta_0 = 0$ beziehentlich $\beta_1 = \delta_0 = 0$.

Dresden, im December 1882. WOLDEMAR HEYMANN.

XVIII. Ueber die geometrische Construction von Fächern zur Darstellung windschiefer Flächen.

(Hierzu Taf. V Fig. 3—5.)

Gleitet eine Gerade l zwischen zwei festen Leitlinien nach bestimmtem Gesetze entlang, so wird l als Erzeugende im Allgemeinen eine windschiefe Fläche durchlaufen. Letztere gehören zu denjenigen Flächen, welche nicht abwickelbar sind, d. h. sich nicht in eine Ebene ausbreiten lassen. Sie können daher umgekehrt auch nicht, wie die abwickelbaren Kegel- oder Cylinderflächen, durch Einrollen einer Papierfläche dargestellt werden.

Nichtsdestoweniger kann man mittels des Papieres als Verwendungsmaterial durch fächerartiges Einfalten ermittelter Flächen eine beliebige Reihe aufeinander folgender Erzeugender zwischen den ebenfalls dargestellten Leitlinien zur deutlichen Anschauung bringen. Aus diesen empfängt der Beschauer das wesentliche Bild der Fläche in ähnlicher Weise, wie die Vorderkanten der Stufen einer geraden Treppe dem geometrisch auffassenden Auge des Beobachters das Bild der Ebene hervorrufen, in welchem die Gesammtheit aller Kanten sich befindet.

Das von mir angewendete Princip, auf diese Weise windschiefe Flächen zur Darstellung zu bringen, besteht in der Zerlegung des windschiefen Vierecks durch eine Diagonale in zwei ebene Dreiecke. Man denke sich nun die Erzeugende l eine bestimmte Anzahl von Lagen zwischen ihren Leitlinien einnehmen; alsdann bildet sich eine Anzahl windschiefer Flächen, gebildet durch zwei aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden und zwei gegenüberliegenden Stücken der Leitlinien.

Sind letztere gekrümmt, so nehme man die Erzeugenden dem Verhältnisse nach nahe genug, um statt der krummlinigen Curvenstücke der Leitlinien die betreffenden Sehnen zu setzen.

Auf diese Weise ist die gegebene windschiefe Fläche zerlegt in eine Anzahl windschiefer Vierecke. Nun zerlege man jedes derselben durch eine bestimmte Diagonale in zwei ebene Dreiecke; alsdann lassen sich sämmtliche Dreiecke in eine einzige Fläche, z. B. in die des ersten Dreiecks hineindrehen.

Bei der Zerlegung der windschiefen Vierecke gehe man nun so zu Werke, dass in Bezug auf den einen Standpunkt des Beschauers die Erzeugenden als vorspringende Kantenlinien sich darstellen. Wir bezeichnen dieselben als „Gratlinien". Alsdann bilden die Diagonallinien einspringende „Kehllinien".

Die descriptive Geometrie liefert die Mittel, um aus der Horizontal- und Vertikalprojection einer Linie ihre Grösse zu finden. So können also bei gegebener Fläche die einzelnen Dreiecke construirt und an einander zu einer zusammenhängenden Fläche angetragen werden. Faltet man diese nach den Linien der Dreiecke, so erhält man durch passende Bewegung als Modell die aufeinander folgende Lage von Erzeugenden der betreffenden windschiefen Fläche. Da Grat- und Kehllinie abwechselnd folgen, so muss die ausgebreitete Fläche fächerartig nach den Linien der ermittelten Dreiecke gefaltet werden; die Gratlinien des Fächers gehen bei entsprechender Bewegung des gefalteten Fächers in die Erzeugenden der windschiefen Fläche über, gewisse Begrenzungslinien des ausgebreiteten Fächers gestalten sich zu den Leitlinien.

Wir nennen deshalb besagte Fläche, durch deren Zusammenfalten uns das Bild einer windschiefen Fläche vor Augen geführt wird, den Fächer der betreffenden windschiefen Fläche. Wir nennen ihn ausgebreitet, wenn alle seine Flächen in einer Ebene liegen; wir bezeichnen ihn als gefaltet, wenn seine Dreiecksflächen sämmtlich nach ihren Linien gefaltet sind.

Um nun an einem charakteristischen Beispiel das Vorhergehende praktisch zu erläutern, stellen wir uns die Aufgabe, die windschiefe Fläche eines Rotationshyperboloids praktisch darzustellen. Wir zeichnen zunächst den ausgebreiteten Fächer desselben, dessen Gestalt sich aus folgender Betrachtung ergiebt.

Das Rotationshyperboloid können wir uns dadurch entstanden denken, dass eine Erzeugende *l* an zwei übereinander befindlichen congruenten Kreisen als Leitlinien derartig entlang gleitet, dass die Schnittpunkte der Erzeugenden mit den Kreisperipherien sich um gleiche Strecken nach derselben Richtung bewegen. In Fig. 3 sind drei aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden gezeichnet; die Axe des Hyperboloïds ist senkrecht angenommen. Verschiedene Lagen der Erzeugenden erhalten wir, wenn wir, von der Anfangslage *ac* ausgehend, dieselbe Strecke von *a* und *c* nach derselben Richtung wiederholt antragen und die entsprechenden Theilpunkte *f* und *e*, *h* und *g* miteinander verbinden. Diese drei gleichen Linien *ac*, *ef*, *gh* sind in Fig. 3 gezeichnet, und sind der Uebersicht wegen die übrigen Linien fortgelassen. Wir richten es so ein, dass *ae* ein bestimmter Theil des Kreisumfanges, z. B. $\frac{1}{20}$ desselben ist. Wir erhalten nun als erstes windschiefes Viereck *aefc*, wo *ae*, *fc* die Sehnen der betreffenden Bogen bezeichnen. Als zweites windschiefes Viereck erhalten wir *eghf*.

Durch die Diagonalen *ce*, *fg* werden beide windschiefe Vierecke in je zwei Dreiecke zerlegt, und bilden die Dreiecke *aec* und *cfe* die Theile, in welche *aefc* zerfällt durch die punktirt gezeichneten Diagonalen.

Diese Dreiecke sind aber, da sie in allen Seiten übereinstimmen, congruent. Wird *cef* um die Kehllinie *ce* in die Ebene von *cae* hineingedreht, so bildet die Umfassungsfigur beider Dreiecke ein Parallelogramm *aefc* Fig. 4, wo die Kehllinie des windschiefen Vierecks in die Diagonallinie *ec* übergegangen ist.

Auf gleiche Weise werden die Dreiecksebenen, in welche das folgende windschiefe Viereck *eghf* zerlegt ist, in ein Parallelogramm *eghf* (Fig. 4) hineingedreht, welches dem ersten *aefc* congruent ist. Da beide die Linie *fe* gemeinsam haben, so fallen die Linien *fh* und *eg* in die Verlängerung der Linien *cf* und *ae*.

Zerlegt man auf diese Weise jedes windschiefe Viereck der vollständig gedachten Fig. 3 in zwei Dreiecke, dreht dieselben alle in die Ebene des ersten, so erhält man als ausgebreiteten Fächer des Rotationshyperboloids ein Parallelogramm *abdc*, welches in eine Anzahl — hier 20 — kleinere Parallelogramme zerfällt. Die Kehllinien von Fig. 3 sind in die Schaar paralleler punktirter Diagonalen der Fig. 4 übergegangen.

Da nun die Gestalt des ausgebreiteten Fächers ermittelt ist, so können wir denselben zeichnen und zusammenfalten. Dann nimmt er die in Fig. 5 gezeichnete Gestalt an. Diesen zusammengefalteten Fächer von Fig. 5 kann man dann in das entsprechende Rotationshyperboloid hineindrehen.

In Betreff der praktischen Ausführung sind folgende Bemerkungen zu berücksichtigen.

Man zeichne zunächst auf Cartonpapier als Umfassungsfigur das Parallelogramm *abdc*; Fig. 17 stellt einen ausgeführten Fächer in vierfacher Verkleinerung dar. Darauf theile man *ab* und *dc* in 20 gleiche Theile und verbinde die Theilpunkte *ef*, *gh* durch Linien. Dann ritze man die Schaar dieser Parallelen derartig mit einem Messer ein, wie man es mit einem Modellircarton zu thun pflegt. Sodann kehre man die Fläche um und ritze auf der andern Seite der Schaar die punktirt gezeichneten Diagonalen ebenfalls ein; letztere sind parallel *ec*. Alsdann schneide man durch die Linien *mn* und *op*, welche beide parallel *ab* sind, schmale Längsstreifen ab. Hierdurch wird es vermieden, dass nach zwei Rissen gefaltet wird, welche unter spitzem Winkel in einem Punkt zusammentreffen.

Hat man nun nach den Seiten *ac* und *bd* den Fächer zugeschnitten, so falte man denselben so, dass man zunächst die eine Schaar, z. B. die Gratlinien einbricht; sodann breite man ihn aus und breche die Schaar der Kehllinien. Jetzt breite man ihn wieder aus und falte abwechselnd Grat- und Kehllinien, wodurch der zusammengefaltete Fächer Fig. 18 hergestellt wird. Letztere Figur ist so gezeichnet, als ob der Fächer Fig. 17 nicht nach den Linien *mn*, *op* abgeschnitten wäre.

Man achte besonders darauf, dass man mit der Hand, wenn Alles gefaltet ist, die mit *b* bezeichnete punktirte Ecke so unter die in der Nachbarschaft von *c* befindlichen Flächentheile schiebt, wie es Fig. 18 darstellt.

Alsdann führe man mit beiden Händen die Punkte *d* und *c* nach der durch Pfeile angedeuteten Richtung gegen einander; haben sich dieselben vereinigt, so sind auch auf der Tischplatte die Punkte *a* und *b* zusammengekommen und ist hiermit der gefaltete Fächer in das Rotationshyperboloid hineingedreht.

Um diese Fläche als festes Modell zu fixiren, bestreiche man die aufeinander fallenden Endflächen mit Leim, lege sie zusammen und schlinge von aussen einen Faden um die schmalste Stelle des Hyperboloids. Durch festes Anziehen und Einknoten desselben erhalten die Theile der Fläche die nöthige Spannung. Ist alsdann der Leim getrocknet, so kann man die Fläche mit einem Leitkreise auf einen kreisförmigen Untersatz aufkleben lassen. Wenn sie auf demselben unverschiebbar befestigt ist, schneide man den Faden entzwei, und ist hiermit das Modell hergestellt. Wenn man es beabsichtigt, kann man die zweite Schaar von Geraden durch Fäden markiren, welche man leicht in beliebiger Zahl vom oberen zum unteren Leitkreise ausspannen kann.

Zum Schlusse möge noch Folgendes bemerkt werden. Faltet man den Fächer der Reihe nach zusammen, ohne Ecke *b* unter Ecke *c* zu stecken, so bildet *bd* in Fig. 18 die oberste Linie. In dieser Lage kann man den Fächer nun nicht in ein Rotationshyperboloid hineindrehen,

aber in eine windschiefe Schraubenfläche. Hebt man nämlich *bd* in die Höhe, während *ac* liegen bleibt, so gehen die Linien *ab* und *dc* in zwei congruente Schraubenlinien über, zwischen denen als Leitlinien sich die Schaar der Grat- resp. Kehllinien des Fächers derartig lagert, dass die Neigung der einzelnen Grat- und Kehllinie gegen die Ebene des Tisches, auf welchem *ac* ruht, constant ist. Auch hier beschreiben die beiden Durchschnittspunkte der Erzeugenden auf den Leitlinien gleiche Wege.

Wir haben somit hier ein interessantes Beispiel, wie ein und derselbe ausgebreitete Fächer durch verschiedenartiges Zusammenlegen in gefaltetem Zustande zur Darstellung zweier verschiedenen Flächen benutzt werden kann. Eine Reihe interessanter Bemerkungen lassen sich an diese Darstellungsart anknüpfen, wenn man mit aufmerksamem Blick die Bewegung des Fächers verfolgt. Ebenso wie das ausgeführte Modell lässt sich das entstehende zu instructiven Bemerkungen verwenden. Dieselben ergeben sich dem aufmerksamen Beobachter von selbst; daher möge es genügen, an dieser Stelle auf das Princip dieser Darstellungsart hingewiesen zu haben.

Soest. Dr. Paul Schönemann.

XIX. Anwendung der stereographischen Projection zur Construction der Isophoten auf Rotationsflächen.

Ein beliebiger Parallelkreis einer Rotationsfläche werde mit p, seine orthogonale Projection in irgend einer Ebene mit p' bezeichnet. Um die Projectionen der Isophotenpunkte von p zu bestimmen, d. i. die Punkte, in welchen eine gegebene Lichtstrahlenrichtung mit den Flächennormalen dieser Punkte Winkel bildet, deren Cosinus 0, 0.1, 0.2, ... sind, kann eine Hilfskugelfläche angewandt werden, welche die Rotationsfläche längs p berührt und auf welcher deren Isophoten aufgeschrieben sind. Die Schnittpunkte dieser Kugelisophoten mit p sind die geforderten Isophotenpunkte. Die orthogonalen Projectionen der Kugelisophoten erscheinen aber im Allgemeinen als Ellipsen und dies ist der Grund, warum die Anwendung einer Hilfskugel für Isophotenconstructionen als nicht exact genug angesehen wird; denn man ist bestrebt, alle Constructionen, so weit es nur immer möglich, durch Gerade und Kreise allein auszuführen. Dieser Forderung kann nun unter Beibehaltung der Hilfskugel entsprochen werden, wenn die Kugelisophoten nicht orthogonal, sondern stereographisch bestimmt werden, weil dann diese Isophoten, welche bekanntlich Kreise sind, auch in der Projection als solche erscheinen.

Es werde der bezüglich der Projectionsebene höchste Kugelpunkt C als Centrum der stereographischen Projection angenommen und das stereographische Bild sowohl der Kugelisophoten, als auch des Parallelkreises p construirt. Die den Projectionen der Isophoten und der Projection von

p gemeinsamen Punkte sind dann die stereographischen Projectionen der Isophotenpunkte.

Es ist evident, dass auf der Zeichenfläche die orthogonale Projection C' von C, welche mit der orthogonalen Projection O' des Kugelmittelpunktes 0 zusammenfällt, die orthogonale Projection irgend eines Isophotenpunktes P und die stereographische Projection P_s desselben Punktes in einer Geraden liegen; denn sämmtliche erwähnten Punkte liegen in derselben zur Projectionsebene normalen Ebene. Wenn also O' und P_s bekannt sind, so findet man P' im Schnitte der Geraden $O'P_s$ mit p'.

Bezüglich der thatsächlichen Construction der Isophotenpunkte auf dem hier bezeichneten Wege sind die folgenden Bemerkungen zu machen. Anstatt für jeden Parallelkreis eine besondere Kugel zu construiren, bestimme man für die gegebene Lichtrichtung seitwärts der Rotationsfläche das stereographische Bild der Isophoten einer einzigen Hilfskugel aus ihrem bezüglich der Projectionsebene höchsten Punkte C als Centrum. Diese Kugel wird für die Bestimmung sämmtlicher Isophotenpunkte der Rotationsfläche als ausreichend befunden, wenn man bedenkt, dass die Hilfsfigur ähnlich und ähnlich gelegen ist mit der stereographischen Projection jeder Kugel, welche die Rotationsfläche in irgend einem Parallelkreise berührt. Es ist aber nicht gut thunlich und auch nicht nöthig, das stereographische Bild der ganzen Hilfskugel zu construiren; es genügt in der That die Projection der bezüglich der Projectionsebene unteren Hälfte der Hilfskugel.

Um für einen Parallelkreis p in seiner Projection p' die Projectionen der Isophotenpunkte zu finden, bestimme man die orthogonale Projection O' des Mittelpunktes O der längs p berührenden Kugel, sodann in der Seitenfigur das sterographische Bild p_s des auf der Hilfskugel mit dem Parallel p auf der berührenden Kugel ähnlich gelegenen Kreises. Sind in der Seitenfigur C' die orthogonale Projection des Projectionscentrums und P_s einer der Schnittpunkte von p_s mit dem System der stereographischen Projectionen der Kugelisophoten, so ist $C'P_s$ in der Seitenfigur parallel und gleichgerichtet mit $O'P'$ in der Hauptfigur.

Bezüglich jener Parallelkreise, für welche die entsprechenden Kreise nicht oder nur theilweise auf der untern Hälfte der Hilfskugel liegen, betrachte man die Seitenfigur als das um 180° in der Zeichenebene gedrehte, aus dem tiefsten Kugelpunkte projicirte stereographische Bild der oberen Hälfte der Kugelisophoten, zeichne jetzt die stereographischen Bilder der früher nicht erhaltenen Parallelkreise oder der Theile von solchen, natürlich unter Berücksichtigung der Drehung, und beachte, dass jetzt für irgend einen Isophotenpunkt die Geraden $C'P_s$ und $O'P'$ parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Auch die in den gewählten Parallelkreisen etwa liegenden Umrisspunkte U und V der orthogonalen Projection können mittels der seitlich

gewählten Hilfskugel leicht bestimmt werden. Wird nämlich das stereographische Bild des von C um 90^0 abstehenden grössten Kugelkreises von p_s in den Punkten U_s und V_s geschnitten, so sind die Geraden $C'U_s$ mit $O'U'$ und $C'V_s$ mit $O'V'$ parallel und gleich gerichtet.

Die im Vorhergehenden angegebenen Constructionen können auch für die Auffindung der Isophoten- und Umrisspunkte auf Flächen angewandt werden, welche als Umhüllende einer bewegten constanten oder veränderlichen Kugelfläche entstehen. An Stelle der Parallelkreise der Rotationsflächen treten hier die Charakteristiken der umhüllenden Fläche.

JOH. MORAWETZ.

XX. Zur geometrischen Bedeutung des Sinus eines Trieders.

Gehen von einem Punkte des Raumes drei Strecken a, b, c aus, und bezeichnet c' die Normale der Ebene ab, so ist

$$a.b.c.\sin ab.\cos cc'$$

das Volum des Parallelepipeds oder sechsfachen Tetraeders abc. Der trigonometrische Factor hat durch v. Staudt (Crelle's J. Bd. 24 S. 252) und Baltzer (Determ. § 16, Anal. Geom. § 46) den Namen Sinus der Ecke resp. des Trieders abc erhalten und wird bezeichnet:

$$\sin abc.$$

Derselbe ist das Volum eines Rhomboeders mit der Kantenlänge 1 und den Kantenwinkeln ab, bc, ca. Der Werth schwankt zwischen $+1$ und -1, welche Extreme bei orthogonalem a, b, c erreicht werden, und ist, wenn man im Coordinatensystem den Raum oben rechts hinten als $+++$ auffasst,

positiv in den Ecken und Gegenecken $,PP,$,
negativ „ „ „ „ „ $P''P$.

Die Flächen der Rhomboeder haben die Areale

$$\sin ab, \quad \sin bc, \quad \sin ca;$$

die zugehörigen Höhen erhält man durch Projection der dritten Kante auf die Normale der Ebene der beiden ersten, also

$$\cos cc', \quad \cos aa', \quad \cos bb',$$

so dass

$$\sin abc = \sin ab \cos cc' = \sin bc \cos aa' = \sin ca \cos bb'.$$

Die Höhe kann aber auch, wenn man zunächst innerhalb einer Fläche und dann erst auf die Normale projicirt, als Product der entsprechenden Sinus erhalten werden, so dass, da $\cos cc' = \sin ca \sin b'c' = \sin cb \sin a'c'$:

$$\sin abc = \sin ab \sin bc \sin c'a' = \sin bc \sin ca \sin a'b' = \sin ca \sin ab \sin b'c'.$$

Projicirt man die Kanten endlich auf ein System orthogonaler Axen xyz, deren Anfangspunkt mit der Ausgangsecke des Rhomboeders zusammenfällt, so haben die Kanten die Coordinaten

$\cos ax \mid \cos ay \mid \cos az, \quad \cos bx \mid \cos by \mid \cos bz, \quad \cos cx \mid \cos cy \mid \cos cz.$

Die Projectionen des Rhombus $\sin ab$ auf die Coordinatenebenen lassen sich aus den Coordinaten der Strecken als Determinanten zusammensetzen:

$$\sin ab \cos zc' = \begin{vmatrix} \cos ax & \cos ay \\ \cos bx & \cos by \end{vmatrix},$$

$$\sin ab \cos xc' = \begin{vmatrix} \cos ay & \cos az \\ \cos by & \cos bz \end{vmatrix},$$

$$\sin ab \cos yc' = \begin{vmatrix} \cos az & \cos ax \\ \cos bz & \cos bx \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos zc$, $\cos xc$, $\cos yc$ und addirt, so ist, da die Projection einer Strecke gleich der Summe der Projectionen ihrer Coordinaten, d. h.

$$\cos cc' = \cos xc \cos xc' + \cos yc \cos yc' + \cos zc \cos zc':$$

$$\sin ab . \cos cc' = \sin abc = \begin{vmatrix} \cos ax & \cos bx & \cos cx \\ \cos ay & \cos by & \cos cy \\ \cos az & \cos bz & \cos cz \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem entsprechenden für $\sin fgh$, so erhält man

$$\sin abc . \sin fgh = (\cos ax, \cos bx, \cos cx)(\cos fx, \cos gx, \cos hx)$$
$$= (\cos ax \cos fx + \cos bx \cos gx + \cos cx \cos hx, \ldots, \ldots),$$

und da wiederum

$$\cos af = \cos ax \cos fx + \cos bx \cos gx + \cos cx \cos hx:$$

$$\sin abc . \sin fgh = \begin{vmatrix} \cos af & \cos bf & \cos cf \\ \cos ag & \cos bg & \cos cg \\ \cos ah & \cos bh & \cos ch \end{vmatrix}.$$

Hier kann fgh auch als schiefwinkliges Coordinatensystem aufgefasst werden und liefert so eine Gleichung für $\sin abc . \sin xyz$.

Lässt man fgh mit $a'b'c'$, d. h. mit dem Polartetraeder von abc zusammenfallen, so reducirt sich die Determinante auf die Diagonale, da $\cos ab' = \cos bc' = \ldots = 0$:

$$\sin abc . \sin a'b'c' = \cos aa' . \cos bb' . \cos cc'.$$

Fällt fgh mit abc zusammen, so erhält man:

$$\sin^2 abc = \begin{vmatrix} \cos aa & \cos ba & \cos ca \\ \cos ab & \cos bb & \cos cb \\ \cos ac & \cos bc & \cos cc \end{vmatrix}.$$

Es sei nun $x'y'z'$ die Polarecke der schiefwinkligen Coordinatenaxen xyz, und man berücksichtige, dass

$$\sin x'y'z' = \frac{\cos xx' \cos yy' \cos zz'}{\sin xyz},$$

so geht

$$\sin abc . \sin x'y'z' = (\cos ax', \cos bx', \cos zx')$$

resp.

$$\sin abc = (\cos ax', \cos bx', \cos cx') : \sin x'y'z',$$

wenn man die Divisoren $\cos xx'$, $\cos yy'$, $\cos zz'$ auf die einzelnen Zeilen vertheilt, über in:

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \frac{\cos ax'}{\cos xx'} & \frac{\cos bx'}{\cos xx'} & \frac{\cos cx'}{\cos xx'} \\ \frac{\cos ay'}{\cos yy'} & \frac{\cos by'}{\cos yy'} & \frac{\cos cy'}{\cos yy'} \\ \frac{\cos az'}{\cos zz'} & \frac{\cos bz'}{\cos zz'} & \frac{\cos cz'}{\cos zz'} \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Multiplicirt man jetzt beide Seiten mit abc, und zwar rechts die einzelnen Colonnen, so erhält man, da $\frac{a \cos ax'}{\cos xx'}$ die Coordinate a_1 von a:

$$a.b.c.\sin abc = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \sin xyz,$$

den bekannten Ausdruck für das Volum des sechsfachen Tetraeders $OABC$. Hieraus ergiebt sich durch Translation des Systems nach $d_1|d_2|d_3$ oder durch Addition der vier Tetraeder mit dem Eckpunkte O im neuen System:

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Den umgekehrten Weg vom Volum des Parallelepipeds zum $\sin xyz$ nimmt Baltzer, Anal. Geom. § 46, 10 u. 12, woselbst sich ausser der Literatur mannigfache Anwendungen des $\sin xyz$ finden.

Eine derselben sei hier erwähnt, weil sie unmittelbar aus der Determinante

$$\sin abc = \left(\frac{\cos ax'}{\cos xx'}, \frac{\cos bx'}{\cos xx'}, \frac{\cos cx'}{\cos xx'}\right) \sin xyz$$

folgt, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\sin ayz}{\sin xyz} = \frac{\sin yz \cos ax'}{\sin yz \cos xx'} = \frac{\cos ax'}{\cos xx'},$$

so ist

$$\sin abc . \sin^2 xyz = \begin{vmatrix} \sin ayz & \sin xaz & \sin xya \\ \sin byz & \sin xbz & \sin xyb \\ \sin cyz & \sin xcz & \sin xyc \end{vmatrix}.$$

Berlin, Februar 1883. A. Thaer.

XXI. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung.

1. Sind AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vier Paare einander zugeordneter Punkte einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung, A', B', C', D' vier Punkte, welche von einem Punkte P der Geraden durch die vier Punktpaare harmonisch getrennt sind, so ist der Werth des Doppelverhältnisses $(A'B'C'D')$ von der Wahl des Punktes P unabhängig.* Man nennt ihn daher auch das Doppelverhältniss der vier Punktpaare der involutorischen Reihe. Da er mit den vier Punktpaaren gegeben ist, so muss auch für ihn ein Ausdruck existiren, der ausschliesslich aus Entfernungen der Punkte der vier Punktpaare von einander zusammengesetzt ist.

Der Ausdruck kann auf folgende Weise hergestellt werden, wodurch zugleich der angeführte Satz auf's Neue bewiesen wird:

Unter den gemachten Voraussetzungen ist

$$\frac{2}{PA'}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PA_1},\quad \frac{2}{PB'}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PB_1},\quad \frac{2}{PC'}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PC_1},\quad \frac{2}{PD'}=\frac{1}{PD}+\frac{1}{PD_1}.$$

Daraus folgt

$$\frac{2}{PA'}-\frac{2}{PC'}=\frac{2A'C'}{PA'.PC'}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PA_1}-\left(\frac{1}{PC}+\frac{1}{PC_1}\right) \text{ etc.},$$

hieraus

$$1)\quad (A'B'C'D')=\frac{A'C'}{C'B'}:\frac{A'D'}{D'B'}=\frac{(PA+PA_1)\,PC.PC_1-(PC+PC_1)\,PA.PA_1}{(PC+PC_1)\,PB.PB_1-(PB+PB_1)\,PC.PC_1}:\frac{(PA+PA_1)\,PD.PD_1-(PD+PD_1)\,PA.PA_1}{(PD+PD_1)\,PB.PB_1-(PB+PB_1)\,PD.PD_1}.$$

Führt man hier durch die Relation

$$PO+OX=PX \text{ für } X=A,\,A_1,\,B,\,B_1,\,C,\,C_1,\,D,\,D_1$$

einen Punkt O ein, so erhält man die Gleichung

$$2)\quad (A'B'C'D')$$
$$=\frac{\{OC+OC_1-(OA+OA_1)\}PO^2+2(OC.OC_1-OA.OA_1)PO+(OA+OA_1)\,OC.OC_1-(OC+OC_1)\,OA.OA_1}{\{OB+OB_1-(OC+OC_1)\}PO^2+2(OB.OB_1-OC.OC_1)PO+(OC+OC_1)\,OB.OB_1-(OB+OB_1)\,OC.OC_1}$$
$$:\frac{\{OD+OD_1-(OA+OA_1)\}PO^2+2(OD.OD_1-OA.OA_1)PO+(OA+OA_1)\,OD.OD_1-(OD+OD_1)\,OA.OA_1}{\{OB+OB_1-(OD+OD_1)\}PO^2+2(OB.OB_1-OD.OD_1)PO+(OD+OD_1)\,OB.OB_1-(OB+OB_1)\,OD.OD_1}$$

Der Ausdruck rechts wird vom Punkte P unabhängig, wenn man setzt

$$3)\quad OA.OA_1=OB.OB_1=OC.OC_1=OD.OD_1=a.$$

Denn die Glieder, welche PO enthalten, verschwinden; ausserdem tritt in jedem Zähler und Nenner des Doppelverhältnisses der Factor PO^2-a auf und hebt sich fort. Man hat daher unter Voraussetzung der Gleichung 3)

* Cremona, „Ebene Curven", S. 29. — Vergl. auch meine Schrift: „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde", Marburg 1881, S. 9.

3a) $(A'B'C'D') = \frac{OC+OC_1-(OA+OA_1)}{OB+OB_1-(OC+OC_1)} : \frac{OD+OD_1-(OA+OA_1)}{OB+OB_1-(OD+OD_1)}$

oder

4) $(A'B'C'D') = \frac{AC+A_1C_1}{CB+C_1B_1} : \frac{AD+A_1D_1}{DB+D_1B_1}$,

welcher Ausdruck auch bei beliebiger Vertauschung zweier einander zugeordneter Punkte giltig bleibt, da $OX+OX_1-(OY+OY_1) = XY+X_1Y_1 = XY_1+X_1Y$ ist.

Die Gleichungen 3) sagen nun aus, dass die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 einer involutorischen Reihe angehören, deren Mittelpunkt der Punkt O ist. Also folgt:

Sind AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vier Punktpaare einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung, so ist die Grösse

$$\frac{AC+A_1C_1}{CB+C_1B_1} : \frac{AD+A_1D_1}{DB+D_1B_1} = (AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1)$$

gleich dem Doppelverhältnisse $(A'B'C'D')$ von vier Punkten A', B', C', D', die von einem beliebigen Punkte P der Geraden durch die vier Punktpaare harmonisch getrennt sind.

Die Grösse (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1) heisst das Doppelverhältniss der vier Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 der involutorischen Reihe.

Nimmt man an, dass AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vier beliebige Punktpaare einer Geraden sind und dass A', B', C', D' vier Punkte sind, die von einem beliebig, aber fest angenommenen Punkte P durch die vier Punktpaare harmonisch getrennt sind, und setzt ausserdem die Gleichung 4) als bestehend voraus, so gilt die Gleichung 2) und die mit Gleichung 4) identische Gleichung 3a). Aus der Vergleichung der rechten Seiten der Gleichungen 3a) und 2) folgt aber das Bestehen der Gleichungen 3). Somit gilt auch der Satz:

Sind AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vier Punktpaare einer Geraden, sind A', B', C', D' vier Punkte, die von einem Punkte P durch die Punktpaare harmonisch getrennt sind, und besteht die Relation

$$(A'B'C'D') = (AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1),$$

so gehören die vier Punktpaare einer involutorischen Reihe an, und die obige Relation besteht für jeden beliebigen Punkt P der Geraden.

2. Projicirt man die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 der involutorischen Punktreihe aus einem Punkte S durch die Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, so sind diese vier Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels, und wenn p derjenige Strahl des Büschels ist, der auf seinem zugeordneten senkrecht steht, so ist

5) $$tg\,pa \,.\, tg\,pa_1 = tg\,pb \,.\, tg\,pb_1 = tg\,pc \,.\, tg\,pc_1 = tg\,pd \,.\, tg\,pd_1.$$

Sind nun die Strahlen $a'b'c'd'$ von p durch die vier Strahlenpaare harmonisch getrennt, so hat man

$$\frac{2}{tg\,p\,a'} = \frac{1}{tg\,p\,a} + \frac{1}{tg\,p\,a_1} \quad \text{etc.},$$

$$2\left(\frac{1}{tg\,p\,a'} - \frac{1}{tg\,p\,c'}\right) = \frac{2\sin a'c'}{\sin p\,a' . \sin p\,c'} = \frac{1}{tg\,p\,a} + \frac{1}{tg\,p\,a_1} - \left(\frac{1}{tg\,p\,c} + \frac{1}{tg\,p\,c_1}\right) \text{ etc.}$$

und hieraus unter Berücksichtigung der Gleichungen 5)

$$(a'b'c'd') = \frac{\sin a'c'}{\sin c'b'} : \frac{\sin a'd'}{\sin d'b'} = \frac{\sin a\,c + \sin a_1\,c_1}{\sin c\,b + \sin c_1\,b_1} : \frac{\sin a\,d + \sin a_1\,d_1}{\sin d\,b + \sin d_1\,b_1}$$
$$= (a\,a_1,\ b\,b_1,\ c\,c_1,\ d\,d_1).$$

Sind nun P, A', B', C', D' die Punkte der Punktreihe erster Ordnung, die durch die Strahlen p', a', b', c', d' des Büschels S projicirt werden, so sind $A'B'C'D'$ von P durch die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 harmonisch getrennt. Daher ist

$$(A'B'C'D') = (AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1),$$

ferner

$$(a'b'c'd') = (a\,a_1,\ b\,b_1,\ c\,c_1,\ d\,d_1);$$

aber auch

$$(A'B'C'D') = (a'b'c'd'),$$

daher endlich

$$(AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1) = (a\,a_1,\ b\,b_1,\ c\,c_1,\ d\,d_1).$$

Diese Relation gilt für jede Transversale des Büschels S und für jeden Büschel S, der die Punktreihe $AA_1, \ldots$ projicirt, sobald die Punkte $AA_1, \ldots$ in den Strahlen $a\,a_1, \ldots$ liegen. Hieraus folgt:

In zwei projectiven Grundgebilden ist das Doppelverhältniss von irgend vier Elementenpaaren einer in dem einen Gebilde enthaltenen involutorischen Reihe gleich dem Doppelverhältnisse der vier homologen Elementenpaare des zweiten Gebildes.

3. Aus der Gleichung

$$(A'B'C'D') = (AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1),$$

worin die Buchstaben die bisherige Bedeutung haben, folgt unmittelbar, dass zwischen den Werthen der 24 Doppelverhältnisse, die sich aus vier Punktepaaren einer involutorischen Reihe bilden lassen, dieselben Beziehungen bestehen, als zwischen den 24 Doppelverhältnissen, die sich aus den vier Punkten A', B', C', D' bilden lassen. So gilt u. A. die Relation

$$(AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1) + (AA_1,\ CC_1,\ BB_1,\ DD_1) = 1$$

oder

$$\frac{AC + A_1C_1}{CB + C_1B_1} : \frac{AD + A_1D_1}{DB + D_1B_1} + \frac{AB + A_1B_1}{BC + B_1C_1} : \frac{AD + A_1D_1}{DC + D_1C_1} = 1,$$

welche Relation sich auch in der Form schreiben lässt:

$$(AB + A_1B_1)(CD + C_1D_1) + (AC + A_1C_1)(DB + D_1B_1)$$
$$+ (AD + A_1D_1)(BC + B_1C_1) = 0,$$

eine Identität also, die zwischen den zweimal sechs Abständen besteht, welche man erhält, wenn man vier Punktepaare einer involutorischen

Reihe in zwei Gruppen theilt, in deren jeder je ein Punkt eines Punktepaares vorkommt, und nun die Abstände der Punkte jeder Gruppe unter einander bildet.

In der That kann man in der obigen Gleichung wieder je zwei zugeordnete Punkte eines Paares vertauschen, ohne dass die Relation zu bestehen aufhört.

Ebenso erhält man für die Sinus der Winkel, die vier Strahlenpaare eines involutorischen Büschels bilden, die Identität:

$$(\sin ab + \sin a_1 b_1)(\sin ac + \sin a_1 c_1) + (\sin ac + \sin a_1 c_1)(\sin db + \sin d_1 b_1) + (\sin ad + \sin a_1 d_1)(\sin bc + \sin b_1 c_1) = 0.$$

Diese Identitäten sind analog denjenigen, die zwischen den Abständen von vier Punkten einer Geraden und den Sinus der Winkel von vier Geraden eines Büschels bestehen.

Marburg, Juli 1882. B. Klein.

XXII. Erzeugung der abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung durch Punkte.

I. Wenn $n-1$ Ebenen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ eines n-Flachs sich um $n-1$ feste Gerade $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ drehen, die in einer Ebene α mit einem festen Punkte $\mathfrak{a}$ liegen, durch welchen die letzte Ebene ξ des n-Flachs geht, und wenn die Kanten $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, in welchen die Ebene ξ von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ geschnitten wird, auf $n-1$ festen Geraden $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ gleiten, von denen keine zwei einander treffen, so beschreibt jede der $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Ecken des n-Flachs ein einschaliges Hyperboloid.

II. Von den in der Ebene ξ befindlichen $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Ecken des n-Flachs wollen wir eine, z. B. die von den Ebenen ξ_1, ξ_2 gebildete herausgreifen. Das von derselben beschriebene Hyperboloid hat b_1, b_2 zu Geraden einer und derselben Schaar. Bezeichnet man die Punkte, in welchen b_1, b_2 die Ebene α durchbohren, durch $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$, den Schnittpunkt von a_1, a_2 durch $\mathfrak{a}_{12}$, und die Punkte, in welchen a_1, a_2 von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ getroffen werden, durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, so sind die Schnittlinien der Ebenenpaare, welche durch b_1, b_2 und je durch einen der Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{12}$ gehen, drei Gerade der anderen Schaar des Hyperboloids.

III. Eine der nicht in der Ebene ξ befindlichen Ecken des n-Flachs sei z. B. der Schnittpunkt $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$. Das von demselben beschriebene Hyperboloid geht durch die Ecken $\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{13}, \mathfrak{a}_{23}$ des Dreiseits $a_1 a_2 a_3$. Bezeichnen wir die Punkte, in welchen die Ebene $[\mathfrak{a} b_1]$ von b_2, b_3 durchbohrt wird, durch $\mathfrak{b}_2^1, \mathfrak{b}_3^1$, so schneiden sich die Ebenen $[a_2 \mathfrak{b}_2^1]$ und $[a_3 \mathfrak{b}_3^1]$ in einer Geraden des Hyperboloids, welche durch $\mathfrak{a}_{23}$ geht.

Schneiden die Ebenen $[\mathfrak{a}b_2]$ und $[\mathfrak{a}b_3]$ einander in einer Geraden g_{23}, welche b_2 und b_3 in $\mathfrak{b}_2^{23}$ und $\mathfrak{b}_3^{23}$ trifft, so schneiden die Ebenen $[a_2\mathfrak{b}_2^{23}]$ und $[a_3\mathfrak{b}_3^{23}]$ einander in der zweiten Geraden des Hyperboloids, welche durch $\mathfrak{a}_{23}$ geht.

Durch Vertauschung der Indices erhält man die Geraden des Hyperboloids, welche von $\mathfrak{a}_{13}$ und $\mathfrak{a}_{12}$ ausgehen. —

Die besonderen Fälle, in welchen statt eines einschaligen Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid oder ein Kegel entsteht, sind leicht anzugeben.

Greifswald. H. E. M. O. Zimmermann, Stud. phil.

XXIII. Notiz über Fusspunktcurven.

Fällt man von einem Punkte P auf sämmtliche Tangenten einer Curve die Lothe PF, so wird bekanntlich der Ort des Punktes F eine Fusspunktcurve genannt. Legt man nun von P nach allen Tangenten gerade Linien PX derart, dass $\angle PXF = \omega$ ein und dieselbe Grösse hat, so ist es nicht schwer, den Ort des Punktes X zu bestimmen. Wird nämlich PF über F hinaus verlängert und auf ihr $PX' = PX$ abgetragen, so ist wegen $PF : PX' = \sin\omega$ der Ort des Punktes X' eine Curve, welche der Fusspunktlinie des Punktes F ähnlich ist und in Beziehung auf P als Aehnlichkeitspunkt ähnlich liegt. Durch eine Drehung dieser Curve um P um $\angle(90^0 - \omega)$ fällt dieselbe mit der gesuchten Ortscurve des Punktes X zusammen. Letztere ist daher der Fusspunktlinie für F ähnlich, und es hat P für sie dieselbe Bedeutung, wie für die Curve durch F. Durch eine solche Verallgemeinerung ergiebt sich z. B. der Satz: Bewegt sich ein beliebiger Winkel von unveränderlicher Grösse so, dass sein Scheitel einen Kreis durchläuft, während sich der eine Schenkel um einen festen Punkt dreht, so hüllt der andere einen Kegelschnitt ein, welcher den festen Punkt zum Brennpunkt hat.

Leipzig, 1882. Weinmeister I.

Bemerkung. Seite 212 Z. 5 v. u. lies Fig. 1 statt 14,
„ 216 „ 11 v. o. „ „ 2 „ 15,
„ 246 lies statt Fig. 17 Fig. 4 und statt Fig. 18 Fig. 5.

XV.

Geometrische Untersuchungen über den Verlauf der elliptischen Transcendenten im complexen Gebiete.

Von

OSKAR HERRMANN in Leipzig.

(Schluss.)

(Siehe 4. Heft Tafel IV Fig. 1—13.)

III. Die elliptischen Functionen.

Dass sich unsere Riemann'sche Fläche über der z-Ebene conform eindeutig auf ein Parallelogramm mit Hilfe des Integrals erster Gattung w abbilden lässt, rührt von den Periodicitätsmoduln 2ω, $2\omega'$ dieses Integrals her. Ebenso besitzt bekanntlich das Integral zweiter Gattung Z_1, das wir ebenfalls in der w-Ebene betrachtet haben, zwei Periodicitätsmoduln 2η, $2\eta'$. Die Function

$$F = cw + c_1 Z_1,$$

die an einer Stelle einfach algebraisch unendlich wird, besitzt also die Periodicitätsmoduln

$$2\alpha = c.2\omega + c_1.2\eta, \quad 2\alpha' = c.2\omega' + c_1.2\eta'.$$

Es liegt nun nahe, zu untersuchen, ob die Constanten c und c_1 vielleicht so bestimmt werden können, dass α und α' verschwinden, dass also F geradezu eine doppeltperiodische Function von w mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ wird. Man sieht nun, dass noch ein zweites Integral zweiter Gattung hinzugefügt werden muss, da nach der Legendre'schen Relation $\frac{\omega}{\omega'}$ nicht gleich $\frac{\eta}{\eta'}$ sein kann. Es können also die Constanten c, c_1, c_2 so gewählt werden, dass die Function

$$F = cw + c_1 Z_1 + c_2 Z_2$$

doppeltperiodisch in Bezug auf w ist. Dies stimmt überein mit dem bekannten Liouville'schen Satze, dass eine doppeltperiodische Function den Werth ∞ innerhalb eines Periodenparallelogramms mindestens zweimal annimmt.

Wir können dies auch rein physikalisch ausdrücken. Dabei wollen wir unter einem reellen, resp. imaginären (auf dem Ringe) geschlossenen Wege

einen solchen Weg im Sinne der positiven u- beziehungsweise v-Axe verstehen, welcher zwei entsprechende Punkte benachbarter Rechtecke mit einander verbindet. Wir verstehen nun nach dem Vorgange englischer Physiker unter der Circulation längs einer geschlossenen Curve die Resultante der Componenten der Strömung in den Elementen der betreffenden Curve, also die Grösse $\int \frac{\partial U}{\partial s} ds$, das Integral über die geschlossene Curve genommen. Dieser Ausdruck bedeutet offenbar den Zuwachs, welchen die Function U während eines Umlaufs auf der Curve erhält. Der Zuwachs, welchen die Function V bei einem geschlossenen Wege erhält, wird durch die Grösse $\int \frac{\partial V}{\partial s} ds$ gemessen, ist also die Circulation in Bezug auf die conjugirte, d. h. diejenige Strömung, welche entsteht, wenn wir die Curven $U = const.$ als Strömungslinien wählen. Die Summe der beiden Circulationen, die zweite mit i multiplicirt, ist folglich der Zuwachs, welchen die Function $W = U + iV$ während eines Umlaufs auf einer geschlossenen Curve erhält. Dieser Zuwachs ist identisch mit dem Periodicitätsmodul, den die Function W infolge der Durchlaufung des betreffenden geschlossenen (Integrations-) Weges erfährt.

Der Periodicitätsmodul in Bezug auf eine geschlossene Curve, die sich, ohne dass ein logarithmischer Unendlichkeitspunkt überschritten wird (Verzweigungspunkte lassen wir aus dem Spiele), auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ist gleich Null. Auf unserer Ringfläche giebt es aber noch andere geschlossene Wege[1]), und zwar können dieselben sämmtlich aus reellen und imaginären geschlossenen Wegen (nach der oben festgesetzten Bezeichnungsweise) zusammengesetzt werden. Betrachten wir z. B. die Strömung zweiter Gattung (5), so bemerken wir, dass die Circulation längs eines imaginären geschlossenen Weges verschwindet, dass dagegen die Circulation längs eines reellen geschlossenen Weges einen bestimmten Werth hat. (Man sieht diese Verhältnisse unmittelbar ein, wenn man bestimmte geschlossene imaginäre resp. reelle Wege verfolgt, bei unserem Beispiele am besten diejenigen, welche das Rechteck genau halbiren.) Diese letztere Circulation wird nun ebenfalls gleich Null werden, wenn wir zur vorigen Strömung eine Strömung erster Gattung hinzufügen, für welche die Circulation längs eines imaginären geschlossenen Weges gleich Null, längs eines reellen geschlossenen Weges aber dem Werthe der entsprechenden Circulation von (5), negativ genommen, gleich ist. Für die so construirte Strömung ist U eine eindeutige Function auf der Ringfläche. Nicht aber V. Diese Function wird, wie man sieht, wenn man sich die eben postulirte Strömung vorstellt, in Bezug auf einen reellen geschlossenen Weg die Circulation Null, in Bezug auf einen imaginären jedoch eine bestimmte end-

1) Vergl. hierzu Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik, S. 170.

liche Circulation besitzen. Die Strömung wird sich nicht so abändern lassen, dass mit U zugleich V eindeutig auf der Ringfläche ist. Es giebt eben keine eindeutige Function auf der Ringfläche, welche nur in einem Punkte einfach algebraisch unendlich wird.

Anders ist es, wenn wir ein zweites Integral zweiter Gattung mit den Periodicitätsmoduln $2\eta_2$, $2\eta'_2$ zu Hilfe nehmen. Durch die Gleichungen $c\omega + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = 0$, $c\omega' + c_1\eta'_1 + c_2\eta'_2 = 0$ werden eben die c gerade bis auf eine gemeinsame multiplicative Constante vollständig bestimmt.

Wir haben uns im Vorhergehenden bemüht, Functionen zu construiren, welche in Bezug auf w doppeltperiodisch sind. Solche Functionen sind aber in der Analysis wohl bekannt, es sind die von Jacobi[1]) mit dem Namen der elliptischen Functionen bezeichneten Functionen. Diese müssen unter den soeben postulirten elliptischen Integralen zweiter Gattung, als Functionen des Integrals erster Gattung aufgefasst, ihre Stelle finden[2]). Eine systematische Untersuchung der Strömungen für diese Functionen von dem eben entwickelten Standpunkte aus setzt, wie wir sehen, eine allgemeine Discussion des Verlaufs der Integrale zweiter Gattung mit mehr als einem algebraischen Unendlichkeitspunkte voraus. Da wir unsere Betrachtungen im vorigen Abschnitte jedoch auf einen Unendlichkeitspunkt beschränkt haben, so wenden wir uns gleich zu den üblichen Normalformen der elliptischen Functionen, und von diesen wollen wir beispielsweise betrachten 1. die in der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen fundamentale Function $W = \wp(w)$, 2. die Function $W = \sin am\, w$. In den zugehörigen Figuren haben wir, um zugleich anzudeuten, welche Partien des Periodenparallelogramms den einzelnen Quadranten der W-Ebene entsprechen, ausser den Strömungscurven noch die der Geraden $U = 0$ entsprechenden Curven und die Nullpunkte der Function besonders markirt.

1. Die Function $W = \wp(w)$ habe die Perioden 2ω, $2\omega'$. Dabei setzen wir fest, damit das Periodenparallelogramm ein Rechteck sei, dass ω reell, ω' rein imaginär sei. Es ist nun

$$\wp(w) \text{ reell für } u = 0,\ \omega,\ 2\omega,\ \ldots$$
$$\text{und für } iv = 0,\ \omega',\ 2\omega',\ \ldots$$

Ferner ist $\wp(w)$ unendlich gross von der zweiten Ordnung für $w \equiv 0 \ (mod\ 2\omega,\ 2\omega')$, sonst nirgends unendlich. Daraus geht unter Anderem hervor, dass $\wp'(w)$ für $w \equiv 0$ unendlich gross von der dritten Ordnung ist, $\wp'(w) = 0$ also drei Wurzeln und $\wp(w)$ folglich drei Kreuzungspunkte besitzt, und zwar sind diese, wie man aus der ersten Bemerkung sieht, $w = \omega$, ω', $\omega + \omega'$. Um schliesslich die Nullpunkte der Function

1) Fundamenta, § 17.

2) Dieser Ideengang allgemein für Abel'sche Functionen rührt von Riemann her (Gesammelte mathem. Werke S 100; Klein a. a. O. S. 44).

zu markiren, bedenken wir, dass $p(\omega)=e_1$, $p(\omega+\omega')=e_2$, $p(\omega')=e_3$ ist, und zwar besteht die Relation $e_1+e_2+e_3=0$. Wir wollen nun annehmen $e_1>e_2>0>e_3$, so dass der eine Nullpunkt zwischen $\omega+\omega'$ und ω', der andere zwischen $\omega+\omega'$ und $2\omega+\omega'$ zu suchen ist.

Diese Angaben genügen, um die zugehörige Strömung angeben zu können (Fig. 6).

2. Die Function $W=\sin am w$ habe die Perioden $4\omega, 2\omega'$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \sin am w \text{ reell für } iv &= 0,\ \omega',\ 2\omega', \dots \\ \text{und für } u &= \omega,\ 3\omega, \dots, \\ \text{rein imaginär für } u &= 0,\ 2\omega,\ 4\omega, \dots \end{aligned}$$

Ferner wird $\sin am w$ einfach unendlich für $w=\omega', \omega'+2\omega, \dots, 3\omega', 3\omega'+2\omega, \dots$ Dabei haben sich die Kreuzungspunkte von selbst eingestellt (Fig. 7).

IV. Die Weierstrass'schen E-Functionen.

Die gewöhnliche Theorie der doppeltperiodischen Functionen, wie sie von Liouville und Hermite aufgestellt worden ist[1]), betrachtet nur solche Functionen von w, die im Periodenparallelogramm keinerlei wesentlich singuläre Punkte besitzen. Dabei verstehen wir mit Weierstrass[2]) unter einem wesentlich singulären Punkte einen solchen, in welchem die Function jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden kann. Weierstrass hat sich aber (in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen) veranlasst gesehen, gerade auch doppeltperiodische Functionen mit solchen Punkten in Betracht zu ziehen. Es sind dies die E-Functionen (Primfunctionen), welche im Periodenparallelogramm einen wesentlich singulären Punkt besitzen, und von denen zwei niemals, die dritte nur einmal Null wird. Dieselben lauten in der Weierstrass'schen Bezeichnungsweise (2ω, $2\omega'$, beziehungsweise 2η, $2\eta'$ sind die Periodicitätsmoduln des Normalintegrals erster resp. zweiter Gattung):

$$\begin{aligned} E(z,\sqrt{Z},\omega) &= e^{2\omega\frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}-2\eta w}, \\ E(z,\sqrt{Z},\omega') &= e^{2\omega'\frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}-2\eta' w}, \\ E(z,\sqrt{Z},w_0) &= \frac{\sigma(w_0-w)}{\sigma(w_0)\,.\,\sigma(w)}\cdot e^{w_0\frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}}. \end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden die conformen Abbildungen für diese Functionen aufsuchen. Zu dem Ende wählen wir den einfachsten Fall, den der sogenannten lemniscatischen Functionen, nämlich

1) Vergl. Borchardt im Journal für Mathematik Bd. 88, S. 277; Briot-Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques.

2) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1876.

$$2\omega = 1, \quad 2\omega' = i, \quad 2\eta = \pi, \quad 2\eta' = -i\pi, \quad w_0 = \tfrac{1}{2}$$ [1]),

so dass wir im Folgenden als Periodenparallelogramm ein Quadrat betrachten. Hierdurch ergeben sich, wenn wir überdies noch die σ-Function durch die ϑ_0-Function ersetzen, die drei Functionen

$$E(w) = e^{\frac{\vartheta'_0(w,i)}{\vartheta_0(w,i)}},$$

$$E_1(w) = e^{2i\pi w} . e^{i . \frac{\vartheta'_0(w,i)}{\vartheta_0(w,i)}},$$

$$E_0(w) = \frac{\vartheta_0(\frac{1}{2} - w, i)}{\vartheta_0(w, i)} \cdot e^{\frac{1}{2}\frac{\vartheta'_0(w,i)}{\vartheta_0(w,i)}},$$

wobei wir für die Function $E_0(w)$ den für unsere Zwecke unwesentlichen positiven Factor $\frac{\vartheta'_0}{\vartheta_0(\frac{1}{2})}$ unterdrückt haben. Infolge der Relation $\vartheta_0(iw, i) = i . e^{\pi w^2} . \vartheta_0(w, i)$ (S. 267) ist nun, wie man leicht ausrechnet,

$$E_1(iw) = E(w),$$

so dass wir im Folgenden nur die beiden Functionen $E(w)$ und $E_0(w)$ zu betrachten haben.

1. Die Function $W = E(w)$ (Fig. 9).

Die schon in der Einleitung erwähnte Eintheilung der W-Ebene in die vier Quadranten (Fig. 8) zu Grunde legend, fragen wir: welche Curven in der w-Ebene entsprechen den geraden Linien $U = 0$, $V = 0$ der W-Ebene? Dabei wollen wir uns gestatten, jene Curven auch in der w-Ebene Curven $U = 0$ resp. $V = 0$ zu nennen.

Die Function wird ausser an der Stelle $w = 0$ nirgends Null oder unendlich. Für ein reelles w erhalten wir auch ein reelles W, daher sind die Geraden $v = 0$ und, da unsere Function die Periode i hat, $v = 1$ Curven $V = 0$. Dasselbe gilt von der Geraden $v = \frac{1}{2}$. Es ist nämlich, wenn wir statt $\vartheta(w, i)$ kurz $\vartheta(w)$ schreiben, $\vartheta_0\left(w + \frac{i}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}} . e^{\frac{\pi}{4}} . e^{-w\pi i}\,\vartheta_3(w)$, also

$$E\left(w + \frac{i}{2}\right) = -\,e^{\frac{\vartheta'_3(w)}{\vartheta_3(w)}},$$

und dieser Ausdruck ist reell für ein reelles w.

Aus dem Umstande, dass die Function auch um 1 periodisch ist und dass die Gerade $v = \frac{1}{2}$ nur reelle Functionswerthe aufzuweisen hat, ersehen wir unmittelbar, dass auf dieser Geraden im Quadrat mindestens zwei Kreuzungspunkte liegen, denn sonst könnte man, wenn man den jener Geraden entsprechenden Weg auf der Geraden $V = 0$ zurücklegt, nicht wieder

---

1) Es sei hervorgehoben, dass wir hier und auch im folgenden Abschnitte eine noch grössere Beschränkung einführen, als wir dies für die Integrale gethan haben, wo $\varkappa^2$ nur reell zu sein brauchte. Wegen der benutzten Eigenschaften und Bezeichnungen der ϑ- und σ-Functionen vergleiche man übrigens Abschnitt V.

dieselbe Stelle in demselben Sinne passiren. Die Kreuzungspunkte haben ja die Eigenschaft, dass in ihnen die Winkel der entsprechenden (Verzweigungs-) Punkte der W-Ebene halbirt erscheinen. Passiren wir also einen einfachen Kreuzungspunkt der w-Ebene unter einem Winkel von 180^0, so müssen wir, um den entsprechenden Weg in der W-Ebene zu machen, im Verzweigungspunkte vollständig umkehren. Wir behaupten nun, dass auf jener Geraden genau zwei Kreuzungspunkte liegen und dass es im Quadrat überhaupt keinen weiteren Kreuzungspunkt giebt. Denn diese Punkte sind definirt durch $\frac{dW}{dw}=0$, d. h. durch $\frac{\partial^2}{\partial w^2} \log \vartheta_0(w)=0$ oder, nach einer bekannten Formel, durch

$$\frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}-\left(\frac{\vartheta'_0}{\vartheta_3}\right)^2 \cdot \frac{\vartheta_3^2(w)}{\vartheta_0^2(w)}=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nun selbst eine doppeltperiodische Function mit den Perioden 1 und i, und zwar wird dieselbe nur an der Stelle $w=0$ unendlich und zwar doppelt, d. h. sie nimmt jeden Werth, insbesondere auch die Null, im Periodenquadrat nur zweimal an.

Man sieht leicht, wo ungefähr diese Kreuzungspunkte liegen. Nimmt man nämlich nur die ersten Glieder der sehr rasch convergirenden ϑ-Reihen, so erhält man

$$E\left(u+\frac{i}{2}\right)=-e^{4\pi \cdot e^{-\pi} \cdot \sin 2u\pi},$$

also liegen die Kreuzungspunkte ungefähr bei $u=\frac{1}{4}$ und $u=\frac{3}{4}$.

Um die Gestalt, welche die Abbildung in der Nähe des wesent-ich singulären Punktes $w=0$ besitzt, zu untersuchen, bemerken wir zunächst, dass sich die Function dort wie $e^{\frac{1}{w}}$ verhält. Die eben aufgeworfene Frage über das Verhalten der Function für $w=0$ ist daher nur noch für die einfachere Function $W=e^{\frac{1}{w}}$ zu beantworten. Statt dieser ziehen wir zunächst einmal die Function $W=e^z$ in Betracht. Für diese Function ist aber die Abbildung wohl bekannt[1]). Die z-Ebene wird, wenn wir bei unserer Eintheilung der W-Ebene in die vier Quadranten bleiben, in unendlich viele der x-Axe parallele Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$ eingetheilt, von denen jeder einem der vier Quadranten der W-Ebene entspricht, so dass abwechselnd, in der Entfernung $\frac{\pi}{2}$ von einander, Curven $U=0$ und $V=0$ parallel der x-Axe verlaufen. Hieraus kann man nun leicht die

1) Holzmüller a. a. O. S. 237; ferner z. B. Thomae, „Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, Halle 1880", S. 59. Die Abbildung für $e^{\frac{1}{w}}$ kennt man natürlich auch, doch wollen wir hier ausführlich sein.

Abbildung für $e^{\frac{1}{w}}$ ableiten, indem man die Transformation $z = \frac{1}{w}$ macht, welche, abgesehen von einer Umlegung der Winkel, mit der Transformation durch reciproke Radien übereinstimmt[1]). Dann gehen die parallelen geraden Linien sämmtlich in Kreise über, welche die Gerade $u = 0$ im Punkte $w = 0$ berühren und immer kleiner und kleiner werden. So entsteht in der Nähe des Punktes $w = 0$ ein Bild, ähnlich dem, wie wir es in Fig. 9 angedeutet haben (nur muss man sich alle vier an den Punkt $w = 0$ heranreichende Quadrate gezeichnet denken).

Wir sehen, dass in der Nähe des wesentlich singulären Punktes unendlich viele Gebiete mit zwei Zipfeln an diesen Punkt hinanreichen. Es werden nun überhaupt alle Gebiete, welche durch das Ziehen der Curven $U = 0$, $V = 0$ in der w-Ebene entstehen, an den Punkt $w = 0$ hinanreichen, und zwar von beiden Seiten her: von links mit demjenigen Zipfel, welcher dem Punkte $W = 0$ entspricht, von rechts mit demjenigen, welcher dem Punkte $W = \infty$ entspricht. Nun kann es allerdings auch vorkommen, dass ein Gebiet mit mehr als zwei solchen Zipfeln an den singulären Punkt hinanreicht, nämlich dann, wenn innerhalb desselben ein Kreuzungspunkt existirt. In diesem Falle entsprechen ja, wenn der Kreuzungspunkt von der Multiplicität 1 ist, dem betreffenden Gebiete zwei übereinanderliegende (in dem zugehörigen Verzweigungspunkte zusammenhängende) Quadranten der w-Ebene. Dieses Gebiet würde also mit vier Zipfeln an den wesentlich singulären Punkt hinanreichen. Von solchen Gebieten ist aber hier von vornherein nicht die Rede, weil die beiden überhaupt vorhandenen Kreuzungspunkte auf der Begrenzung von Gebieten der w-Ebene liegen. Jedes Gebiet der w-Ebene entspricht einem und nur einem Quadranten der W-Ebene eindeutig umkehrbar.

Wenn wir schliesslich noch zeigen, dass zwischen $w = \frac{1}{2}$ und $w = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ nur eine einzige Curve $U = 0$ verläuft, so hat es keine Schwierigkeit mehr, sich eine Vorstellung von dem Curvensystem $U = 0$, $V = 0$ im Periodenquadrat zu machen.

Um die eben gemachte Behauptung zu beweisen, schreiben wir

$$E(\tfrac{1}{2} + iv) = e^{\frac{\vartheta'_0(\frac{1}{2}+iv)}{\vartheta_0(\frac{1}{2}+iv)}} = e^{-i\pi Y},$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{e^{v\pi} - e^{-v\pi} + 3e^{-2\pi} \cdot e^{3v\pi} + \dots}{e^{v\pi} + e^{-v\pi} + e^{-2\pi} \cdot e^{3v\pi} + \dots} = Y$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck Y verschwindet und wächst stetig mit v, bis er für $v = \frac{1}{2}$ gleich 1 wird, d. h. für $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}$ ist $E(\frac{1}{2} + iv)$ reell. Dazwischen aber nimmt Y einmal und nur einmal den Werth $\frac{1}{2}$ an, d. h.

---

1) Z. B. Holzmüller a. a. O. S. 25; Thomae a. a. O. S. 84.

zwischen $v=\frac{1}{2}$ und $v=0$ erhält $E(\frac{1}{2}+iv)$ einmal und nur einmal einen rein imaginären Werth.

Da ferner aus $E(u+iv)=U+iV$ die Gleichung $E(u-iv)=U-iV$ folgt, so gilt die eben gemachte Bemerkung auch für die Strecke von $w=\frac{1}{2}$ bis $w=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ und, was infolge der Periodicität dasselbe ist, für die Strecke von $w=\frac{1}{2}+i$ bis $w=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$.

Endlich kommt es noch darauf an, anzugeben, welchen Quadranten der W-Ebene die einzelnen Gebiete der w-Ebene entsprechen, und um dies thun zu können, brauchen wir dieses Entsprechen nur von einem einzigen Gebiete zu kennen, um dann continuirlich aus den Verhältnissen der W-Ebene auf die der w-Ebene zu schliessen. Wir haben gesehen, dass für $u=\frac{1}{2}$ und ein kleines positives v $E=e^{-i\pi\delta}$ ist, wo δ eine kleine positive Grösse bedeutet; also entspricht das Gebiet, in welchem diese Werthecombinationen von u und v vorkommen, d. h. die unmittelbar über der Seite $\overline{01}$ liegende Partie des Quadrates, dem vierten Quadranten der W-Ebene.

2. Die Function $W=E_0(w)$ (Fig. 10).

Da diese Function von der vorhergehenden nur wenig verschieden ist, so können wir uns im Folgenden ziemlich kurz fassen. Der wesentliche Unterschied beider Functionen ist der, dass $E_0(w)$ für $w=\frac{1}{2}$ einen Nullpunkt besitzt, so dass es jetzt vier aufeinander folgende Gebiete geben wird, welche nur mit einem Zipfel an den singulären Punkt $w=0$ hinanreichen, wenn nicht durch die Kreuzungspunkte Unregelmässigkeiten hineingebracht werden, was jedoch nicht der Fall ist, da auch für diese Function, wie wir sehen werden, dieselben sämmtlich auf der Begrenzung der Gebiete liegen.

In dem wesentlich singulären Punkte $w=0$ verhält sich die Function wie $\frac{c}{w}\cdot e^{\frac{1}{2w}}$, c reell und >0. Wir verfahren nun genau wie bei der Function $E(w)$, indem wir zunächst $W=z.e^z$ betrachten und dann die Transformation $z=\frac{1}{w}$ anwenden. Wir bekommen so eine Abbildung, welche in grosser Nähe des Punktes $w=0$ übrigens nicht wesentlich verschieden ist von der für die Function $e^{\frac{1}{w}}$.

Für $v=0$ und $v=\frac{1}{2}$ ist die Function reell. Kreuzungspunkte giebt es drei, denn die Gleichung $\frac{dW}{dw}=0$ lautet

$$\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}\left\{\frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}-\left(\frac{\vartheta'_0}{\vartheta_3}\right)^2\cdot\frac{\vartheta_3^{\,2}(w)}{\vartheta_0^{\,2}(w)}\right\}+2\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat die Perioden 1 und i und wird im Punkte $w \equiv 0$ und sonst nirgends unendlich und zwar dreifach, d. h. sie wird im Periodenquadrate auch dreimal Null. Zwei dieser Kreuzungspunkte liegen wieder auf der Geraden $v = \frac{1}{2}$ (ungefähr bei $u = \frac{1}{4}$ und $u = \frac{3}{4}$), der dritte liegt zwischen $w = \frac{1}{2}$ und $w = 1$. Denn für ein kleines positives w ist E_0 sehr gross positiv, für $w = \frac{1}{2}$ ist $E_0 = 0$, wird dann negativ, nähert sich aber, wenn sich w dem Werthe 1 nähert, wieder der Null, nämlich dem Werthe $\left[-\frac{c}{w} e^{-\frac{1}{2w}}\right]$ für $w = +0$, ohne vorher den Werth ∞ angenommen zu haben, und daraus folgt die obige Behauptung.

Auf der Geraden $u = \frac{1}{2}$ wird die Function, ausser wenn sie gleich Null wird, nirgends rein imaginär, d. h. diese Gerade kann von keiner Curve $U = 0$ durchkreuzt werden. Das brauchen wir nur für's Intervall von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}$ nachzuweisen, denn es ist wieder, wenn wir setzen $E_0(u + iv) = U + iV$, $E_0(u - iv) = U - iV$. Um diesen Nachweis zu führen, bemerken wir, dass

$$E_0(\tfrac{1}{2} + iv) = -\frac{\vartheta_0(iv)}{\vartheta_0(\frac{1}{2} + iv)} e^{-\frac{i\pi}{2} Y}$$

ist, wo Y die oben definirte Grösse bedeutet. Da nun der Factor dieses Ausdrucks rein imaginär ist, Y aber zwischen $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}$ nirgends den Werth einer ganzen geraden Zahl annimmt, so wird $E_0(\frac{1}{2} + iv)$ zwischen $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}$ ausser im Punkte $w = \frac{1}{2}$ nirgends rein imaginär.

Diese Angaben genügen, um ungefähr die Gebietseintheilung anzugeben. Um noch zu sagen, welchen Quadranten die einzelnen so erhaltenen Gebiete entsprechen, bedenken wir, dass von $w = 0$ bis $w = \frac{1}{2}$ die Function positiv ist und abnimmt. Diesem Wege entspricht also in der W-Ebene ein Durchlaufen der Geraden $V = 0$ von $+\infty$ bis 0. Auf diesem Wege lässt man aber den vierten Quadranten der W-Ebene links liegen, und so muss es, nach einem bekannten Satze, welcher aussagt, dass die Abbildung mittelst einer Function $W = f(w)$ eine Abbildung ohne Umlegung der Winkel ist, auch in der w-Ebene sein.

V. Die ϑ- und σ-Functionen.

Die im Vorhergehenden behandelten Functionen konnten wir sämmtlich im Periodenparallelogramm betrachten, da die einen geradezu doppeltperiodisch sind, die anderen sich in den verschiedenen Parallelogrammen doch nur um constante Periodicitätsmoduln unterscheiden. Anders ist es dagegen mit den Jacobi'schen ϑ- und den Weierstrass'schen σ-Functionen, die wir jetzt auch behufs ihrer conformen Abbildung untersuchen wollen. Da die ersteren einfach periodisch sind, so brauchen wir zu ihrer Betrachtung einen unendlich langen Streifen der w-Ebene; zur Betrachtung der letzteren müssen wir die ganze w-Ebene in Anspruch nehmen.

Es werden, was die **ϑ-Functionen** anlangt, infolge der Relationen

$$\vartheta_1(w-\tfrac{1}{2})=\vartheta_0(w), \quad \vartheta_3(w-\tfrac{1}{2})=\vartheta_2(w)$$

nur zwei dieser vier Functionen zu untersuchen sein. Dabei haben wir, um mit den Bezeichnungen der σ-Functionen in Uebereinstimmung zu bleiben, nach Weierstrass (Vorlesungen)[1]) folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

$$\vartheta_0(w,\tau)=2h^{1/4}\sin w\pi-2h^{9/4}\sin 3w\pi+\ldots,$$
$$\vartheta_1(w,\tau)=2h^{1/4}\cos w\pi+2h^{9/4}\cos 3w\pi+\ldots,$$
$$\vartheta_2(w,\tau)=1+2h\cos 2w\pi+\ldots,$$
$$\vartheta_3(w,\tau)=1-2h\cos 2w\pi+\ldots,$$

$h=e^{i\pi\tau}$. Bei der näheren Betrachtung werden wir uns auf die ϑ_0-Function beschränken. Die Abbildung für die ϑ_2-Function ergiebt sich dann nach derselben Methode. Und zwar beschränken wir uns wieder auf den einfachsten Fall, den sogenannten lemniscatischen, $\tau=i$.

Was die **σ-Functionen** betrifft, so sind dieselben definirt durch die Gleichungen

$$\sigma(w)=2\omega . e^{\frac{\eta w^2}{2\omega}} . \frac{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega}\right)}{\vartheta'_0},$$

$$\sigma_\lambda(w)=e^{\frac{\eta w^2}{2\omega}} . \frac{\vartheta_\lambda\left(\frac{w}{2\omega}\right)}{\vartheta_\lambda}, \quad \lambda=1,2,3.$$

Auch hier werden wir nur den Fall

$$2\omega=1, \quad 2\omega'=i, \quad \tau=\frac{\omega'}{\omega}=i$$

behandeln. Um zu erfahren, welchen Werth dann η besitzt, gehen wir von der Definition der Function $\sigma(w)$ durch ein unendliches Product aus, nämlich von der Gleichung

$$\sigma(w,\omega,\omega')=w.\prod_{\nu,\nu'}{}'\left(1-\frac{w}{p}\right).e^{\frac{w}{p}+\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^2}, \quad p=2\nu\omega+2\nu'\omega'.$$

Daraus folgt

$$i.\sigma\left(w,\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)=iw.\prod{}'\left(1-\frac{w}{\nu+i\nu'}\right).e^{\frac{w}{\nu+i\nu'}+\frac{1}{2}\left(\frac{w}{\nu+i\nu'}\right)^2},$$

$$\sigma\left(iw,\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)=iw.\prod{}'\left(1-\frac{iw}{\nu+i\nu'}\right).e^{\frac{iw}{\nu+i\nu'}+\frac{1}{2}\left(\frac{iw}{\nu+i\nu'}\right)^2}.$$

Da aber $\frac{iw}{\nu+i\nu'}=\frac{w}{-i\nu+\nu'}=\frac{w}{i\mu+\nu}$, und ν und ν', also auch μ, unabhängig von einander von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Ausschluss der Combination $(0,0)$ zu laufen haben, so ist

1) Man erhält daraus die Jacobi'sche Bezeichnungsweise (Ges. Werke, herausgegeben von Borchardt, Bd. 1 S. 501), indem man statt ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 resp. ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ setzt. Man vergleiche übrigens Schwarz: „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Weierstrass, Göttingen 1882."

$$i.\sigma\left(w, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) = \sigma\left(iw, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right),$$

d. h., wenn wir dies auf die erste Definition übertragen,

$$i.e^{\eta w^2}.\vartheta_0(w, i) = e^{-\eta w^2}.\vartheta_0(iw, i).$$

Setzen wir hierin $(w+1)$ statt w, so erhalten wir durch Vergleichung beider Relationen $\eta = \frac{\pi}{2}$. Zugleich haben wir dadurch die für uns wichtige Relation

$$\vartheta_0(iw, i) = i.e^{\pi w^2}.\vartheta_0(w, i)\text{ [1]}$$

gewonnen. Aus derselben folgt

$$\vartheta_0\left(iw + \frac{i}{2}\right) = i.e^{(w+\frac{1}{2})^2\pi}.\vartheta_0\left(w + \frac{1}{2}\right)$$

oder infolge bekannter ϑ-Relationen

$$e^{-\frac{w^2\pi}{2}}\vartheta_3(iw) = e^{\frac{w^2\pi}{2}}\vartheta_1(w),$$

d. h.

$$\vartheta_3.\sigma_3\left(iw, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) = \vartheta_1.\sigma_1\left(w, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right),$$

so dass uns zur Betrachtung nur noch die Functionen $\sigma(w)$, $\sigma_1(w)$ und $\sigma_2(w)$ übrig bleiben, von denen wieder nur die Function $\sigma(w)$ ausführlich besprochen werden soll.

1. Die Function $W = \vartheta_0(w, i)$ (Fig. 11).

Die Function

$$W = \vartheta_0(w, i) = 2e^{-\frac{\pi}{4}}\sin w\pi - 2e^{-\frac{9\pi}{4}}\sin 3w\pi + \ldots$$

hat zunächst die Eigenschaften $\vartheta_0(w+1) = -\vartheta_0(w)$, $\vartheta_0(w+2) = \vartheta_0(w)$. Es genügt also, diese Function innerhalb des Intervalles von $u = -1$ bis $u = +1$ zu untersuchen, und zwar brauchen wir, da aus $\vartheta_0(u+iv) = U + iV$ die Gleichung $\vartheta_0(u - iv) = U - iV$ folgt, den Streifen von der Breite 2 nur in der einen Halbebene zu betrachten. Die W-Ebene theilen wir wieder in die vier Quadranten ein (Fig. 8). Es wird dann die w-Ebene in unendlich viele Gebiete eingetheilt werden, von denen jedes sich ins Unendliche erstrecken muss, weil $\vartheta_0(w)$ für ein endliches w niemals den Werth ∞ erreicht.

Die Function ist reell auf den Geraden $v = 0$ und $u = \pm\frac{1}{2}$, rein imaginär auf den Geraden $u = 0$ und $u = \pm 1$. Die Nullpunkte der Function sind enthalten in der Form $w = m + ni$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten. Wenn wir daher vom Punkte $w = 0$ geradlinig nach dem Punkte $w = i$ vorwärts gehen, so entspricht diesem Wege ein Weg in der W-Ebene

---

1) Formeln, welche diese Relation als speciellen Fall enthalten, s. Eisenstein, Mathem. Abhandl., Berlin 1847, S. 309; Enneper, Ellipt. Funct., S. 94.

vom Punkte $W=0$ aus und wieder in dieselbe hinein, ohne dass dabei die Gerade $U=0$ verlassen und der Punkt $W=\infty$ erreicht wird. Daraus geht hervor, dass zwischen $w=0$ und $w=i$ mindestens ein Kreuzungspunkt liegt. Weiter unten werden wir sehen, dass auch nur ein Kreuzungspunkt dazwischen liegen kann und dass derselbe zwischen $\frac{i}{2}$ und i liegt. Ebenso liegt zwischen i und $2i$ ein Kreuzungspunkt u. s. w.

Dasselbe gilt auch in Bezug auf die Geraden $u=\pm 1$.

Für's Folgende benützen wir nun die Relationen[1])

$$\vartheta_0(w+ni,i)=(-1)^n e^{-n^2\pi}.e^{-2n\pi i w}.\vartheta_0(w,i),$$
$$\vartheta_0(w+[n+\tfrac{1}{2}]i,i)=i.(-1)^n e^{-(2n+1)\pi i w}.e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi}.\vartheta_3(w,i),$$

wo wir unter n eine beliebige ganze Zahl verstehen. Diese Relationen wenden wir nacheinander für $n=0,1,2,\ldots$ an und setzen $v=0$. Dann werden die rechts stehenden ϑ-Functionen reell, und es ist unmittelbar anzugeben, in welchen Punkten die geraden Linien $v=n$ und $v=n+\frac{1}{2}$ von den Curven $U=0$ und $V=0$ getroffen werden. Durch diese Angaben ist aber das Curvensystem $U=0$, $V=0$ seinem ungefähren Verlaufe nach vollständig bestimmt, wie wir sogleich noch näher ausführen werden. Wir wissen: wenn eine Curve $U=0$ durch einen Kreuzungspunkt geht, so geht auch noch eine zweite Curve $U=0$, senkrecht dazu, durch denselben Punkt. Das ist aber für die eben postulirten Kreuzungspunkte der Fall. Ausserdem kreuzen sich in jedem Nullpunkte der Function zwei Curven $U=0$, $V=0$ rechtwinklig. Setzen wir nun z. B. $n=1$, so liefert die zweite Formel

$$\vartheta_0\left(u+\frac{3i}{2}\right)=i\ e^{-3\pi i u}.R,$$

wo R eine reelle Grösse bedeutet. D. h. für $v=\frac{3}{2}$ ist W reell, wenn $u=\pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{5}{6},\ldots$; rein imaginär, wenn $u=0,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ldots$ Nun sieht man unmittelbar ein: diejenige Curve $U=0$, welche durch $w=-\frac{1}{3}+i.\frac{3}{2}$ gehen muss, ist dieselbe Curve $U=0$, die von dem Kreuzungspunkte zwischen $w=0$ und $w=i$ ausläuft. Ferner: die Curve $v=0$, welche durch $w=-\frac{1}{6}+i.\frac{3}{2}$ geht, ist identisch mit derjenigen Curve $V=0$, welche vom Punkte $w=i$ ausläuft. Mehr Curvenäste sind jedenfalls nicht zu gebrauchen, zwischen $w=0$ und i wird es eben nur einen Kreuzungspunkt geben.

Die Fortsetzung einer solchen Betrachtung ergiebt endlich Fig. 11.

Um auf die Lage der Kreuzungspunkte noch etwas näher einzugehen, nehmen wir die oben abgeleitete Relation

$$\vartheta_0(iw)=i.e^{w^2\pi}.\vartheta_0(w)$$

zu Hilfe. Daraus folgt, dass $\vartheta'_0(iw)=0$ ist, wenn

1) Königsberger, Ellipt. Functionen 1, S. 371.

$$\frac{\vartheta'_0(w)}{\vartheta_0(w)} = -2\pi w.$$

Da nun $\vartheta'_0(w)$ für $w=\frac{1}{2}$ gleich Null und zwischen $w=\frac{1}{2}$ und $w=1$ negativ ist, und da ferner $\vartheta_0(w)$ für $w=0$ und $w=1$ Null und zwischen $w=0$ und $w=1$ positiv ist, so sehen wir, dass der Kreuzungspunkt auf der Geraden $u=0$ zwischen $v=\frac{1}{2}$ und $v=1$ liegt. Aber noch mehr: die linke Seite der obigen Gleichung ist periodisch um 1. w ist aber im zweiten Intervall (d. h. von $w=1$ bis $w=2$) natürlich grösser als im ersten, daher wird die betreffende Wurzel der obigen Gleichung näher an demjenigen Punkte liegen, für welchen $\vartheta_0(w)=0$ ist; d. h. der betreffende Kreuzungspunkt liegt näher am Punkte $w=2i$, als der vorhergehende Kreuzungspunkt am Punkte $w=i$. Wir sehen überhaupt ein: je weiter wir auf der Geraden $u=0$ uns fortbewegen, desto näher werden die Kreuzungspunkte an die zugehörigen Nullpunkte heranrücken, bis sie schliesslich für $v=\infty$ mit ihnen zusammenfallen.

Es bleibt noch übrig, zu untersuchen, welchen Quadranten der W-Ebene die einzelnen Gebiete der w-Ebene entsprechen. Dem Wege $w=0$ bis $w=\frac{1}{2}$ entspricht ein Weg von $W=0$ aus auf der positiven U-Axe. Auf diesem Wege lässt man den ersten Quadranten links liegen. So muss es auch in der w-Ebene sein. Damit kennen wir das Entsprechen in Bezug auf ein Gebiet und können durch Continuität weiter schliessen.

2. Die Function $W=\sigma\left(w, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$ (Fig. 12).

Die für die Abbildung unwesentliche positive Constante ϑ'_0 unterdrückend, betrachten wir die Function

$$W = e^{\frac{\pi}{2}w^2}.\vartheta_0(w,i).$$

Wir werden die Function nur in einem Quadranten untersuchen, in den andern verhält sie sich ganz analog.

Die Nullpunkte sind, wie bei der Function ϑ_0, enthalten in der Form $w=m+ni$. In einem solchen Punkte treffen sich zwei Curven $U=0$, $V=0$ unter einem rechten Winkel. Wir fragen zunächst: welche Richtung besitzen die Curven $U=0$ in diesen Nullpunkten?

Wir wissen, für die Function ϑ_0 laufen diese Curven in den Nullpunkten parallel der v-Axe; wenn wir also $\vartheta_0(w)$ in einem Punkte $w=m+ni$ betrachten und vermehren w um eine sehr kleine rein imaginäre Grösse $i\delta$, so nimmt $\vartheta_0(w)$ einen kleinen rein imaginären Werth an. Wir wollen nun sehen, wie dies beim Factor $e^{\frac{\pi}{2}w^2}$ ist. In einem Nullpunkte ist derselbe gleich $\pm e^{\frac{\pi}{2}(m^2-n^2)}$, also reell und verschieden von Null. Wenn nun w um einen sehr kleinen rein imaginären Theil wächst, so wird sich zwar

$e^{\frac{\pi}{2}w^2}$ etwas ändern, aber der imaginäre Theil wird gegen den reellen unendlich klein sein. Das heisst aber: der Zuwachs des reellen Theiles der Function W ist bei einem Wachsen von w um $i\delta$ unendlich klein gegen den Zuwachs des rein imaginären Theiles; die Curve $U=0$ läuft in jedem Nullpunkte parallel der v-Axe.

Ferner ist, gerade wie bei $\vartheta_0(w)$, die Function auf der Geraden $u=0$ imaginär, auf der Geraden $v=0$ reell, da die Exponentialfunction auf diesen Geraden immer reell ist. Daraus erkennen wir wieder die Existenz gewisser Kreuzungspunkte: zwischen $w=0$ und $w=1$, $w=1$ und $w=2$ u. s. w., und zwischen $w=0$ und $w=i$, $w=i$ und $w=2i$ u. s. w. werden wir je einen Kreuzungspunkt zu verzeichnen haben. Und zwar gilt über die Lage derselben etwas Analoges, wie bei ϑ_0 für die Kreuzungspunkte auf der Geraden $u=0$. Es ist nämlich $\sigma'(w)=0$, wenn

$$\frac{\vartheta'_0(w)}{\vartheta_0(w)}=-\pi w.$$

Die Kreuzungspunkte werden wieder zwischen $w=\frac{1}{2}$ und $w=1$ u. s. w. liegen, und zwar: je weiter wir gehen, desto näher werden sie an die Nullpunkte heranrücken. Doch werden, wenn wir beide Functionen vergleichen, die Kreuzungspunkte in demselben Intervalle bei der ϑ_0-Function näher am Nullpunkte liegen, als bei der σ-Function, da wir im ersten Falle noch den Factor 2 auf der rechten Seite haben.

Endlich benutzen wir noch die Eigenschaft, dass für $u=n$ unsere Function den Werth

$$e^{\frac{\pi}{2}(iv+n)^2}\vartheta_0(iv+n)=e^{\frac{\pi}{2}(-v^2+n^2)}.e^{ivn\pi}(-1)^n\vartheta_0(iv)$$

annimmt. Nun ist $\vartheta_0(iv)$ rein imaginär, und es wird nur die Grösse $e^{ivn\pi}$ zu untersuchen sein, wenn wir wissen wollen, in welchen Punkten die Gerade $u=n$ von Curven $V=0$, und in welchen sie von Curven $U=0$ getroffen wird. Die analoge Aufgabe ist dann zugleich für die Geraden $v=n$ gelöst, da aus der Gleichung $i.\sigma(w)=\sigma(iw)$ die Symmetrie unserer Figur in Bezug auf die Gerade $u=v$ folgt. Und nun lassen sich, wenn wir in der obigen Gleichung successive $n=1, 2, \ldots$ setzen und ähnliche Betrachtungen, wie oben für die ϑ-Function, anstellen, die Curven $U=0$, $V=0$ leicht eintragen. So entsteht Fig. 12.

Schliesslich bemerken wir noch, dass W gleichzeitig mit w von Null an wächst, dass also das an den Punkt $w=0$ heranreichende Gebiet im ersten Quadranten der w-Ebene das Bild des ersten Quadranten der W-Ebene ist. Damit ist überhaupt für jedes Gebiet der w-Ebene bestimmt, welchem Quadranten es entspricht.

VI. Bemerkungen über die behandelten Functionen auf Grund ihrer Abbildungen.

Nachdem wir uns im Vorhergehenden von einer Reihe von Functionen die conformen Abbildungen verschafft haben, wird es leicht sein, verschiedene Eigenschaften dieser Functionen, welche wir nun gewissermassen anschaulich vor uns haben, anzugeben.

Was die E-Functionen betrifft, so sei zunächst bemerkt, dass dieselben in der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen so zur Verwendung kommen, dass mit Hilfe ihrer Logarithmen die elliptischen Normalintegrale dargestellt werden. Einem Wege von $w=\frac{1}{2}$ bis $w=\frac{1}{2}+i$ entspricht nun für die Function $W=E(w)$ ein Umkreisen des Nullpunktes der W-Ebene, wie wir aus unserer Figur ohne Weiteres sehen. Der Logarithmus von E erhält also auf diesem Wege einen Zuwachs von $-2\pi i$. Das Entsprechende ist von den anderen E-Functionen zu sagen, und so sehen wir unmittelbar aus der Figur, wie die Periodicitätsmoduln der Integrale bei dieser Darstellung zu Stande kommen.

Ferner sei es gestattet, noch einmal auf die Kreuzungspunkte der Function ϑ_0 zurückzukommen. Aus unserer Figur ergiebt sich unmittelbar, dass die markirten Kreuzungspunkte (d. h. die in unserer Figur hervortretenden, indem sich in ihnen zwei Curven $U=0$ oder $V=0$ überkreuzen) zugleich sämmtliche Kreuzungspunkte der Function sind. Wir behaupten also den Satz: Die Wurzeln der Gleichung $\vartheta'_0(w,i)=0$ sind entweder in der Form $w=\pm n+\frac{1}{2}$ oder in der Form $w=\pm m\pm i(n+q)$ enthalten, wo m und n ganze positive Zahlen sind und q einen echten Bruch bedeutet, der grösser als $\frac{1}{2}$ ist und sich mit wachsendem n der 1 nähert; und zwar gehört zu jedem n resp. (m,n) auch wirklich eine und nur eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, es gebe ausser den genannten noch einen weiteren Kreuzungspunkt w_0. Dann könnten wir von dem entsprechenden Verzweigungspunkte W_0 der W-Ebene aus auf beiden in diesem Punkte zusammenhängenden Blättern nach dem Punkte $W=0$ Curven ziehen, welche ganz in dem Quadranten verlaufen, in welchem W_0 liegt. Wir müssten also, um dies auf die w-Ebene zu übertragen, den Punkt w_0 mit zwei verschiedenen Nullpunkten verbinden können, ohne dass diese Verbindungslinien aus dem Gebiete, auf welchem w_0 liegt, heraustreten. Ein solches Gebiet existirt aber in unserer Figur nicht[1]).

In der Figur für die σ-Function tritt uns in den meisten Gebieten der Fall entgegen, dass wir von einem Punkte innerhalb des Gebietes aus

1) Einen analytischen Beweis s. Hermite, Annali di matem., serie II t. X S. 137.

nach *verschiedenen* Nullpunkten Curven ziehen können, ohne eine Curve $U=0$ oder $V=0$ zu überschreiten, ein Zeichen, dass in diesem Gebiete ein oder mehrere Kreuzungspunkte liegen. Wir wollen das hier nicht weiter ausführen, sondern nur die Vermuthung aussprechen, dass immer dicht vor einem Nullpunkte, vom Punkte $w=0$ aus gesehen, ein Kreuzungspunkt liegen wird.

Sei zum Schlusse noch Einiges über die *wesentlich singulären Punkte* gesagt, auf welche wir bei unseren Functionen geführt werden. Nach *Picard*[1]) kann man die wesentlich singulären Punkte eindeutiger Functionen in *drei Arten* eintheilen: 1. die Function nimmt in der Nähe des singulären Punktes jeden Werth unendlich oft an, 2. jeden Werth unendlich oft mit Ausnahme eines einzigen Werthes, 3. mit Ausnahme von zwei Werthen. Wenn wir nun unsere Functionen in Bezug hierauf betrachten, so haben wir für die Kategorie 3 die Punkte $w\equiv 0$ für die E-Functionen (0 und ∞ werden nur in dem wesentlich singulären Punkte selbst angenommen), für die Kategorie 2 haben wir den Punkt $w=\infty$ für die ϑ-Function (der Werth ∞ wird erst im Punkte $w=\infty$ selbst angenommen), und für die Kategorie 1 den Punkt $w=\infty$ für die doppeltperiodischen Functionen (für die E-Functionen noch singulärer als für die elliptischen Functionen).

Die Figur für die ϑ_0-*Function* haben wir nur bis $v=3$ ausgeführt. Man übersieht aber sofort, wie das Curvensystem gesetzmässig weiter verläuft. Die Streifen, von denen jeder einem Quadranten der W-Ebene entspricht, werden, je weiter sie sich von der Geraden $v=0$ entfernen, immer enger und enger, bis sie schliesslich für $v=\infty$ unendlich schmal werden. Man kann dies auch in folgender Weise aussprechen: Wir stellen uns die Aufgabe, die Curve zu ziehen, deren Abscisse u ist und deren Ordinaten den reellen Theil von ϑ_0 für $v=c$ darstellen. Dies ist eine Wellenlinie, und zwar schneidet dieselbe für $c=3$ z. B., wie wir aus unserer Figur sehen, die Abscissenaxe zwischen $u=0$ und $u=1$ sechsmal. Setzen wir aber z. B. $c=10$, so schneidet die Curve die Abscissenaxe in jenem Intervalle zwanzigmal. Aber es sind nicht nur die Nullpunkte der Curve dichter aneinander gerückt, sondern — und deshalb construiren wir eben eine *Curve* — die Ordinaten sind auch im Durchschnitt viel grösser geworden. Für $v=n$ schwankt die Function ungefähr zwischen $e^{n^2\pi}$ und $-e^{n^2\pi}$, also für $v=10$ ungefähr zwischen $e^{100\pi}$ und $-e^{100\pi}$. Daraus sieht man, dass man mit wachsendem c die Curve bald nicht mehr wird zeichnen können und dass dieselbe immer mehr den Charakter einer unstetigen Curve annimmt, den sie allerdings erst für $c=\infty$ erreicht[2]).

1) Comptes rendus 89, S. 662 und 745.

2) Eine noch lebendigere Vorstellung dieser Vorkommnisse würde das Modell über (und unter) der w-Ebene vermitteln, deren Ordinaten den reellen (oder auch den rein imaginären) Theil von $\vartheta_0(w)$ darstellen.

Schlussbemerkung.

Durch die neuesten Arbeiten des Herrn Prof. Klein[1]) kennt man eine wichtige Verallgemeinerung des Integrals erster Gattung auf der Ringfläche. „Auf jeder Riemann'schen Fläche existirt eine Function η, welche diese Fläche durchgängig conform auf ein einfach berandetes Stück der Ebene derart abbildet, dass die Gesammtheit der Reproductionen, welche sich durch analytische Fortsetzung ergeben, das Innere eines Kreises einfach und lückenlos überdeckt." Dieser Satz erhält für $p=1$ den Charakter eines Grenzfalles. Es überdeckt ja die Gesammtheit der Rechtecke, welche wir im zweiten Abschnitte als die Bilder der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche fanden, die ganze w-Ebene einfach und lückenlos, indem sich jener Kreis in diesem Falle auf den unendlich fernen Punkt zusammenzieht. In einer solchen η-Ebene finden nun die analogen Betrachtungen für ein höheres p statt, wie wir sie in vorliegender Arbeit für $p=1$ angestellt haben. In diesem Sinne ist Fig. 13 zu verstehen, welche wir ohne weitere Begründung mittheilen. Dieselbe stellt die Strömung, welche einem überall endlichen Abel'schen Integrale $p=2$ entspricht, in der zugehörigen Klein'schen Figur dar. Hierzu ist, da es bei der Strömung auf constante Periodicitätsmoduln nicht ankommt, nur ein einziges Bild der Riemann'schen Fläche nöthig. Wie bei dem als Ringfläche gedachten Rechtecke die gegenüberstehenden Seiten als identisch zu betrachten sind, so sind auch bei dieser Figur, wenn man sie als Riemann'sche Fläche auffasst, je zwei Seiten des Polygons als vollständig zusammenhängend anzusehen. Diese Zusammengehörigkeit der Ränder ist durch die beigefügten Buchstaben angedeutet.

---

1) Mathem. Annalen XX, S. 49; ausführlicher XXI, S. 141.

XVI.

Die Strictionslinien des einmantligen Hyperboloids und hyperbolischen Paraboloids.

Von

Dr. Moriz Baur,

Professor am Realgymnasium in Stuttgart.

Hierzu Taf. VI Fig. 1—4b.

I. Es sei gegeben das einmantlige Hyperboloid

$$1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Da die Erzeugenden der einen und der andern Schaar symmetrisch zu einander in Beziehung auf die Hauptschnittebenen des Hyperboloids gruppirt sind, so wird es genügen, nur die Erzeugenden der einen Schaar in Betracht zu ziehen. Die Strictionslinien der beiden Schaaren werden ebenfalls symmetrisch in Beziehung auf die Hauptschnittebenen liegen und ihre Projectionen auf diese Ebenen zusammenfallen.

Die Gleichungen irgend eines Paares von Erzeugenden der einen Schaar seien

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} y&=-\frac{2m\beta}{(1-m^2)\alpha}x+\frac{1+m^2}{1-m^2}\beta,\\ z&=\frac{(1+m^2)\gamma}{(1-m^2)\alpha}x-\frac{2m}{1-m^2}\gamma\end{aligned}\right.$$

und

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} y&=-\frac{2m'\beta}{(1-m'^2)\alpha}x+\frac{1+m'^2}{1-m'^2}\beta,\\ z&=\frac{(1+m'^2)\gamma}{(1-m'^2)\alpha}x-\frac{2m'}{1-m'^2}\gamma,\end{aligned}\right.$$

wo m und m' ganz beliebige Zahlencoefficienten zwischen $+\infty$ und $-\infty$ sind.

Dann ist die Gleichung der Ebene, welche man durch die erste Erzeugende parallel der zweiten legen kann:

$$\frac{y+\dfrac{2m\beta}{(1-m^2)\alpha}x-\dfrac{1+m^2}{1-m^2}\beta}{z-\dfrac{(1+m^2)\gamma}{(1-m^2)\alpha}x+\dfrac{2m}{1-m^2}\gamma}=\frac{-\dfrac{2m\beta}{(1-m^2)\alpha}+\dfrac{2m'\beta}{(1-m'^2)\alpha}}{\dfrac{(1+m^2)\gamma}{(1-m^2)\alpha}-\dfrac{(1+m'^2)\gamma}{(1-m'^2)\alpha}}$$

oder

$$\frac{(1-m^2)\alpha y+2m\beta x-(1+m^2)\alpha\beta}{(1-m^2)\alpha z-(1+m^2)\gamma x+2m\alpha\gamma}=-\frac{(m-m')(1+mm')\beta}{(m^2-m'^2)\gamma}.$$

Nimmt man nun m' unendlich wenig verschieden von m an, so wird an der Grenze $m'=m$ und hiermit der Ausdruck rechts in der vorigen Gleichung $=-\frac{1+m^2}{2m}\cdot\frac{\beta}{\gamma}$. Die Gleichung der Ebene, welche man durch die erste Erzeugende parallel der ihr benachbarten Erzeugenden legen kann, wird daher nach gehöriger Reduction:

$$4)\qquad (1-m^2)\beta\gamma x-2m\,\alpha\gamma y-(1+m^2)\,\alpha\beta z=0.$$

Diese Ebene geht somit durch den Mittelpunkt des Hyperboloids und berührt den asymptotischen Kegel, weil die beiden Geraden, welche man durch den Mittelpunkt parallel mit den zwei gegebenen Erzeugenden ziehen kann, benachbarte Erzeugende des asymptotischen Kegels sind, welche in dieser Ebene liegen. Diese Ebene ist somit eine asymptotische Ebene des Hyperboloids. — Nun steht die Linie des kürzesten Abstandes zweier Geraden senkrecht auf der Ebene, welche man durch die eine Gerade parallel mit der andern legen kann; daher hat die Gerade, welche man durch den Mittelpunkt des Hyperboloids parallel der Linie des kürzesten Abstandes unserer zwei benachbarten Erzeugenden ziehen kann, die Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} y=-\dfrac{2m\alpha}{(1-m^2)\beta}x, \\ z=-\dfrac{(1+m^2)\alpha}{(1-m^2)\gamma}x. \end{cases}$$

Eliminirt man m aus diesen zwei Gleichungen, so hat man den geometrischen Ort aller fraglichen Parallelen; man findet:

$$6)\qquad \alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2=0,$$

also einen elliptischen Kegel, dessen Spitze im Ursprung liegt.

Dieser Kegel und der asymptotische Kegel des Hyperboloids:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,$$

stehen in der Beziehung zu einander, dass die Erzeugenden des einen Kegels senkrecht stehen auf den Berührungsebenen des andern.

Die Linie des kürzesten Abstands der zwei benachbarten Erzeugenden des Hyperboloids selbst, welche parallel dem Durchmesser 5) ist, muss als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte des Hyperboloids zugleich Tangente des Hyperboloids sein, und zwar liegt der Berührungspunkt auf der dem Durchmesser 5) conjugirten Diametralebene, deren Gleichung ist:

$$7)\qquad \frac{x}{\alpha^2}-\frac{2m\alpha}{(1-m^2)\beta}\cdot\frac{y}{\beta^2}+\frac{(1+m^2)\alpha}{(1-m^2)\gamma}\cdot\frac{z}{\gamma^2}=0.$$

Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Erzeugenden des Hyperboloids 2) ist daher ein Punkt der gesuchten Strictionslinie.

Dieser Schnittpunkt hat die Coordinaten:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{2m(1+m^2)\,\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)}{(1-m^2)^2\beta^2\gamma^2+4m^2\alpha^2\gamma^2+(1+m^2)^2\alpha^2\beta^2},\\ y &= \frac{(1-m^4)\,\beta^3(\alpha^2+\gamma^2)}{(1-m^2)^2\beta^2\gamma^2+4m^2\alpha^2\gamma^2+(1+m^2)^2\alpha^2\beta^2},\\ z &= \frac{2m(1-m^2)\,\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)}{(1-m^2)^2\beta^2\gamma^2+4m^2\alpha^2\gamma^2+(1+m^2)^2\alpha^2\beta^2}. \end{aligned}\right.$$

Eliminirt man aus je zweien dieser drei Gleichungen das veränderliche m, so erhält man die Projectionsgleichungen der Strictionslinie. Nimmt man z. B. die erste und dritte der Gleichungen 8), so erhält man

$$\frac{x}{z}=\frac{(1+m^2)\,\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)}{(1-m^2)\,\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)},\ \text{d. h.}\ m^2=\frac{\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)x-\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)z}{\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)x+\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)z}$$

und

$$1+m^2=\frac{2\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)x}{\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)x+\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)z}$$

und

$$1-m^2=\frac{2\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)z}{\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)x+\alpha^3(\beta^2+\gamma^2)z}.$$

Substituirt man diese Werthe in die erste der drei Gleichungen und setzt der Kürze wegen $\alpha^2-\beta^2=f^2$ (wobei $\alpha>\beta$ vorausgesetzt ist) und $\beta^2+\gamma^2=g^2$, so erhält man als Projection der Strictionslinie auf die Ebene xz:

$$\text{A)}\quad \gamma^6 f^4 x^2(x^2-\alpha^2)+\alpha^6 g^4 z^2(z^2+\gamma^2)-2\alpha^4\gamma^4 f^2 g^2 x^2 z^2=0.$$

Die Discussion dieser Gleichung zeigt, dass die durch dieselbe dargestellte Curve symmetrisch gegen die Coordinatenaxen liegt, den Ursprung zum Mittelpunkt hat und durch den Ursprung geht. Die x-Axe schneidet die Curve zweimal im Ursprung und in den Punkten $x=\alpha$ und $x=-\alpha$; die z-Axe schneidet die Curve nur im Ursprung und zwar doppelt. Die Tangente im Ursprung heisst: $z=\pm\frac{f^2\gamma^3}{g^2\alpha^3}x$. Der Ursprung ist Doppelpunkt und Wendepunkt zugleich.

Löst man die Gleichung nach x auf, so erkennt man, dass eine Gerade parallel der x-Axe die Curve stets in vier Punkten schneidet, so lange ihr Abstand von der x-Axe absolut genommen kleiner als $\frac{f^2\gamma^3}{2g\alpha\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$ ist; hat die Gerade diesen Abstand von der x-Axe, so berührt sie die Curve in zwei Punkten; in noch grösseren Abständen schneidet sie dieselbe nicht mehr.

Ebenso zeigt die Auflösung der Gleichung nach z, dass eine Gerade parallel der z-Axe die Curve stets nur in zwei Punkten schneidet, so lange ihr Abstand von der z-Axe absolut genommen kleiner als α ist. Ist dieser Abstand $=\alpha$, so berührt die Gerade die Curve in $x=\pm\alpha$

und schneidet dieselbe noch in zwei Punkten, aber nur dann, wenn zwischen α, β, γ die Relation stattfindet $\beta^2 < \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2+2\gamma^2}$. Findet diese Relation statt, so schneidet eine Gerade parallel der z-Axe, deren Abstand von dieser Axe $> \alpha$ ist, die Curve in vier Punkten, bis der Abstand $= \frac{g^2\alpha^3}{2f\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$ geworden ist; in diesem Abstande berührt die Gerade die Curve in zwei Punkten und in noch grösseren Abständen hat sie keine Punkte mehr mit der Curve gemein.

Die Curve hat somit die in Fig. 1 oder Fig. 2 dargestellte Gestalt, je nachdem $\beta^2 \lessgtr \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2+2\gamma^2}$. Für den Fall $\beta^2 = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2+2\gamma^2}$ findet zwischen der Geraden $x = \pm \alpha$ und der Curve eine Berührung dritter Ordnung statt.

Im Fall eines Drehungshyperboloids ist $\beta = \alpha$ und die Gleichung A) giebt $z^2 = 0$, d. h. die Strictionslinie fällt mit dem Kehlkreis zusammen.

Um die Projection der Strictionslinie auf die Ebene xy zu erhalten, hätte man m aus den zwei ersten der drei Gleichungen 8) zu eliminiren. Bequemer aber ist es, statt dessen aus der Gleichung 1) des Hyperboloids und aus der Gleichung A) des projicirenden Cylinders der Strictionslinie z zu eliminiren. Man erhält so als Projection der Strictionslinie auf xy:

$$\text{B)}\quad \beta^8(\alpha^2+\gamma^2)^2 x^2(x^2-\alpha^2) + \alpha^8 g^4 y^2(y^2-\beta^2) + 2g^2\alpha^4\beta^4(\alpha^2+\gamma^2)x^2y^2 = 0.$$

Diese Curve vierten Grades hat den Coordinatenursprung als isolirten Punkt; im Uebrigen liegt die Curve symmetrisch gegen die Coordinatenaxen und wird von diesen resp. in $x = \pm \alpha$ und in $y = \pm \beta$ geschnitten.

Löst man die Gleichung nach x auf, so erkennt man, dass eine Gerade parallel der x-Axe die Curve stets in zwei und nur in zwei Punkten schneidet, so lange ihr Abstand von der x-Axe kleiner als β ist; im Abstande β von der x-Axe berührt die Gerade die Curve auf der y-Axe und in noch grösseren Abständen hat sie keine Punkte mit der Curve mehr gemein.

Ebenso zeigt die Auflösung der Gleichung nach y, dass eine Gerade parallel der y-Axe die Curve nur in zwei Punkten schneidet, so lange ihr Abstand von der y-Axe kleiner als α ist. Im Abstande α berührt die Gerade die Curve auf der x-Axe und schneidet sie noch in zwei Punkten, aber nur, wenn zwischen α, β, γ wieder die Relation besteht $\beta^2 < \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2+2\gamma^2}$. Für Abstände zwischen α und $\frac{g^2\alpha^3}{2f\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$ schneidet die Gerade die Curve in vier Punkten, welche sich für den zuletzt genannten Abstand auf zwei Berührungspunkte reduciren. Für noch grössere Abstände finden keine gemeinsamen Punkte mehr statt. Im Falle, dass

$\beta^2 = \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\alpha^2 + 2\gamma^2}$, berühren die Geraden $x = \pm \alpha$ die Curve in der dritten Ordnung.

Im Falle $\beta^2 < \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\alpha^2 + 2\gamma^2}$ hat die Curve die aus Fig. 3 ersichtliche Gestalt, andernfalls ist sie ein die Kehlellipse in ihren vier Scheiteln berührendes Oval ohne Einbiegung.

Endlich im Fall des Drehungshyperboloids, wo $\beta = \alpha$ und $g^2 = \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \gamma^2$, reducirt sich die Gleichung B) auf $x^2 + y^2 = \alpha^2$, d. h. die Strictionslinie fällt mit dem Kehlkreis zusammen. —

Ganz auf dieselbe Weise findet man die Projection der Strictionslinie auf die Ebene yz. Man erhält:

C) $\gamma^8 f^4 y^2 (y^2 - \beta^2) + \beta^8 (\alpha^2 + \gamma^2)^2 z^2 (z^2 + \gamma^2) + 2\beta^4 \gamma^4 f^2 (\alpha^2 + \gamma^2) y^2 z^2 = 0.$

Die Discussion dieser Gleichung zeigt, dass die durch sie dargestellte Curve stets die Gestalt der Fig. 2 hat, wobei der Ursprung Doppel- und Wendepunkt zugleich ist.

Für das Drehungshyperboloid, wo $\beta = \alpha$, ist $f^2 = 0$, und die Gleichung C) reducirt sich daher auf $z^2 = 0$, d. h. die Strictionslinie fällt mit dem Kehlkreis zusammen.

Es bleibt noch übrig, zu zeigen, wie die Strictionslinie selbst auf dem Hyperboloid liegt.

Nach dem Obigen sind die Gleichungen einer Erzeugenden der einen Schaar des Hyperboloids:

$$y = -\frac{2m\beta}{(1-m^2)\alpha} \cdot x + \frac{1+m^2}{1-m^2} \cdot \beta,$$
$$z = \frac{(1+m^2)\gamma}{(1-m^2)\alpha} \cdot x - \frac{2m}{1-m^2} \cdot \gamma,$$

wo m ein beliebiger Zahlencoefficient zwischen $+\infty$ und $-\infty$ ist. Die Coefficienten von x in den vorstehenden Gleichungen sind nun die trigonometrischen Tangenten der Winkel φ und ψ, welche die Projectionen der Erzeugenden auf xy und xz mit der positiven Richtung der x-Axe bilden. Nimmt man nun zunächst m zwischen 0 und $+1$, so sieht man, dass $tang\,\varphi$ negativ und $tang\,\psi$ positiv ist, dass also die Erzeugende MN in der Projection auf xy die Kehlellipse im ersten Quadranten berührt. (Siehe Fig. 4.) Die Coordinaten des Punktes, in welchem MN von der Strictionslinie getroffen wird, sind aber in diesem Falle, wie die Gleichungen 8) zeigen, sämmtlich positiv. Ganz auf dieselbe Weise erkennt man aber, dass, wenn m zwischen $+1$ und $+\infty$ liegt, die Projection der Geraden auf xy die Kehlellipse in dem Quadranten $+x$, $-y$ berührt und die z-Coordinate des Schnittpunktes mit der Strictionslinie negativ ist. Liegt m zwischen $-\infty$ und -1, so findet die Berührung der Kehlellipse in dem Quadranten $-x$, $-y$ statt und die z-Coordinate des fraglichen Punktes ist positiv. Endlich für Werthe von m zwischen -1 und

0 wird die Kehlellipse in dem Quadranten $-x$, $+y$ berührt und die Punkte der Strictionslinie haben ein negatives z. Die Strictionslinie liegt also so auf dem Hyperboloid, wie in den Figuren 1—3 durch verschiedenartiges Ausziehen der sichtbaren und verdeckten Theile angedeutet ist, und hat mit der Kehlellipse die vier Scheitelpunkte gemein.

II. Es sei gegeben das hyperbolische Paraboloid:

$$1)\qquad \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{x}{\alpha}.$$

Die Ebene yz schneidet das Paraboloid nach den zwei Geraden:

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 0,\\ z &= \pm\frac{\gamma}{\beta}y.\end{aligned}\right.$$

Jede Ebene, welche der durch die x-Axe und eine der Geraden 2) gelegten Ebene parallel ist, schneidet das Paraboloid nach einer Geraden, und so ergeben sich die zwei Schaaren von Erzeugenden auf dem Paraboloid, die Geraden der einen Schaar sind parallel der Ebene $z=\frac{\gamma}{\beta}\cdot y$, die der andern Schaar parallel der Ebene $z=-\frac{\gamma}{\beta}\cdot y$. Die Linie des kürzesten Abstandes je zweier benachbarten Erzeugenden der ersten Schaar steht somit senkrecht auf der Ebene $z=\frac{\gamma}{y}\cdot y$ und die Gesammtheit aller dieser Linien bildet somit eine Cylinderfläche, welche dem Paraboloid berührend umschrieben ist, weil jede solche Linie als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte des Paraboloids zugleich eine Tangente desselben ist.

Irgend eine Gerade senkrecht zu der Ebene $z=\frac{\gamma}{\beta}\cdot y$ hat die Gleichung:

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= p,\\ z &= -\frac{\beta}{\gamma}y+q,\end{aligned}\right.$$

und berührt das Paraboloid, wenn die zwei Wurzelwerthe der Gleichung:

$$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{(\gamma q-\beta y)^2}{\gamma^2}=\frac{p}{\alpha}$$

einander gleich sind, d. h. wenn:

$$4)\qquad \alpha\gamma^2q^2+(\gamma^4-\beta^4)p=0.$$

Eliminirt man aus den zwei Gleichungen 3) und der Gleichung 4) die Veränderlichen p und q, so hat man den geometrischen Ort der Linien des kürzesten Abstandes der benachbarten Erzeugenden des Paraboloids oder die Gleichung der vorhin genannten Cylinderfläche. Man erhält:

$$5)\qquad (\beta y + \gamma z)^2 = (\beta^4 - \gamma^4)\frac{x}{\alpha}.$$

Eliminirt man x aus 5) und 1), so erhält man die Projection der Curve, nach welcher die Cylinderfläche das Paraboloid berührt, auf die Ebene yz, d. h. die Projection der Strictionslinie auf die Ebene yz. Man erhält:

$$(\beta y + \gamma z)^2 = (\beta^4 - \gamma^4)\left(\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}\right)$$

oder:

$$6)\qquad z = -\frac{\gamma^3}{\beta^3}y.$$

Die Strictionslinie der Erzeugenden der ersten Schaar projicirt sich also auf die Ebene yz als Gerade.

Eliminirt man z aus 6) und 1), so erhält man die Projection der Strictionslinie auf xy:

$$7)\qquad y^2 = \frac{\beta^6}{\beta^4 - \gamma^4}\cdot\frac{x}{\alpha},$$

somit eine Parabel, deren Axe die positive oder negative Richtung der x-Axe hat, je nachdem $\beta \gtrless \gamma$.

Ganz auf dieselbe Weise hätte man als Gleichungen der Strictionslinie der Erzeugenden der zweiten Schaar gefunden:

$$z = \frac{\gamma^3}{\beta^3}y,$$

$$y^2 = \frac{\beta^6}{\beta^4 - \gamma^4}\cdot\frac{x}{\alpha}.$$

Die Strictionslinien der beiden Schaaren von Erzeugenden sind somit Parabeln, deren gemeinsame Axe mit der x-Axe zusammenfällt und deren Ebenen gleiche Winkel mit der Ebene xy bilden.

Für den besondern Fall des gleichseitigen Paraboloids, wo $\beta = \gamma$, werden die Gleichungen der Strictionslinien beider Schaaren:

$$z = \pm y,$$

$$x = 0.$$

Die Strictionslinien fallen also hier zusammen mit den beiden in yz liegenden Erzeugenden des Paraboloids.

XVII.

Der einem Dreieck umschriebene Kegelschnitt kleinsten Inhalts.

Von

MAX GREINER,

Reallehrer in Regensburg.

Hierzu Taf. VI Fig. 5 u. 6.

Sind die Seiten eines Dreiecks durch die Gleichungen:

$$A \equiv x \cos \varepsilon_1 + y \sin \varepsilon_1 - \delta_1 = 0,$$
$$B \equiv x \cos \varepsilon_2 + y \sin \varepsilon_2 - \delta_2 = 0,$$
$$C \equiv x \cos \varepsilon_3 + y \sin \varepsilon_3 - \delta_3 = 0$$

gegeben, so wird durch die Gleichung:

$$\alpha B C + \beta A C + \gamma A B = 0$$

ein beliebiger dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt dargestellt.

Denkt man sich diese Gleichung durch Einführung der Ausdrücke für A, B und C auf die Form gebracht:

$$a_{00} x^2 + a_{11} y^2 + 2 a_{01} x y + 2 a_{02} x + 2 a_{12} y + a_{22} = 0$$

und setzt man:

$$\begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01} \\ a_{10}, & a_{11} \end{vmatrix} = \delta, \quad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta,$$

so hat man für die Längen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Halbaxen des Kegelschnittes die Beziehungen:

$$1) \qquad \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}, \quad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = -\frac{(a_{00} + a_{11}) \Delta}{\delta^2} *.$$

Nun sind aber:

$$a_{00} = \alpha \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 + \beta \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_3 + \gamma \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2,$$
$$a_{11} = \alpha \sin \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 + \beta \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_3 + \gamma \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2,$$
$$a_{22} = \alpha \delta_2 \delta_3 + \beta \delta_1 \delta_3 + \gamma \delta_1 \delta_2,$$

* Die Ableitungen dieser Formeln finden sich in Grunert's Archiv f. Math. u. Physik 57. Theil, XXII, „Der Transformationsfactor“.

$$2a_{01} = \alpha(\cos\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_3 \sin\varepsilon_2) + \beta(\cos\varepsilon_3 \sin\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_3) + \gamma(\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 + \cos\varepsilon_2 \sin\varepsilon_1),$$

$$2a_{02} = -\alpha(\delta_3 \cos\varepsilon_2 + \delta_2 \cos\varepsilon_3) - \beta(\delta_3 \cos\varepsilon_1 + \delta_1 \cos\varepsilon_3) - \gamma(\delta_1 \cos\varepsilon_2 + \delta_2 \cos\varepsilon_1),$$

$$2a_{12} = -\alpha(\delta_3 \sin\varepsilon_2 + \delta_2 \sin\varepsilon_3) - \beta(\delta_3 \sin\varepsilon_1 + \delta_1 \sin\varepsilon_3) - \gamma(\delta_1 \sin\varepsilon_2 + \delta_2 \sin\varepsilon_1).$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{array}{lll} \beta\cos\varepsilon_3 + \gamma\cos\varepsilon_2 = u_1, & \beta\sin\varepsilon_3 + \gamma\sin\varepsilon_2 = v_1, & \beta\delta_3 + \gamma\delta_2 = w_1, \\ \gamma\cos\varepsilon_1 + \alpha\cos\varepsilon_3 = u_2, & \gamma\sin\varepsilon_1 + \alpha\sin\varepsilon_3 = v_2, & \gamma\delta_1 + \alpha\delta_3 = w_2, \\ \alpha\cos\varepsilon_2 + \beta\cos\varepsilon_1 = u_3, & \alpha\sin\varepsilon_2 + \beta\sin\varepsilon_1 = v_3, & \alpha\delta_2 + \beta\delta_1 = w_3, \end{array}$$

dann hat man:

$$\begin{array}{ll} 2a_{00} = u_1\cos\varepsilon_1 + u_2\cos\varepsilon_2 + u_3\cos\varepsilon_3 = \Sigma u\cos\varepsilon, & 2a_{01} = \Sigma u\sin\varepsilon = \Sigma v\cos\varepsilon, \\ 2a_{11} = v_1\sin\varepsilon_1 + v_2\sin\varepsilon_2 + v_3\sin\varepsilon_3 = \Sigma v\sin\varepsilon, & 2a_{02} = -\Sigma u\delta = -\Sigma w\cos\varepsilon, \\ 2a_{22} = w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + w_3\delta_3 = \Sigma w\delta, & 2a_{12} = -\Sigma v\delta = -\Sigma w\sin\varepsilon. \end{array}$$

Daher ist nun:

$$8\Delta = \begin{vmatrix} 2a_{00}, & 2a_{01}, & 2a_{02} \\ 2a_{10}, & 2a_{11}, & 2a_{12} \\ 2a_{20}, & 2a_{21}, & 2a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma u\cos\varepsilon, & \Sigma v\cos\varepsilon, & -\Sigma w\cos\varepsilon \\ \Sigma u\sin\varepsilon, & \Sigma v\sin\varepsilon, & -\Sigma w\sin\varepsilon \\ -\Sigma u\delta, & -\Sigma v\delta, & \Sigma w\delta \end{vmatrix}$$

oder

$$8\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varepsilon_1, & \cos\varepsilon_2, & \cos\varepsilon_3 \\ \sin\varepsilon_1, & \sin\varepsilon_2, & \sin\varepsilon_3 \\ -\delta_1, & -\delta_2, & -\delta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ -w_1, & -w_2, & -w_3 \end{vmatrix}.$$

Weil aber die Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varepsilon_1, & \cos\varepsilon_2, & \cos\varepsilon_3 \\ \sin\varepsilon_1, & \sin\varepsilon_2, & \sin\varepsilon_3 \\ \delta_1, & \delta_2, & \delta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \gamma, & \beta \\ \gamma, & 0, & \alpha \\ \beta, & \alpha, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} \cos\varepsilon_1, & \cos\varepsilon_2, & \cos\varepsilon_3 \\ \sin\varepsilon_1, & \sin\varepsilon_2, & \sin\varepsilon_3 \\ \delta_1, & \delta_2, & \delta_3 \end{vmatrix},$$

so erhält man, wenn die letzte Determinante mit D bezeichnet wird:

$$2) \qquad \Delta = \tfrac{1}{4}\alpha\beta\gamma D^2.$$

Ferner ist:

$$4\delta = 4a_{00}a_{11} - 4a_{01}{}^2 = 4(\alpha\cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_3 + \beta\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3 + \gamma\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2) \times (\alpha\sin\varepsilon_2\sin\varepsilon_3 + \beta\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_3 + \gamma\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2) - (\alpha\sin(\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \beta\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_3) + \gamma\sin(\varepsilon_1+\varepsilon_2))^2,$$

$$4\delta = -\alpha^2\sin^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3) - \beta^2\sin^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1) - \gamma^2\sin^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 2\beta\gamma\sin(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 2\alpha\gamma\sin(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 2\alpha\beta\sin(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sin(\varepsilon_3-\varepsilon_1).$$

Bezeichnet man mit ω_1, ω_2, ω_3 die den Seiten A, B, C gegenüberliegenden Winkel, mit s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten und mit J den Inhalt des Fundamentaldreiecks, so ist auch:

$$\delta = \tfrac{1}{4}(-\alpha^2 \sin^2\omega_1 - \beta^2 \sin^2\omega_2 - \gamma^2 \sin^2\omega_3 + 2\beta\gamma \sin\omega_2 \sin\omega_3 + 2\alpha\gamma \sin\omega_1 \sin\omega_3 + 2\alpha\beta \sin\omega_1 \sin\omega_2)$$

oder:

$$3)\quad \delta = \frac{J^2}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}(-\alpha^2 s_1^2 - \beta_2 s_2^2 - \gamma^2 s_3^2 + 2\beta\gamma\, s_2 s_3 + 2\alpha\gamma\, s_1 s_3 + 2\alpha\beta\, s_1 s_2).$$

Wären x_1, y_1; x_2, y_2 und x_3, y_3 die rechtwinkligen Coordinaten der Eckpunkte des Fundamentaldreiecks, so hätte man für den Inhalt J desselben:

$$J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ erhält man aber:

$$x_1 = \frac{\delta_3 \sin\varepsilon_2 - \delta_2 \sin\varepsilon_3}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)},\quad x_2 = \frac{\delta_1 \sin\varepsilon_3 - \delta_3 \sin\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)},\quad x_3 = \frac{\delta_2 \sin\varepsilon_1 - \delta_1 \sin\varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)};$$

$$y_1 = \frac{\delta_2 \cos\varepsilon_3 - \delta_3 \cos\varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)},\quad y_2 = \frac{\delta_3 \cos\varepsilon_1 - \delta_1 \cos\varepsilon_3}{\sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)},\quad y_3 = \frac{\delta_1 \cos\varepsilon_2 - \delta_2 \cos\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

und daher ist:

$$2J \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_3 \sin\varepsilon_2 - \delta_2 \sin\varepsilon_3, & \delta_2 \cos\varepsilon_3 - \delta_3 \cos\varepsilon_2, & \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \delta_1 \sin\varepsilon_3 - \delta_3 \sin\varepsilon_1, & \delta_3 \cos\varepsilon_1 - \delta_1 \cos\varepsilon_3, & \sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \\ \delta_2 \sin\varepsilon_1 - \delta_1 \sin\varepsilon_2, & \delta_1 \cos\varepsilon_2 - \delta_2 \cos\varepsilon_1, & \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{vmatrix}.$$

Die Elemente dieser Determinante sind aber gerade die Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente der Determinante D, weshalb:

$$2J \sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3 = D^2$$

und hieraus:

$$4)\quad D = \frac{4J^2}{s_1 s_2 s_3}.$$

Aus 2) und 3) ergeben sich daher mit Rücksicht auf 1) für die Halbaxen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eines beliebigen dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes die Beziehungen:

$$5)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 &= \frac{(4J\,\alpha\beta\gamma\, s_1 s_2 s_3)^2}{(-\alpha^2 s_1^2 - \beta^2 s_2^2 - \gamma_2 s_3^2 + 2\beta\gamma\, s_2 s_3 + 2\alpha\gamma\, s_1 s_3 + 2\alpha\beta\, s_1 s_2)^3}, \\ \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 &= \frac{4\alpha\beta\gamma\, s_1^2 s_2^2 s_3^2(\alpha\cos\omega_1 + \beta\cos\omega_2 + \gamma\cos\omega_3)}{(-\alpha^2 s_1^2 - \beta^2 s_2^2 - \gamma^2 s_3^2 + 2\beta\gamma\, s_2 s_3 + 2\alpha\gamma\, s_1 s_3 + 2\alpha\beta\, s_1 s_2)^2}. \end{aligned}$$

Der durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\pi$ ausgedrückte Inhalt des Kegelschnittes wird aber ein Minimum, wenn man die als variabel zu betrachtenden Grössen α, β und γ so bestimmt, dass der Ausdruck für $\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2$ den kleinsten Werth erhält. Bezeichnet man diesen von den constanten Factoren befreiten Ausdruck mit U, so hat man:

$$U(-\alpha^2 s_1^2 - \beta^2 s_2^2 - \gamma^2 s_3^2 + 2\beta\gamma\, s_2 s_3 + 2\alpha\gamma\, s_1 s_3 + 2\alpha\beta\, s_1 s_2)^3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2$$

oder der Kürze halber:

$$UN^3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} N^3 + 3UN^2(-2\alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + 2\gamma s_1 s_3) = 2\alpha\beta^2\gamma^2,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \beta} N^3 + 3UN^2(-2\beta s_2^2 + 2\gamma s_2 s_3 + 2\alpha s_1 s_2) = 2\alpha^2\beta\gamma^2,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} N^3 + 3UN^2(-2\gamma s_3^2 + 2\beta s_2 s_3 + 2\alpha s_1 s_3) = 2\alpha^2\beta^2\gamma.$$

Da nun $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = 0$ zu setzen sind, so folgt, wenn man für $\frac{\alpha\beta\gamma}{3UN^2}$ die Grösse λ setzt:

$$-\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3 = \frac{\beta\gamma\lambda}{s_1}, \quad \alpha s_1 - \beta s_2 + \gamma s_3 = \frac{\alpha\gamma\lambda}{s_2}, \quad \alpha s_1 + \beta s_2 - \gamma s_3 = \frac{\alpha\beta\lambda}{s_3}.$$

Addirt man je zwei dieser Gleichungen und setzt $\frac{2 s_1 s_2 s_3}{\lambda} = \mu$, so erhält man:

$$\alpha s_1 + \beta s_2 = \mu, \quad \beta s_2 + \gamma s_3 = \mu, \quad \alpha s_1 + \gamma s_3 = \mu$$

und hieraus:

$$\alpha = \frac{\mu}{2 s_1}, \quad \beta = \frac{\mu}{2 s_2}, \quad \gamma = \frac{\mu}{2 s_3}.$$

Die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes wird daher:

$$6) \qquad K \equiv BC s_2 s_3 + AC s_1 s_3 + AB s_1 s_2 = 0.$$

Die gefundenen Werthe für α, β und γ können den Ausdruck U und somit auch den Inhalt des Kegelschnittes nur zu einem Minimum machen, da der Inhalt des grössten Kegelschnittes, der dem Dreieck umschrieben werden kann, offenbar selbst unendlich gross ist.

Der Schwerpunkt S des Fundamentaldreiecks hat die Coordinaten $\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}$ und die ihm entsprechende Dreieckspolare oder Harmonikale des Dreiecks ist die unendlich ferne Gerade und hat die Gleichung:

$$A s_1 + B s_2 + C s_3 = 0.$$

Der Pol dieser Geraden bezüglich des Kegelschnittes K ist der Mittelpunkt desselben, für dessen Coordinaten A_0, B_0, C_0 man aus den Gleichungen:

$$s_1(B_0 s_2 + C_0 s_3) = \varkappa s_1, \quad s_2(A_0 s_1 + C_0 s_3) = \varkappa s_2, \quad s_3(A_0 s_1 + B_0 s_2) = \varkappa s_3$$

die Beziehung:

$$A_0 : B_0 : C_0 = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3}$$

erhält, woraus man erkennt, dass der Mittelpunkt von K mit dem Schwerpunkte S des Dreiecks zusammenfällt. Die im Eckpunkte (B, C) des Dreiecks an K gezogene Tangente hat die Gleichung $B s_2 + C s_3 = 0$ und ist daher bezüglich der Seiten B und C harmonisch conjugirt zu der Verbindungslinie der Ecke (B, C) mit dem Schwerpunkte S, deren Gleichung $B s_2 - C s_3 = 0$ ist, woraus hervorgeht, dass die genannte Tangente zur Seite A des Dreiecks parallel ist.

Betrachtet man ferner das Dreieck als eine specielle Curve dritter Ordnung ($A.B.C=0$), so stellt $K=0$ die Gleichung der dem Schwerpunkt entsprechenden konischen Polare derselben vor; es ergiebt sich daher:

7) Der einem Dreieck umschriebene Kegelschnitt K kleinsten Inhalts ist die dem Dreieckschwerpunkte entsprechende konische Polare bezüglich des Dreiecks; die Tangenten dieses Kegelschnittes in den Eckpunkten des Dreiecks sind zu den gegenüberliegenden Seiten parallel und der Mittelpunkt dieses Dreiecks fällt mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammen.

Durch Umkehrung dieses Satzes folgt:

8) Das grösste einer Ellipse einbeschriebene Dreieck ist so beschaffen, dass die Tangenten der Ellipse in den Ecken des Dreiecks parallel zu den Gegenseiten sind und dass der Schwerpunkt des Dreiecks mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt.

Setzt man in den Gleichungen 5) $\alpha=s_2 s_3$, $\beta=s_1 s_3$, $\gamma=s_1 s_2$, so erhält man für die Längen der Halbaxen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Kegelschnittes K die Beziehungen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\frac{4J}{3\sqrt{3}},$$

9) $\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2=\frac{4}{9}(s_2 s_3 \cos\omega_1+s_1 s_3 \cos\omega_2+s_1 s_2 \cos\omega_3)=\frac{2}{9}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)$.

Denkt man sich das gegebene Dreieck in ein inhaltsgleiches gleichseitiges Dreieck verwandelt, dessen Umkreisradius ϱ sei, so ist sein Inhalt: $J=\frac{3}{4}\varrho^2\sqrt{3}$ und daher der Inhalt des Kegelschnittes K:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\pi=\varrho^2\pi,$$

d. h.:

10) Der Inhalt des einem Dreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes ist gleich der Fläche des Kreises, der demjenigen gleichseitigen Dreieck umschrieben werden kann, das mit dem gegebenen Dreieck gleichen Inhalt hat.

Eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft des Kegelschnittes K, welche sich auf die Krümmungskreise desselben in den Eckpunkten des Dreiecks bezieht, ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Da der Umkreis des Dreiecks und die unendlich ferne Gerade die Gleichungen:

$$BCs_1+ACs_2+ABs_3=0 \quad \text{und} \quad As_1+Bs_2+Cs_3=0$$

besitzen, so kann jeder beliebige Kreis durch die Gleichung:

$$BCs_1+ACs_2+ABs_3+(As_1+Bs_2+Cs_3)(A\lambda_1+B\lambda_2+C\lambda_3)=0,$$

in welcher noch die willkürlichen Grössen λ_1, λ_2, λ_3 enthalten sind, dargestellt werden. Soll dieser Kreis den Kegelschnitt K in der Ecke a des

Dreiecks, worin sich die Seiten B und C schneiden, berühren, so muss $\lambda_1 = 0$ sein und die Tangente von K im Punkte a, deren Gleichung $T_1 \equiv Bs_2 + Cs_3 = 0$ ist, muss mit der durch die Gleichung $B(s_3 + \lambda_2 s_1) + C(s_2 + \lambda_3 s_1) = 0$ dargestellten Kreistangente des Punktes a zusammenfallen, weshalb man erhält:

$$s_3 + \lambda_2 s_1 = \varkappa s_2, \quad s_2 + \lambda_3 s_1 = \varkappa s_3.$$

Der den Kegelschnitt K im Punkte a berührende Kreis hat also die Gleichung:

$$L_1 \equiv BC(-s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + (B^2 + C^2)s_2 s_3 - \varkappa(As_1 + Bs_2 + Cs_3)(Bs_2 + Cs_3) = 0.$$

Dieser Kreis L_1 und der Kegelschnitt K treffen sich also in dem doppelt zu zählenden Berührungspunkte a und ausserdem in noch zwei Punkten, deren Verbindungslinie etwa die Gleichung $\mathfrak{S}_1 \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ habe, so dass dann die Gleichung besteht:

$$L_1 - \mu K \equiv \mathfrak{S}_1 T_1 \equiv (\alpha A + \beta B + \gamma C)(Bs_2 + Cs_3) = 0$$

und hieraus folgen die Beziehungen:

$$s_3 - \varkappa s_2 = \beta, \quad s_2 - \varkappa s_3 = \gamma, \quad \varkappa s_1 + \mu s_1 = -\alpha,$$
$$-s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2\varkappa s_2 s_3 - \mu s_2 s_3 = \beta s_3 + \gamma s_2;$$

daher wird:

$$\mathfrak{S}_1 \equiv s_1^3 A + s_2 s_3(Bs_3 + Cs_2) - \varkappa s_2 s_3(As_1 + Bs_2 + Cs_3) = 0.$$

Die Gleichung des Kreises L_1 enthält noch eine willkürliche Grösse $\varkappa$, durch deren Abänderung man alle Kreise erhält, die K in a berühren und ihn ferner noch in zwei Punkten treffen, deren Verbindungslinie $\mathfrak{S}_1$, wie aus obiger Gleichung hervorgeht, stets dieselbe Richtung beibehält. Bestimmt man nun die Grösse $\varkappa$ so, dass $\mathfrak{S}_1$ selbst durch den Punkt a geht, was dann der Fall ist, wenn $s_1^3 - \varkappa s_1 s_2 s_3 = 0$, also $\varkappa = \frac{s_1^2}{s_2 s_3}$ ist, so fallen von den vier Schnittpunkten von K mit L_1 drei im Punkte a zusammen und L_1 wird sodann der Krümmungskreis im Punkte a. Die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte K und L_1 hat dann die Gleichung:

$$\mathfrak{S}_1 \equiv Bs_2(s_3^2 - s_1^2) - Cs_3(s_1^2 - s_2^2) = 0.$$

Ebenso findet man für die gemeinschaftlichen Sehnen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ des Kegelschnittes K und seiner Krümmungskreise in den beiden anderen Ecken b und c des Dreiecks die Gleichungen:

$$\mathfrak{S}_2 \equiv Cs_3(s_1^2 - s_2^2) - As_1(s_2^2 - s_3^2) = 0,$$
$$\mathfrak{S}_3 \equiv As_1(s_2^2 - s_3^2) - Bs_2(s_3^2 - s_1^2) = 0$$

und man erkennt somit, dass sich $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ in demselben Punkte p schneiden, dessen Coordinaten sind: $\frac{1}{s_1(s_2^2 - s_3^2)}$, $\frac{1}{s_2(s_3^2 - s_1^2)}$, $\frac{1}{s_3(s_1^2 - s_2^2)}$.

Die Dreieckspolare dieses Punktes p, welche die Gleichung:

$$A s_1 (s_2^2 - s_3^2) + B s_2 (s_3^2 - s_1^2) + C s_3 (s_1^2 - s_2^2) = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ \frac{1}{s_1}, & \frac{1}{s_2}, & \frac{1}{s_3} \end{vmatrix} = 0$$

hat, ist, wie hieraus ersichtlich, die Verbindungslinie des Schwerpunktes $S \equiv \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}$ mit dem Grebe'schen Punkte $\mathfrak{G} \equiv s_1, s_2, s_3$, weshalb der Punkt p der vierte Schnittpunkt der konischen Polaren beider Punkte S und $\mathfrak{G}$ bezüglich des Dreiecks, d. h. der vierte Schnittpunkt von K mit dem Umkreise des Dreiecks ist; daher hat man:

11) Die drei Krümmungskreise des Kegelschnittes K in den Eckpunkten des Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte p, welcher der vierte Schnittpunkt des Kegelschnittes K mit dem Umkreise des Dreiecks ist.

Bestimmt man daher den vierten Schnittpunkt p von K mit dem Umkreise des Dreiecks und construirt denjenigen Kreis, der durch p und die Ecke a geht und dessen Mittelpunkt auf der durch a gehenden Höhe des Dreiecks liegt, so ist dies der gesuchte Krümmungskreis im Punkte a.

Der Radius ϱ_1 dieses Kreises wird bekanntlich auf folgende Weise erhalten.

Die Polare qn (Fig. 5) des Punktes a bezüglich des dem Kegelschnitte K zukommenden orthoptischen Kreises schneidet auf der Kegelschnittsnormale des Punktes a, die in diesem Falle mit der Höhe $af_1 = h_1$ des Dreiecks zusammenfällt, eine Strecke $\overline{ae} = \varrho_1$ aus; nun verhält sich:

$$\overline{na} : \varrho_1 = \overline{af_1} : \overline{am_1}.$$

Der Radius R des orthoptischen Kreises für den Kegelschnitt K ist aber:

$$R = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}$$

und da aus dem rechtwinkligen Dreieck Sdn

$$R^2 = \overline{Sa}(\overline{Sa} + \overline{an}) = \tfrac{2}{3}\overline{am_1}(\tfrac{2}{3}\overline{am_1} + \overline{an}),$$

so ist:

$$R^2 = \tfrac{4}{9}\overline{am_1}^2 + \tfrac{2}{3}\varrho_1 h_1 \quad \text{oder} \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2\,\overline{am_1}^2 + 3\varrho_1 h_1;$$

weil aber $2\overline{am_1}^2 = s_2^2 + s_3^2 - \frac{1}{2}s_1^2$, so ist:

$$\varrho_1 = \frac{s_1^2}{2h_1}.$$

Sind also h_1, h_2, h_3 die den Seiten s_1, s_2, s_3 entsprechenden Höhen des Dreiecks, so folgt:

Die Radien der Krümmungskreise des Kegelschnittes K in den Ecken a, b, c des Dreiecks haben die Längen:

12) $$\varrho_1 = \frac{s_1^2}{2h_1}, \quad \varrho_2 = \frac{s_2^2}{2h_2}, \quad \varrho_3 = \frac{s_3^2}{2h_3}.$$

Hieraus folgt noch:

13) **Die Krümmungsradien des Kegelschnittes K für die Punkte a, b und c verhalten sich wie die Kuben der entsprechenden Dreiecksseiten.**

Errichtet man über den Seiten bc, ac, ab des Dreiecks nach Aussen gleichseitige Dreiecke und bezeichnet die Mittelpunkte derselben mit a_0, b_0, c_0, so schneiden sich die von diesen Punkten a_0, b_0 und c_0 auf die Seiten bc, ac und ab errichteten Lothe im Mittelpunkte M des dem Dreieck umschriebenen Kreises, welcher von den Seiten des Dreiecks abc die Abstände:

$$p_1 = r \cos \omega_1, \quad p_2 = r \cos \omega_2, \quad p_3 = r \cos \omega_3$$

besitzt, wobei r den Radius des Umkreises bedeutet.

Aus dem Dreieck $b_0 c_0 M$ (Fig. 6) ergiebt sich sodann:

$$\overline{b_0 c_0}^2 = \overline{b_0 M}^2 + \overline{c_0 M}^2 + 2 \overline{b_0 M} . \overline{c_0 M} \cos \omega_1,$$

daher:

$$b_0 M = \tfrac{1}{6} s_2 \sqrt{3} + p_2, \quad c_0 M = \tfrac{1}{6} s_3 \sqrt{3} + p_3,$$

$$\overline{b_0 c_0}^2 = \tfrac{1}{12}(s_2^2 + s_3^2 + 2 s_2 s_3 \cos\omega_1) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}(s_2 p_2 + s_3 p_3 + s_2 p_3 \cos\omega_1 + s_3 p_2 \cos\omega_1)$$
$$+ (p_2^2 + p_3^2 + 2 p_2 p_3 \cos \omega_1),$$

$$\overline{b_0 c_0}^2 = \tfrac{1}{12}(2s_2^2 + 2s_3^2 - s_1^2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,[s_2 p_2 + s_3 p_3 + r \cos \omega_1 (s_2 \cos \omega_3 + s_3 \cos \omega_2)]$$
$$+ \overline{b'c'}^2,$$

$$\overline{b_0 c_0}^2 = \tfrac{1}{12}(2 s_2^2 + 2 s_3^2 - s_1^2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,[s_2 p_2 + s_3 p_3 + s_1 p_1] + \tfrac{1}{4} s_1^2,$$

$$\overline{b_0 c_0}^2 = \tfrac{1}{6}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \tfrac{2}{3} J \sqrt{3}.$$

Sestzt man $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \Sigma$, so ist:

$$b_0 c_0 = \sqrt{\frac{\Sigma + 4J\sqrt{3}}{6}}.$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich auch für die Seiten $a_0 c_0$ und $a_0 b_0$, und man erkennt daher, dass das Dreieck $a_0 b_0 c_0$ gleichseitig ist.

Aus dem Dreieck $S a_0 a'$ folgt:

$$\overline{S a_0}^2 = \overline{S a'}^2 + \overline{a_0 a'}^2 + 2 \overline{S a'} . \overline{a_0 a'} . \cos (S a' M).$$

Der Winkel $S a' M$ ist aber gleich dem Winkel zwischen $a a'$ und der Höhe h_1 des Dreiecks; daher ist $\cos(S a' M) = \frac{h_1}{a a'}$, und ferner ist:

$$S a' = \tfrac{1}{3} a a', \quad a_0 a' = \tfrac{1}{6} s_1 \sqrt{3}, \quad \overline{a a'}^2 = \tfrac{1}{4}(2 s_2^2 + 2 s_3^2 - s_1^2),$$

somit folgt für: $\overline{S a_0}^2 = \frac{1}{36}(2 s_2^2 + 2 s_3^2 - s_1^2) + \frac{1}{12} s_1^2 + \frac{1}{9} s_1 h_1 \sqrt{3} = \frac{1}{18} \Sigma + \frac{2}{9} J \sqrt{3}$:

$$S a_0 = \tfrac{1}{6} \sqrt{2 \Sigma + 8 J \sqrt{3}}.$$

Auf ähnliche Weise würde man finden:

$$S b_0 = S c_0 = \tfrac{1}{6} \sqrt{2 \Sigma + 8 J \sqrt{3}}.$$

Errichtet man über den Seiten bc, ac und ab die gleichseitigen Dreiecke nach innen und bezeichnet ihre Mittelpunkte mit a'_0, b'_0 und c'_0, so erhält man auf gleiche Weise:

$$b'_0 c'_0 = a'_0 c'_0 = a'_0 b'_0 = \sqrt{\frac{\Sigma - 4J\sqrt{3}}{6}},$$
$$Sa'_0 = Sb'_0 = Sc'_0 = \tfrac{1}{6}\sqrt{2\Sigma - 8J\sqrt{3}}.$$

Aus den Beziehungen 9): $\mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \frac{4}{9}J\sqrt{3}$ und $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 = \frac{2}{9}\Sigma$ folgt aber:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2\Sigma + 8J\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2\Sigma - 8J\sqrt{3}}$$

und daher:

$$Sa_0 = Sb_0 = Sc_0 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}),$$
$$Sa'_0 = Sb'_0 = Sc'_0 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$

d. h.:

14) **Die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke, welche über den Seiten eines gegebenen Dreiecks einmal nach aussen und das andere Mal nach innen errichtet werden, bilden zwei gleichseitige Dreiecke, die den Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks zum Mittelpunkt haben; ihre Umkreisradien sind einmal gleich der halben Summe, das anderemal gleich der halben Differenz der Halbaxen des dem gegebenen Dreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes K.**

Die durch die Gleichung $A\alpha s_1 + B\beta s_2 + C\gamma s_3 = 0$ gegebene Gerade enthält unter der Bedingung, dass $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ist, den Schwerpunkt des Dreiecks und ist somit ein Durchmesser des Kegelschnittes K. Soll nun die Gleichung:

$$A\alpha' s_1 + B\beta' s_2 + C\gamma' s_3 = 0$$

einen zweiten Durchmesser desselben darstellen, der mit dem ersten Durchmesser gleiche Länge hat, so muss zunächst die Bedingung $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$ bestehen und ferner müsste durch die Endpunkte der beiden gleichlangen Durchmesser ein Kreis gelegt werden können, welcher mit K concentrisch ist. Demnach müsste die Gleichung:

$$(A\alpha s_1 + B\beta s_2 + C\gamma s_3)(A\alpha' s_1 + B\beta' s_2 + C\gamma' s_3)$$
$$+ \varkappa(BCs_2 s_3 + ACs_1 s_3 + ABs_1 s_2) = 0$$

mit der Gleichung des Kreises:

$$BCs_1 + ACs_2 + ABs_3 + (As_1 + Bs_2 + Cs_3)(A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_3) = 0$$

identisch werden, wodurch man die Beziehungen erhält:

$$s_1 \alpha\alpha' = \mu\lambda_1, \quad s_2 \beta\beta' = \mu\lambda_2, \quad s_3 \gamma\gamma' = \mu\lambda_3;$$
$$s_2 s_3 (\beta\gamma' + \beta'\gamma + \varkappa) = \mu(s_1 + s_2\lambda_3 + s_3\lambda_2),$$
$$s_1 s_3 (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma + \varkappa) = \mu(s_2 + s_1\lambda_3 + s_3\lambda_1),$$
$$s_1 s_2 (\alpha\beta' + \alpha'\beta + \varkappa) = \mu(s_3 + s_1\lambda_2 + s_2\lambda_1).$$

Hieraus folgen aber, wenn man $\mu = \varphi s_1 s_2 s_3$ setzt, die Gleichungen:

$$\beta'(\gamma - \beta) + \gamma'(\beta - \gamma) + \varkappa = \varphi s_1^2,$$
$$\alpha'(\gamma - \alpha) + \gamma'(\alpha - \gamma) + \varkappa = \varphi s_2^2,$$
$$\alpha'(\beta - \alpha) + \beta'(\alpha - \beta) + \varkappa = \varphi s_3^2,$$

wozu noch die Beziehung $\alpha'+\beta'+\gamma'=0$ zu nehmen ist, um hieraus die Unbekannten α', β', γ' und $\varkappa$ berechnen zu können. Man erhält sodann:

$$\alpha'=\psi\cdot\begin{vmatrix} s_1^2, & \gamma-\beta, & \beta-\gamma, & 1 \\ s_2^2, & 0, & \alpha-\gamma, & 1 \\ s_3^2, & \alpha-\beta, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = -\psi\cdot\begin{vmatrix} s_1^2, & 2\gamma-2\beta, & 1 \\ s_2^2, & \gamma-\alpha, & 1 \\ s_3^2, & \alpha-\beta, & 1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha'=-\psi[s_1^2(-2\alpha+\beta+\gamma)+s_2^2(\alpha+\beta-2\gamma)+s_3^2(\alpha-2\beta+\gamma)].$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung $\alpha+\beta+\gamma=0$ folgt nun:

$$\alpha'=3\psi(s_1^2\alpha+s_2^2\gamma+s_3^2\beta)$$

und ebenso

$$\beta'=3\psi(s_2^2\beta+s_1^2\gamma+s_3^2\alpha),$$
$$\gamma'=3\psi(s_3^2\gamma+s_1^2\beta+s_2^2\alpha).$$

15) Es werden daher durch die Gleichungen:

$$As_1\alpha+Bs_2\beta+Cs_3\gamma=0,$$
$$As_1(s_1^2\alpha+s_2^2\gamma+s_3^2\beta)+Bs_2(s_2^2\beta+s_1^2\gamma+s_3^2\alpha)$$
$$+Cs_3(s_3^2\gamma+s_1^2\beta+s_2^2\alpha)=0$$

zwei gleichlange Durchmesser des Kegelschnittes K dargestellt, sobald die Bedingungsgleichung $\alpha+\beta+\gamma=0$ erfüllt ist.

Unter den Paaren gleichlanger Durchmesser eines Kegelschnittes befinden sich aber zwei, die miteinander zusammenfallen, und dies sind die Hauptaxen des Kegelschnittes. Man findet daher die Gleichung des Hauptaxenpaares für den Kegelschnitt K, wenn man aus den Gleichungen 15) die Grössen α, β, γ eliminirt, wodurch man erhält:

$$\begin{vmatrix} As_1, & Bs_2, & Cs_3 \\ As_1^3+Bs_2s_3^2+Cs_3s_2^2, & As_1s_3^2+Bs_2^3+Cs_3s_1^2, & As_1s_2^2+Bs_2s_1^2+Cs_3^3 \\ 1, & 1, & 1, \end{vmatrix}=0$$

oder:

$$16)\quad \begin{aligned}&(s_2^2-s_3^2)(A^2s_1^2+2BCs_2s_3)+(s_3^2-s_1^2)(B^2s_2^2+2ACs_1s_3)\\ &\qquad+(s_1^2-s_2^2)(C^2s_3^2+2ABs_1s_2)=0.\end{aligned}$$

Um für das Hauptaxenpaar ein einfaches Constructionsverfahren zu erhalten, kehren wir wieder zur Betrachtung der über den Seiten des gegebenen Dreiecks nach aussen und innen errichteten gleichseitigen Dreiecke zurück.

Der Mittelpunkt a_0 des über bc nach aussen errichteten gleichseitigen Dreiecks hat von den Seiten des Dreiecks abc die Abstände:

$$-\tfrac{1}{6}s_1\sqrt{3},\quad \tfrac{1}{6}s_1\sqrt{3}\cos\omega_3+\tfrac{1}{2}s_1\sin\omega_3,\quad \tfrac{1}{6}s_1\sqrt{3}\cos\omega_2+\tfrac{1}{2}s_1\sin\omega_2,$$

und somit hat a_0 die Coordinaten:

$$a_0\equiv 1,\quad (\sin\omega_3\sqrt{3}+\cos\omega_3),\quad (\sin\omega_2\sqrt{3}-\cos\omega_2).$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\cos\omega_2=\frac{s_1^2-s_2^2+s_3^2}{2s_1s_3},\quad \cos\omega_3=\frac{s_1^2+s_2^2-s_3^2}{2s_1s_2},$$
$$\sin\omega_2=\frac{2J}{s_1s_3},\quad \sin\omega_3=\frac{2J}{s_1s_2},$$

so erhalten die Verbindungslinien der Punkte a_0 und a'_0 mit dem Schwerpunkte S des Dreiecks die Gleichungen:

$$Sa_0\equiv As_1\alpha+Bs_2\beta+Cs_3\gamma=0,\quad Sa'_0\equiv As_1\alpha'+Bs_2\beta'+Cs_3\gamma'=0,$$

wobei jedoch:

$$\alpha=2s_2^2-2s_3^2,\ \beta=3s_1^2-s_2^2+s_3^2+4J\sqrt{3},\ \gamma=-3s_1^2-s_2^2+s_3^2-4J\sqrt{3},$$
$$\alpha'=2s_2^2-2s_3^2,\ \beta'=3s_1^2-s_2^2+s_3^2-4J\sqrt{3},\ \gamma'=-3s_1^2-s_2^2+s_3^2+4J\sqrt{3}.$$

Betrachtet man $As_1\alpha''+Bs_2\beta''+Cs_3\gamma''=0$ als die Gleichung desjenigen Durchmessers von K, der mit dem Durchmesser Sa_0 gleiche Länge hat, so folgt nach 15):

$$\begin{aligned}2\alpha''&=\varkappa(2s_1^2\alpha+2s_2^2\gamma+2s_3^2\beta)\\&=-\varkappa(2s_2^2-2s_3^2)(\Sigma+4J\sqrt{3})=-\varkappa\alpha'(\Sigma+4J\sqrt{3}),\\2\beta''&=\varkappa(2s_2^2\beta+2s_1^2\gamma+2s_3^2\alpha)\\&=-\varkappa(3s_1^2-s_2^2+s_3^2-4J\sqrt{3})(\Sigma+4J\sqrt{3})=-\varkappa\beta'(\Sigma+4J\sqrt{3}),\\2\gamma''&=\varkappa(2s_3^2\gamma+2s_2^2\alpha+2s_1^2\beta)\\&=-\varkappa(-3s_1^2-s_2^2+s_3^2-4J\sqrt{3})(\Sigma+4J\sqrt{3})=-\varkappa\gamma'(\Sigma+4J\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Es verhält sich also:

$$\alpha'':\beta'':\gamma''=\alpha':\beta':\gamma'.$$

Daher stimmt die Gleichung des gesuchten Durchmessers, der mit Sa_0 gleiche Länge hat, mit der Gleichung von Sa'_0 überein. Ebenso findet man, dass die Durchmesserpaare Sb_0 und Sb'_0, Sc_0 und Sc'_0 des Kegelschnittes K gleiche Längen haben; da aber die Hauptaxen eines Kegelschnittes die Winkel gleichlanger Durchmesserpaare halbiren, so folgt:

17) Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen und innen gleichseitige Dreiecke, so werden die Winkel eines jeden Paares von Strahlen, die von dem Schwerpunkte des Dreiecks nach den Mittelpunkten je zweier über derselben Seite errichteten gleichseitigen Dreiecke gezogen werden, durch ein und dasselbe Geradenpaar halbirt, welches das Hauptaxenpaar des dem Dreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes ist.

Eine durch den beliebigen Punkt $p\equiv A_0, B_0, C_0$ zur Seite A des Dreiecks gezogene Parallele, deren Gleichung:

$$-A(B_0s_2+C_0s_3)+BA_0s_2+CA_0s_3=0$$

ist, wird von der Schwerpunktstransversale aS, welche die Gleichung $Bs_2-Cs_3=0$ hat, in dem Punkte:

$$m_1 \equiv 2A_0 s_2 s_3, \quad s_3(B_0 s_2 + C_0 s_3), \quad s_2(B_0 s_2 + C_0 s_3)$$

getroffen, welcher das zwischen den Seiten B und C liegende Stück der Parallelen halbirt. Zieht man durch den Punkt p ebenfalls die Parallelen zu den Seiten B und C des Dreiecks, so haben die Halbirungspunkte m_2 und m_3 der zwischen den Seitenpaaren A, C und A, B liegenden Stücke dieser Parallelen die Coordinaten:

$$m_2 \equiv s_3(A_0 s_1 + C_0 s_3), \quad 2B_0 s_1 s_3, \quad s_1(A_0 s_1 + C_0 s_3);$$
$$m_3 \equiv s_2(A_0 s_1 + B_0 s_2), \quad s_1(A_0 s_1 + B_0 s_2), \quad 2C_0 s_1 s_2.$$

Da nun der Inhalt F eines Dreiecks, dessen Eckpunkte durch die trimetrischen Coordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gegeben sind, ausgedrückt werden kann durch die Formel:

$$F = \frac{s_1 s_2 s_3 J . \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}}{(\alpha_1 s_1 + \beta_1 s_2 + \gamma_1 s_3)(\alpha_2 s_1 + \beta_2 s_2 + \gamma_2 s_3)(\alpha_3 s_1 + \beta_3 s_2 + \gamma_3 s_3)},$$

wobei J, s_1, s_2, s_3 den Inhalt und die Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten, so ergiebt sich für den Inhalt des von den Punkten m_1, m_2 und m_3 gebildeten Dreiecks, wenn man der Kürze halber:

$$A_0 s_1 + B_0 s_2 + C_0 s_3 = u,$$
$$B_0 C_0 s_2 s_3 + A_0 C_0 s_1 s_3 + A_0 B_0 s_1 s_2 = v$$

setzt, die Beziehung:

$$F = \frac{s_1 s_2 s_3 J . 2 s_1 s_2 s_3 u (3v - u^2)}{8 s_1^2 s_2^2 s_3^2 u^3} = \frac{3}{4} \frac{Jv}{u^2} - \frac{1}{4} J,$$

$$F = \frac{1}{4} J \left[\frac{3(B_0 C_0 s_2 s_3 + A_0 C_0 s_1 s_3 + A_0 B_0 s_1 s_2)}{(A_0 s_1 + B_0 s_2 + C_0 s_3)^2} - 1 \right].$$

Gehört aber der Punkt $p \equiv A_0, B_0, C_0$ dem Kegelschnitte K an, so ist $V \equiv 0$ und sodann

$$F = -\tfrac{1}{4} J;$$

daher folgt:

18) Zieht man durch einen beliebigen Punkt des dem Dreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes K parallele Gerade zu den Dreiecksseiten und halbirt die so erhaltenen, zwischen je zwei Dreiecksseiten liegenden Abschnitte dieser Parallelen, so bilden die drei Halbirungspunkte ein Dreieck, dessen Flächeninhalt constant und gleich dem vierten Theile vom Inhalte des gegebenen Dreiecks ist.

Verbindet man einen beliebigen Punkt $p \equiv A_0, B_0, C_0$ mit den Ecken a, b, c des Dreiecks und bezeichnet die oberen Abschnitte ap, bp, cp dieser Ecktransversalen mit e_1, e_2, e_3, die unteren Abschnitte derselben mit f_1, f_2, f_3, so fragt es sich: für welche Punkte ist

$$e_1 e_2 e_3 = f_1 f_2 f_3?$$

Da nun für jeden beliebigen Punkt $p \equiv A_0, B_0, C_0$ die Beziehungen bestehen:

$$\frac{e_1}{f_1} = \frac{B_0 s_2 + C_0 s_3}{A_0 s_1}, \quad \frac{e_2}{f_2} = \frac{A_0 s_1 + C_0 s_3}{B_0 s_2}, \quad \frac{e_3}{f_3} = \frac{A_0 s_1 + B_0 s_2}{C_0 s_3},$$

so hat man die Bedingungsgleichung

$$(B_0 s_2 + C_0 s_3)(A_0 s_1 + C_0 s_3)(A_0 s_1 + B_0 s_2) = A_0 B_0 C_0 s_1 s_2 s_3$$

oder

$$(B_0 C_0 s_2 s_3 + A_0 C_0 s_1 s_3 + A_0 B_0 s_1 s_2)(A_0 s_1 + B_0 s_2 + C_0 s_3) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt aber in diejenige des Kegelschnittes K und in die Gleichung der unendlich fernen Geraden; daher folgt:

19) Die sämmtlichen Punkte des einem Dreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes besitzen die Eigenschaft, dass das Product der oberen Abschnitte ihrer Ecktransversalen gleich ist dem Producte der unteren Abschnitte derselben.

Die Ecktransversalen eines Punktes bestimmen aber auf den Dreiecksseiten sechs Abschnitte derart, dass das Product von drei nicht aneinanderliegenden Abschnitten u, v, w gleich ist dem Producte der drei anderen Abschnitte u', v', w'; ferner besteht aber noch die bekannte Beziehung:

$$e_1 e_2 e_3 : f_1 f_2 f_3 = s_1 s_2 s_3 : uvw = s_1 s_2 s_3 : u'v'w'.$$

Da aber für alle Punkte des Kegelschnittes K

$$e_1 e_2 e_3 = f_1 f_2 f_3$$

ist, so folgt:

20) Die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes K mit den Ecken des Dreiecks bestimmen auf dessen Seiten Abschnitte derart, dass das Product je dreier nicht aneinanderstossender Abschnitte gleich dem Product der Dreiecksseiten ist.

Zieht man in den Eckpunkten a, b, c des Dreiecks die Tangenten an den Kegelschnitt K, welche, wie gezeigt wurde, den Seiten des Dreiecks parallel sind, so erkennt man, dass der Kegelschnitt K zugleich auch die grösste Ellipse ist, welche dem Dreieck der Tangenten einbeschrieben werden kann, und dass sich daher die Eigenschaften des Kegelschnittes K unmittelbar auf den einem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitt vom grössten Inhalt übertragen lassen. Dieser Kegelschnitt berührt nämlich die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten, ist mit dem durch die Ecken des Dreiecks gehenden kleinsten Kegelschnitte K concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend, hat also ebenfalls den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkte; seine Axen sind halb so lang, als diejenigen des Kegelschnittes K und sein Inhalt ist der vierte Theil vom Inhalt des Kegelschnittes K.

Kleinere Mittheilungen.

XXIV. Ueber confocale Kegelschnitte.

Während der Satz, dass sich zwei confocale Kegelschnitte rechtwinklig schneiden, in vielen synthetischen Darstellungen der Kegelschnittstheorie sich findet,* scheint der Beweis der Umkehrung dieses Satzes: zwei sich rechtwinklig schneidende Kegelschnitte haben gemeinsame Brennpunkte — nirgends versucht worden zu sein. Es ist dies der Grund für mich gewesen, die folgende Note zu veröffentlichen, welche einen synthetischen Beweis des fraglichen Satzes in der Form enthält, wie ich ihn im mathematischen Seminar zu Jena auf Anregung des Herrn Prof. Thomae im Winter 1882/83 vorgetragen habe.

Es mögen in einer Ebene vier Strahlenpaare $g_1 g'_1$, $g_2 g'_2$, $g_3 g'_3$, $g_4 g'_4$ mit den resp. Scheiteln 1, 2, 3 und 4 gegeben sein: es soll die Anzahl derjenigen Punkte der Ebene bestimmt werden, welche in Bezug auf alle vier Strahlenpaare einen conjugirten Punkt besitzen, d. h. es wird gefragt: wieviel Punkte giebt es in der Ebene von der Beschaffenheit, dass, wenn man von einem Punkte X derselben aus nach den vier Scheitelpunkten 1, 2, 3 und 4 die Strahlen x_1, x_2, x_3, x_8 zieht und die diesen in Bezug auf die vier Strahlenpaare $g_1 g'_1$, $g_2 g'_2$ etc. resp. harmonischen Strahlen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 construirt — dass letztere sich dann sämmtlich wieder in einem Punkte scheiden?

Wir wollen, um eine kürzere Ausdrucksweise zu erhalten, die Strahlen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 die Polaren des Punktes X in Bezug auf 1, 2 etc. nennen.

In Bezug auf nur zwei Strahlenpaare, z. B. 1 und 2, hat jeder Punkt X einen und im Allgemeinen nur einen conjugirten Punkt X'; es ist dies der Schnittpunkt der Polaren x'_1 und x'_2; die einander conjugirten Punkte bilden also eine doppelt-unendliche Mannichfaltigkeit. In Bezug auf drei Strahlenpaare, z. B. 1, 2 und 3, hat nicht jeder Punkt der Ebene einen conjugirten Punkt, weil sich die entsprechenden Polaren x'_1, x'_2, x'_3 im Allgemeinen nicht in einem Punkte treffen werden; die Punkte mit dieser Eigenschaft werden vielmehr eine einfach-

---

* Z. B. in Geiser, Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, § 22 S. 148; — Schroeter, Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, III. Abschn. § 52 S. 352.

unendliche Mannichfaltigkeit bilden, d. h. sie werden auf einer Curve liegen. Um dies zu demonstriren und zugleich die Ordnung dieser Curve festzustellen, lassen wir einen Punkt X eine beliebige Gerade g, welche nicht durch einen der vier Scheitelpunkte hindurchgeht, durchlaufen; es beschreiben dann die Strahlen x_1, x_2, x_3 in perspectivischer Lage befindliche, also projectivisch verwandte Strahlbüschel. Da aber jeder Strahl x_1, x_2, x_3 involutorisch liegt zu seiner Polaren x'_1, x'_2, x'_3, so beschreiben letztere ebenfalls drei projectivische Strahlbüschel mit den resp. Centren 1, 2, 3, erzeugen mithin zu zweien drei, im Allgemeinen nicht zerfallende Kegelschnitte $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{23}$, $\varkappa_{31}$, welche drei Punkte X'_1, X'_2, X'_3 gemeinsam haben. In diesen drei Punkten treffen sich je drei entsprechende Polaren, deren Pole X_1, X_2, X_3 auf der Geraden g liegen. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass alle Punkte der Ebene, welche in Bezug auf die drei Strahlenpaare 1, 2, 3 conjugirte Punkte besitzen, auf einer Curve dritter Ordnung C_{123} liegen, die insbesondere durch die drei Scheitelpunkte 1, 2 und 3 hindurchgeht, weil jeder dieser drei Punkte einen conjugirten besitzt, nämlich den Schnittpunkt seiner Polaren in Bezug auf die übrigen beiden Strahlenpaare.

Durch eine analoge Betrachtung finden wir, dass der Ort aller Punkte, welche in Bezug auf die drei Strahlenpaare 1, 2 und 4 conjugirte Punkte besitzen, eine zweite Curve dritter Ordnung C_{124} ist, welche durch die Punkte 1, 2 und 4 hindurchgeht. Da nun der conjugirte Punkt X' eines Punktes X schon durch zwei Polaren, z. B. durch x'_1 und x'_2 völlig bestimmt ist, die Polare x'_3 also durch X' hindurchgehen muss, wenn X auf C_{123}, die Polare x'_4 aber durch X' läuft, wenn X auf C_{124} liegt, so werden die den beiden Curven C_{123} und C_{124} gemeinschaftlichen Punkte die Eigenschaft haben, dass ihre Polaren in Bezug auf sämmtliche vier Strahlenpaare in je einem Punkte sich schneiden, d. h. es sind dies diejenigen Punkte der Ebene, welche die Bedingung erfüllen, conjugirte Punkte in Bezug auf die vier gegebenen Strahlenpaare zu besitzen.

Von den neun Schnittpunkten der beiden Curven dritter Ordnung C_{123} und C_{124} sind jedoch drei Punkte auszunehmen: die Punkte 1 und 2, und der Schnittpunkt der Polaren der Verbindungslinie $\overline{12}$ in Bezug auf 1 und auf 2. Die Schnittpunkte der Polarenpaare dieser offenbar beiden Curven gemeinsamen drei Punkte in Bezug auf 1 und 2 erweisen sich nämlich als unbestimmt.

Es bleiben demnach nur noch sechs Punkte in der Ebene übrig, welche der geforderten Bedingung Genüge leisten. Dieselben erscheinen gepaart; denn der einem Punkte X conjugirte Punkt X' hat seinerseits zum conjugirten Punkte wiederum den ursprünglichen X.

Schliesst im Besonderen jedes der vier gegebenen Strahlenpaare einen rechten Winkel ein, so modificirt sich unser gefundenes Resultat dahin, dass eines der drei Paare conjugirter Punkte mit den imaginären Kreispunkten im Unendlichen zusammenfällt.

Bilden endlich die vier Scheitelpunkte 1, 2, 3 und 4 die gemeinsamen Punkte zweier sich rechtwinklig durchschneidenden Kegelschnitte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, und die rechtwinklig aufeinander stehenden vier Strahlenpaare die Tangenten an $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in jenen vier Durchschnittspunkten, so sind es ausser den imaginären Kreispunkten die Brennpunkte (und zwar die reellen und imaginären) eines jeden der beiden Kegelschnitte, welche in Bezug auf die vier Tangentenpaare conjugirte Punkte besitzen. Da es jedoch ausser den Kreispunkten nur noch vier solcher Punkte in der Ebene geben kann, die vier Brennpunkte von $\varkappa_1$ also allein schon die Zahl erfüllen, so müssen die vier Brennpunkte von $\varkappa_2$ mit denen von $\varkappa_1$ völlig coincidiren, und zwar muss das reelle Paar mit dem reellen, das imaginäre mit dem imaginären Paare zusammenfallen, oder:

Zwei rechtwinklig sich durchschneidende Kegelschnitte sind confocal.

Jena, den 20. Februar 1883. Dr. Carl Hossfeld.

XXV. Ueber Unicursalcurven vierter Ordnung.

(Hierzu Taf. VI Fig. 7.)

So willkürlich eine Erzeugungsweise einer Curve oder Fläche vom Standpunkte allgemeiner Theorie aus oft erscheinen mag, so fruchtbar kann sie zur Auffindung neuer Thatsachen werden.

Im Folgenden sollen die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, oder von Cayley sogenannte Unicursalcurven, auf eine neue Art erzeugt und die nächstliegenden Eigenschaften aus ihr hergeleitet werden.

Ein, wie mir scheint, noch nicht bemerkter interessanter Satz ergiebt sich unmittelbar aus dieser Erzeugungsart; derselbe lautet:

Zieht man aus einem der drei Doppelpunkte Strahlen, von denen jeder die Verbindungslinie der beiden übrigen Doppelpunkte in einem Punkte X_1, die Curve vierter Ordnung selbst noch in zwei Punkten X_2 und X_3 treffen möge, so liegt derjenige Punkt X_4, welcher durch X_2 und X_3 harmonisch von X_1 getrennt wird, auf einem durch die drei Doppelpunkte hindurchgehenden Kegelschnitte.

Wir wenden uns zunächst zur Erzeugung der Curve vierter Ordnung und definiren dieselbe als

Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eines Strahlbüschels erster Ordnung und einer zu diesem projectivischen Strahleninvolution zweiter Ordnung.

Hierbei ist unter Strahleninvolution zweiter Ordnung die Gesammtheit der Tangentenpaare verstanden, welche von den Punkten einer geraden Linie aus an eine Curve zweiter Ordnung gelegt werden können; sie wird auf ein Gebilde von einfacher Unendlichkeit projectivisch bezogen, indem die Schnittpunkte conjugirter Strahlen auf die einzelnen Elemente dieses Gebildes projectivisch bezogen werden.

Es sei C (Fig. 7) der Mittelpunkt eines Strahlbüschels erster Ordnung, g der Ort der Schnittpunkte conjugirter Strahlen einer Strahleninvolution zweiter Ordnung und $\varkappa$ der Kegelschnitt, welchen die Gesammtheit der Strahlenpaare der Involution umhüllt. Die Strahlen des Büschels C seien projectivisch auf die Punkte der Geraden g, also auch auf die Strahleninvolution bezogen.

Auf einer beliebigen Geraden C in der Ebene dieser Gebilde fixirt das Strahlbüschel C eine zu derjenigen auf g projectivische Punktreihe, welche mit jener eine Curve zweiter Classe $\varkappa'$ erzeugt, die mit $\varkappa$ im Allgemeinen vier Tangenten gemeinschaftlich hat; diese vier Tangenten bestimmen auf p die Schnittpunkte der erzeugten Curve, welche also von der vierten Ordnung ist.

Diese Curve vierter Ordnung $K^{(4)}$ hat drei Doppelpunkte, und zwar sind dies die folgenden:

Der Mittelpunkt C des Strahlbüschels und diejenigen Punkte C' und C'' auf g, welche auf den entsprechenden Strahlen des Büschels C liegen.

Die beiden Punkte C' und C'' brauchen nicht reell zu sein und können insbesondere in einem einzigen Punkte zusammenfallen.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass, wenn eine auf die oben angegebene Art erzeugte Curve vierter Ordnung vollständig gezeichnet vorliegt, dieselbe in unendlich-vielfacher Weise durch ein Strahlbüschel erster Ordnung und eine zu diesem projectivische Strahleninvolution zweiter Ordnung erzeugt gedacht werden kann. Man kann das Strahlbüschel in C in ganz beliebiger Weise projectivisch auf die Punktreihe g beziehen, so jedoch, dass C' und C'' auf den entsprechenden Strahlen des Büschels C liegen; verbindet man dann die Schnittpunkte Ξ_1 und Ξ_2 der Curve $K^{(4)}$ und eines Strahles x in C mit dem dem Strahle x entsprechenden Punkte X auf g, so umhüllen sämmtliche auf diese Weise construirten Paare von Verbindungslinien eine Curve zweiter Classe, bilden also eine Strahleninvolution zweiter Ordnung. Es bestimmen nämlich fünf Gerade:

$$X\Xi_1,\ X\Xi_2,\ X'\Xi'_1,\ X'\Xi'_2,\ X''\Xi''_1,$$

eine Curve zweiter Ordnung und somit eine Strahleninvolution zweiter Ordnung, welche in bestimmter Weise projectivisch auf das Strahlbüschel in C bezogen ist, mit diesem also eine Curve vierter Ordnung $K^{(4)'}$ erzeugt, welche mit $K^{(4)}$ die drei Doppelpunkte C, C' und C'', und weiter die fünf Punkte Ξ_1, Ξ_2, Ξ'_1, Ξ'_2, Ξ''_1, im Ganzen also 17 Punkte gemeinsam hat, mithin vollständig mit ihr zusammenfällt.

Ordnen wir einem festen Strahle y von C successive sämmtliche Punkte von g mit Ausnahme von C', C'' und (yg) zu, und treffen die Bestimmung, dass der Punkt C' stets dem Strahle CC', der Punkt C'' dem Strahle CC'' zugeordnet sei, so erhalten wir auf einfach-unendlich viele Arten dieselbe Curve $K^{(4)}$.

Es möge im Folgenden eine zur Erzeugung von $K^{(4)}$ benützte Curve zweiter Ordnung $\varkappa$ die Leitcurve von $K^{(4)}$ heissen.

Suchen wir den Pol π der Geraden g in Bezug auf eine Leitcurve $\varkappa$, und verbinden sämmtliche Punkte der Geraden g mit ihm durch ein Strahlbüschel, so ist dieses projectivisch auf das Strahlbüschel in C bezogen, erzeugt also mit diesem einen Kegelschnitt $\lambda^{(2)}$, welcher durch die drei Doppelpunkte C, C' und C'' hindurchgeht und die Eigenschaft hat, im Verein mit der Geraden g je zwei Punkte der Curve $K^{(4)}$, welche mit C in einer geraden Linie liegen, harmonisch zu trennen.

In welcher Weise wir nun die Curve $K^{(4)}$ durch ein Strahlbüschel und eine entsprechende Strahleninvolution erzeugen mögen, die Curve $\lambda^{(2)}$ bleibt offenbar dieselbe.

Dieselbe Schlussweise können wir aber auf den Punkt C' und endlich auf C'' anwenden, falls diese Punkte reell sind. Wir erhalten dementsprechend drei Kegelschnitte $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(2)'}$, $\lambda^{(2)''}$, welche sämmtlich durch die drei Doppelpunkte der Curve $K^{(4)}$ hindurchgehen.

Wir wollen hier noch kurz auf einige Folgerungen aus unseren allgemeinen Darlegungen hinweisen.

Rückt die Verbindungslinie zweier (reellen oder imaginären) Doppelpunkte ins Unendliche, so halbirt der Kegelschnitt $\lambda^{(2)'}$, welcher jetzt der einzige reelle im Endlichen ist, sämmtliche Strecken, welche durch zwei, mit C in einer geraden Linie liegende Punkte der Curve $K^{(4)}$ begrenzt werden. $\lambda^{(2)}$ wird insbesondere ein Kreis, wenn die beiden unendlich fernen Doppelpunkte identisch sind mit den imaginären Kreispunkten; wird eine Parabel, wenn jene Doppelpunkte auf der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Der Fall, in welchem zwei Doppelpunkte ins Unendliche fallen, die conjugirten Paare der Strahleninvolution, d. h. die Tangentenpaare der Curve $\varkappa$, parallele Strahlenpaare werden, führt uns auf die Erzeugung der Fusspunktcurven der Kegelschnitte. Fällt man nämlich aus dem Punkte C auf sämmtliche Paare paralleler Tangenten der Leitcurve $\varkappa$

Lothe, so ist die Gesammtheit derselben projectivisch bezogen auf die Punkte der unendlich fernen Geraden, so zwar, dass jedem beliebigen Strahle aus C die Richtung des zu ihm senkrechten Tangentenpaares von $\varkappa$ entspricht. Die Fusspunktcurven der Kegelschnitte sind mithin als specielle Fälle unter unserer allgemeineren Curve vierter Ordnung begriffen. Zugleich erkennen wir ohne Mühe, dass die sogenannte Pascal'sche Schnecke, die Lemniscate etc. die imaginären Kreispunkte im Unendlichen als Doppelpunkte enthalten müssen.

Wir gehen dazu über, die Classe unserer Curve, die Zahl ihrer Doppeltangenten und Wendepunkte zu bestimmen.

Die Feststellung dieser Charaktere zeigt eine auf den ersten Blick überraschende Uebereinstimmung mit Sätzen aus der Kegelschnittstheorie.

Man setze an Stelle der Curve vierter Ordnung einen Kegelschnitt, an Stelle der einfachen Unendlichkeit eines Strahlbüschels die einfache Unendlichkeit einer Kegelschnittschaar, endlich an Stelle der zweifachen Unendlichkeit aller Strahlen der Ebene die zweifache Unendlichkeit einer Schaarschaar von Kegelschnitten, d. h. aller Kegelschnitte, welche drei Gerade berühren — und man wird gewisse Beziehungen, welche zwischen einem *festen* Kegelschnitte einerseits, einer Kegelschnittschaar und einer Kegelschnittschaarschaar andererseits bestehen, ohne Weiteres bezw. auf die Curve vierter Ordnung, ein Strahlbüschel und das Strahlenfeld der Ebene ausdehnen können.

Ich will mich näher erklären. Man bestimmt die Classe einer Curve, indem man die Zahl der Strahlen eines Strahlbüschels erster Ordnung ermittelt, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden. Diese Zahl ergiebt sich in unserem Falle als gleich mit der Zahl der Kegelschnitte einer Schaar, welche einen festen Kegelschnitt einfach und im ersten Grade berühren.

Es ergiebt sich ferner:

die Zahl der Geraden in der Ebene, welche die Curve vierter Ordnung doppelt berühren, als gleich mit der Zahl der Kegelschnitte einer Schaarschaar, welche einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, und endlich:

die Zahl der Geraden in der Ebene, welche die Curve vierter Ordnung in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, als gleich mit der Zahl der Kegelschnitte einer Schaarschaar, welche einen festen Kegelschnitt im zweiten Grade berühren.

Die Giltigkeit dieser interessanten Beziehungen ist leicht nachzuweisen.

Wir fanden oben, dass die Schnittpunkte der Curve vierter Ordnung mit einer Geraden p identisch seien mit den Schnittpunkten der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Leitcurve $\varkappa$ und einer durch die beiden

projectivischen Punktreihen auf g und p erzeugten Curve zweiter Ordnung $\varkappa'$.

Drehen wir p um einen festen Punkt P, so beschreibt die Curve $\varkappa'$ eine Kegelschnittschaar mit den Grundstrahlen g, CC', CC'' und der Verbindungslinie des Punktes P mit dem der Geraden CP auf g entsprechenden Punkte Q. Unter den Curven dieser Schaar giebt es nun im Allgemeinen sechs, welche den Kegelschnitt $\varkappa$ einfach berühren. Für diese sechs Kegelschnitte fallen auf dem entsprechenden p je zwei Schnittpunkte der Curve $K^{(4)}$ mit p zusammen, oder:

Die Curve vierter Ordnung $K^{(4)}$ ist von der sechsten Classe.

Bewegen wir p beliebig als Tangente an $K^{(4)}$ herum, so kommt die entsprechende Curve $\varkappa'$ unter den Kegelschnitten einer Schaarschaar vor, welche die Geraden g, CC', CC'' zu Grundstrahlen hat; ausserdem berührt aber $\varkappa'$ die Leitcurve immer in einem Punkte einfach, hat also überdies noch je zwei im Allgemeinen von einander verschiedene Tangenten mit ihr gemeinsam.

Viermal im Allgemeinen nun kommt es vor, dass auch das zweite gemeinschaftliche Tangentenpaar zusammenfällt, woraus der Satz entspringt, dass die Curve vierter Ordnung $K^{(4)}$ im Allgemeinen vier Doppeltangenten besitzt. Aus der Lage von g, CC', CC'' in Bezug auf die Leitcurve $\varkappa$ lässt sich in besonders einfacher Weise über die Realität der Doppeltangenten einer auf die angegebene Weise erzeugten Curve vierter Ordnung entscheiden.

Es würde überflüssig sein, des Näheren auseinanderzusetzen, in welcher Weise man constatirt, dass die Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten im Allgemeinen sechs Inflexionstangenten besitzt. —

Es sei mir zum Schluss die Bemerkung verstattet, dass diese Erzeugungsart der Curven vierter Ordnung, auf Gebilde zweiter Stufe übertragen, eine Perspective in die Formen von Flächen vierter Ordnung mit Knotenpunkt und Doppelkegelschnitt eröffnet.

Jena, am Sylvester 1882. Dr. Carl Hossfeld.

XXVI. Ueber eine Eigenschaft der Ellipse.

(Hierzu Taf. VI Fig. 8.)

Die Gleichung derselben sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, O der Mittelpunkt, M ein Punkt auf dem Umfange, dessen Normale die grosse Axe in C, die kleine in E schneidet; ausserdem bestimme man auf der Normale und ihrer Ver-

längerung die Punkte D und D', so dass $MD = MD' =$ dem conjugirten Halbmesser von OM ist; dann liegen diese Punkte auf den von O mit den Halbmessern $a-b$ und $a+b$ beschriebenen Kreisen.

Nun ist, wenn e die numerische Excentricität, $MD = \sqrt{a^2 - e^2 x^2}$, $MC = \frac{b}{a} MD$ und $ME = \frac{a}{b} MD$, also $MC:MD:ME:MD' = b^2:ab:a^2:ab$, mithin bilden diese fünf Punkte auf der Normale, wenn sich M auf dem Umfange der Ellipse bewegt, ein affin veränderliches System, und da die Tangenten der von den einzelnen Punkten einer Geraden des Systems beschriebenen Bahncurven in jedem Moment der Bewegung eine Parabel umhüllen, welche auch die Systemgerade berührt, so sind die beiden Axen, die Tangente und Normale der Ellipse in M, die in D und D' auf den Halbmessern OD und OD' errichteten Lothe sechs Tangenten einer Parabel, deren Directrix OM ist. Wenn G der Durchschnittspunkt dieser Lothe ist, so sind die auf GD und GD' in den Schnittpunkten mit der Directrix errichteten Lothe zwei weitere Parabeltangenten. Die Tangente von M schneidet die verlängerte grosse Axe in H, also ist der Durchschnittspunkt der beiden um die Dreiecke OCE und MCH beschriebenen Dreiecke, welchen wir mit F bezeichnen, der Brennpunkt der Parabel. M ist der Mittelpunkt und D, D' sind die Brennpunkte einer zweiten Ellipse, welche die y-Axe in O berührt, also ist die x-Axe ihre Normale und die Brennpunkte f und f' der ersten Ellipse entsprechen den Punkten D und D' der zweiten, d. h. $Of = Of'$ ist gleich dem conjugirten Halbmesser von MO in der zweiten Ellipse. Denkt man sich letztere fest und den Punkt O auf ihrem Umfang beweglich, so bildet die Normale von O mit den fünf Punkten f', O, C, f, H ein zweites affinveränderliches System; die Punkte f' und f bewegen sich auf zwei Kreisen, deren Halbmesser Mf' gleich der Summe, Mf gleich der Differenz der Halbaxen der zweiten Ellipse sind; O bewegt sich auf dem Umfang derselben, C und H auf den Axen, also umhüllen die Tangenten dieser fünf Bahnen auch eine Parabel, welche offenbar mit der ersten identisch ist. Zu den obigen acht Tangenten kommen noch vier weitere hinzu: die beiden in den Brennpunkten f und f' auf den Brennstrahlen Mf und Mf' der ersten Ellipse errichteten Lothe $G'f$ und $G'f'$ und die beiden in den Schnittpunkten dieser Lothe und der Directrix OM mit den Brennstrahlen gezogenen Parallelen.

Fällt man nun vom Brennpunkte F der Parabel auf die genannten zwölf Tangenten Lothe, so liegen ihre Fusspunkte auf einer Geraden, der Scheiteltangente; somit sind es im Ganzen 13 Tangenten, welche mit einander 286 verschiedene Dreiecke bilden, um welche sich ebensoviele Kreise beschreiben lassen, die sämmtlich durch F gehen und deren Höhendurchschnitte auf der Directrix, nämlich auf dem Halbmesser OM liegen. Hieraus folgt der Satz:

Zu jedem Punkte M auf dem Umfange einer Ellipse lässt sich ein zweiter F finden, in welchem sich 286 Kreise schneiden, welche ebenso vielen Dreiecken umbeschrieben sind, die von 13 Geraden gebildet werden; die Höhendurchschnitte von diesen 286 Dreiecken liegen auf dem Halbmesser OM oder seiner Verlängerung. Die 13 Geraden sind: die beiden Axen, die Tangente und Normale von M; die in den Brennpunkten auf den Brennstrahlen von M errichteten Lothe und die durch ihre Schnittpunkte auf dem Halbmesser mit den Brennstrahlen gezogenen Parallelen; die Tangenten der zwei vom Mittelpunkte mit der Summe und Differenz der Halbaxen beschriebenen Kreise in den zwei Punkten, wo sie von der Normale getroffen werden, und die in den Schnittpunkten dieser Tangenten mit dem Halbmesser OM auf ihnen errichteten Lothe; endlich die Verbindungslinie der Fusspunkte von den zwölf Lothen, die von F auf diese zwölf Geraden gefällt werden.

Das in F auf FM errichtete Loth schneidet die Normale von M im Krümmungsmittelpunkte μ der Ellipse und die Tangente im Krümmungsmittelpunkte ν der durch M gehenden confocalen Hyperbel; das in F auf FO errichtete Loth schneidet die grosse Axe (oder x-Axe) im Krümmungsmittelpunkte μ' der zweiten Ellipse (welcher dem Punkte O entspricht), und die y-Axe im Krümmungsmittelpunkte ν' ihrer durch O gehenden confocalen Hyperbel. Die vier Kreise, deren Durchmesser die vier Krümmungsradien $M\mu$, $M\nu$, $O\mu'$, $O\nu'$ sind, schneiden sich daher ebenfalls in F. Der Beweis beruht darauf, dass die vier Krümmungsmittelpunkte Berührungspunkte der Parabel sind und dass eine Sehne, durch deren Endpunkte zwei rectanguläre Tangenten gezogen werden können, durch den Brennpunkt geht.

Bei einem affin-veränderlichen System umhüllen die Tangenten der Bahncurven von den einzelnen Punkten einer Systemgeraden in jedem Momente der Bewegung eine Parabel, deren Tangente diese Gerade ist; die Normalen der Bahncurven in den gleichen Punkten umhüllen eine zweite Parabel, welche denselben Brennpunkt hat wie die erste; die Axen beider Parabeln und also auch ihre Directricen stehen aufeinander senkrecht und die Systemgerade ist ihre gemeinschaftliche Tangente.

Durch Anwendung dieses Satzes erhält man vier weitere Parabeln P_1, P_2, P_3, P_4, die confocal sind in der gewöhnlichen Bedeutung, d. h. ihr gemeinsamer Brennpunkt ist F und ihre Axe eine durch F parallel mit dem Halbmesser OM gezogene Linie; ihre Directricen stehen also senkrecht auf OM und gehen durch die Krümmungsmittelpunkte μ, μ_1, ν, ν_1.

Die neun Tangenten von P_1 (oder Normalen von Bahnen) sind, wenn die Normale ME der ersten Ellipse als Systemgerade betrachtet wird, OD, OD', zwei in C und E auf den Axen errichtete Lothe KC und KE,

die Normale ME und das auf ihr in μ errichtete Loth; die auf OD und OD' in ihren Schnittpunkten mit der Directrix errichteten Lothe, endlich die Scheiteltangente von P_1 oder die Verbindungslinie der Fusspunkte der von F auf diese acht Tangenten gezogenen Lothe. Diese neun Linien bilden im Ganzen 84 weitere Dreiecke, deren umbeschriebene Kreise sich ebenfalls in F schneiden und deren Höhendurchschnitte auf der Directrix, nämlich auf dem von μ auf den Halbmesser OM gefällten Lothe liegen.

Die neun Tangenten von P_2 sind, wenn die Normale OH der zweiten Ellipse als Systemgerade betrachtet wird, Mf, Mf', zwei in C und H auf den Axen der zweiten Ellipse errichtete Lothe $K'C$ und $K'H$, die Normale OH und das auf ihr in μ' errichtete Loth; die auf Mf und Mf' in ihren Schnittpunkten mit der Directrix errichteten Lothe, endlich die Scheiteltangente von P_2 oder die Verbindungslinie der Fusspunkte der von F auf diese acht Tangenten gefällten Lothe. Diese neun Linien bilden 84 Dreiecke, deren umbeschriebene Kreise sich auch in F schneiden und deren Höhendurchschnitte auf dem von μ' auf den Halbmesser OM gefällten Loth liegen.

Die Tangente der ersten Ellipse in M ist zugleich Normale der confocalen Hyperbel mit dem Krümmungsmittelpunkt ν; betrachtet man sie als Systemgerade, so bildet sie mit den Bahnnormalen GJ, GH, dem in ν auf ihr errichteten Loth vier Tangenten von P_3, welche mit der Scheiteltangente zehn Dreiecke bestimmen, deren umbeschriebene Kreise sich in F schneiden.

Ebenso kann man die y-Axe oder die Tangente der zweiten Ellipse in O als Normale der confocalen Hyperbel mit dem Krümmungsmittelpunkte ν' als Systemgerade ansehen, welche mit den Bahnnormalen $G'J$, $G'E$, dem in ν' auf ihr errichteten Lothe und der Scheiteltangente von P_4 ebenfalls zehn Dreiecke und zehn sich in F schneidende Kreise bestimmen.

Man hat also im Ganzen $286 + 4 + 84 + 84 + 10 + 10 = 478$ Kreise.

Jedem Punkte M auf dem Umfang der ersten Ellipse entspricht ein Punkt F, dessen Ort die Fusspunktencurve einer Ellipse ist, deren Axen zugleich diejenigen der Evolute der Ellipse sind. Denn, da F der Schnittpunkt der beiden Kreise OEC und MCH ist, so sind die Winkel FOC und MOC gleich. Ferner ist $OF.OM = OC.OH = a^2 - b^2 = OF.OM'$, wenn M' der Durchschnitt der Verlängerung von OF mit der Ellipse ist.

Hieraus folgt, dass die Curve, auf der F liegt, durch Transformation mittelst reciproker Radien vectoren aus der Ellipse abgeleitet wird, oder, was dasselbe ist, die Fusspunktencurve der genannten Hilfsellipse ist. Man hat also den Satz:

Zu jedem Punkte M auf dem Umfange einer Ellipse lässt sich ein Punkt F bestimmen, in welchem sich 478 Kreise

schneiden, die 474 Dreiecken umschrieben sind, gebildet durch Tangenten von fünf Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt F ist. Die Höhendurchschnitte von 286 Dreiecken liegen auf dem Halbmesser OM, die übrigen auf vier zu dem Halbmesser senkrechten Geraden. Die Punkte F liegen auf der Fusspunktencurve einer Ellipse, welche mit der Evolute der gegebenen Ellipse die Axen gemein hat.

Reutlingen, April 1883. Dr. O. Böklen.

XXVII. Ueber das physische Pendel.

(Hierzu Taf. VI Fig. 9 u. 10.)

Das Kater'sche Reversionspendel ist ein specieller Fall des allgemeinen Satzes:

Alle Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln zweier Flächen (J) und (J'), wovon die erste durch Verlängerung, die zweite durch Verkürzung der Halbmesser einer Wellengeschwindigkeitsfläche V_1 um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist.

Sind nämlich $a > b > c$ die Quadrate der drei durch den Schwerpunkt O gehenden Hauptträgheitsradien, so ist

$$1)\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

das Grundellipsoid. Bezeichnet man das von O auf die Tangentialebene von 1) gefällte Perpendikel mit v, so ist v ein Radius der Fusspunktfläche von 1), deren Gleichung

$$2)\qquad v^4 = ax^2+by^2+cz^2$$

ist. Jeder Halbmesser v von 2) ist zugleich ein Trägheitsradius des Körpers. Errichtet man auf einem Centralschnitt von 2) ein Perpendikel und trägt darauf zwei Strecken ON und On gleich den Halbaxen des Centralschnittes ab, so liegen die Punkte N und n auf der Wellengeschwindigkeitsfläche

$$3)\qquad \frac{x^2}{a-v^2}+\frac{y^2}{b-v^2}+\frac{z^2}{c-v^2}=0.$$

Nimmt man nun auf der Richtung ON einen Punkt J so an, dass, wenn der Körper an der Geraden OJ in J aufgehängt wird und um eine durch J senkrecht zu OJ und parallel mit v gehende Axe schwingt, seine Schwingungen mit denjenigen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind, so ist, wenn $OJ = d$,

$$4)\qquad l=\frac{v^2+d^2}{d},\quad \text{also } v^2 = ld-d^2,$$

somit nach 3)

$$5)\qquad \frac{x^2}{a-ld+d^2}+\frac{y^2}{b-ld+d^2}+\frac{z^2}{c-ld-d^2}=0$$

die Gleichung der Fläche (J) oder (J'), wenn man $d^2=x^2+y^2+z^2$ setzt.

Führt man eine neue Veränderliche $v_1=d-\frac{l}{2}$ ein, so erhält 5) die Form

$$6)\qquad \frac{x^2}{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)-v_1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)-v_1^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)-v_1^2}=0.$$

Dies ist die oben mit V_1 bezeichnete Wellengeschwindigkeitsfläche, welche unter der Voraussetzung $\frac{l^2}{4}>a$ von dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{4}-a}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}-b}+\frac{z^2}{\frac{l^2}{4}-c}=1$$

abgeleitet ist. (Journal f. reine u. angew. Mathematik 1882, S. 177.)

In Fig. 9, welche den Durchschnitt der hier in Betracht kommenden Flächen mit der xz-Ebene angiebt, ist die Curve A_0PC_0 der Durchschnitt der Fläche 2), also sind $OA_0=\sqrt{a}$, $OB_0=\sqrt{b}$ (senkrecht zur Ebene der Figur) und $OC_0=\sqrt{c}$ die Hauptträgheitsradien des Körpers. Als solcher ist ein rechtwinkliges Parallelepiped (von Messing) angenommen, dessen Kanten 10, 60, 120 mm lang sind (sämmtliche Maasse sind in Millimetern angegeben). Demnach ist $OA_0=17{,}5$, $OB_0=34{,}7$, $OC_0=38{,}7$.

Die Länge des isochronen einfachen Pendels l ist $=100$, es macht in der Minute 189,12 Schwingungen, wenn die Länge des Secundenpendels $=994{,}0$ ist.

$A'O_2MC'$ oder die Fusspunktcurve der Ellipse, deren Halbaxen OA' und OC', und der Kreis $B'O_2mB'$ sind die Durchschnitte der beiden Mäntel der Wellengeschwindigkeitsfläche V_1 oder 6), somit ist

$$OA'=\sqrt{\frac{l^2}{4}-a}=31{,}6,\quad OB'=\sqrt{\frac{l^2}{4}-b}=36{,}0,\quad OC'=\sqrt{\frac{l^2}{4}-c}=46{,}8.$$

Die äussere Fläche der Aufhängpunkte (J) bestimmt man dadurch, dass man $MJ=mi=\frac{l}{2}$, und die innere Fläche der Aufhängpunkte (J') dadurch, dass man $MJ'=mi'=\frac{l}{2}$ macht. Eine durch O senkrecht zur Aufhänglinie OJ gelegte Ebene schneidet die Fläche 2) in einer Curve, deren Axen $OP=v_0$ und OP_1 (senkrecht zur Ebene der Figur) $=v'_0$ beziehungsweise parallel den durch die Aufhängpunkte J und J', i und i' gehenden Schwingungsaxen sind. Diese Curve, welche wir mit v bezeich-

nen, ist symmetrisch gegen ihre beiden Axen, weil 2) die inverse Fläche des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

ist. Denkt man sich nun eine Kugel, deren Durchmesser $= l$ ist, beweglich, so wird sie (v) in den Endpunkten der kleinen Axe berühren, wenn sie durch J und J' geht, und in den Endpunkten der grossen Axe, wenn sie durch i und i' geht. Dies sind die äussersten Lagen der Kugel; geht sie aber zwischen J und i, J' und i' hindurch, also z. B. durch J_0 und J'_0, so schneidet sie (v) in den Endpunkten von zwei gleichen Durchmessern, welche den beiden durch J_0 und J'_0 gehenden Schwingungsaxen parallel sind. Liegen also die Aufhängpunkte auf einem der zwei Mäntel von (J) oder (J'), so geht durch dieselben nur Eine Schwingungsaxe; liegen sie zwischen den beiden Mänteln, so gehen durch sie zwei Schwingungsaxen. Solche Aufhängpunkte endlich, welche ausserhalb des von den Mänteln (J) oder (J') begrenzten Raumes liegen, haben keine Axe, um welche der Körper Schwingungen machen kann, welche mit denjenigen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind.

Die Fläche V_1 hat, wie jede Wellengeschwindigkeitsfläche, vier ausgezeichnete Punkte, in welchen beide Mäntel zusammenstossen; sie liegen auf der Geraden

$$8)\qquad y = 0, \quad \frac{z^2}{x^2} + \frac{c-b}{a-b} = 0.$$

Also haben auch die Flächen (J) und (J') vier solche Punkte, wodurch zwei Durchmesser bestimmt sind, welchen ebenfalls die Gleichungen 8) entsprechen und wovon der eine in Fig. 9 mit $O_1 O_3$ bezeichnet ist. Auf demselben liegen vier Punkte $O_1 O'_1 O'_3 O_3$ von der Eigenschaft, dass durch jeden unendlich viele Schwingungsaxen gehen, welche sämmtlich auf dem Durchmesser senkrecht stehen, weil in diesem Falle die Curve (v), deren Ebene nun senkrecht auf $O O_1$ steht, ein Kreis ist.

Hierdurch ist also nachgewiesen, dass durch den Schwerpunkt von jedem Körper zwei Gerade gehen, die in der Ebene des grössten und kleinsten Trägheitsradius liegen, von der Eigenschaft, dass, wenn der Körper in irgend einem ihrer Punkte aufgehängt wird, er um jede durch diesen Punkt senkrecht zur Aufhänglinie gehende Axe isochrone Schwingungen macht. Einer bestimmten Schwingungsdauer entsprechen jedesmal vier Punkte, z. B. $O_1 O'_1 O'_3 O_3$, bei welchen nach den oben zu Grunde gelegten Maassen der Körper (das Parallelepiped) 189,12 Schwingungen in der Secunde ausführt.

Um diesen Satz praktisch zu erproben, habe ich durch Mechanicus Himmel in Tübingen einen Apparat construiren lassen, der in Fig. 10 dargestellt ist in $\frac{1}{3}$ der wirklichen Grösse. Er besteht aus Eisen, die beiden Lager e sind von Stahl, sowie auch der Keil d, welcher durch die Schraube bei f verschoben und gedreht werden kann. Die cylin-

drische Stahlstange gh ist durch die Schraube g befestigt, so dass sich das Parallelepiped während der Schwingungen nicht drehen kann. Nothwendig ist es, die Zapfenlager zu ölen, weil sonst die Schwingungszeit etwa um $\frac{1}{4}$ Secunde pro Minute verlängert werden kann. Um den Einfluss der mit dem Parallelepiped schwingenden Theile auf die Schwingungszeit zu berechnen, wurden die Trägheits- und statischen Momente des Parallelepipeds $= A$ und A', des Keils $= B$ und B' und der Stange $= C$ und C' für die Stellung des ersteren nach der ersten Figur berechnet und gefunden, dass

$$\frac{A}{A'} = 100, \quad \frac{A+B}{A'+B'} = 99{,}95, \quad \frac{A+B+C}{A'+B'+C'} = 99{,}84$$

ist, welchen Werthen die Schwingungszahlen 189,12, 189,2, 189,3 pro Minute entsprechen, so dass bei der hier vorausgesetzten Zählmethode mit einer Secundenuhr die Versuche in einer für Unterrichtszwecke vollkommen hinreichenden Genauigkeit vorgenommen werden können. Wenn man nun den Winkel nach 8) bestimmt, nämlich $tg\,\omega = \sqrt{\frac{b-c}{a-b}} = 0{,}577$, so findet man, dass das Pendel bei jeder Stellung der Schwingungsaxe, vorausgesetzt, dass ihre Entfernung vom Schwerpunkt immer $= O O_1$ ist, in der Minute 189 Schwingungen macht.

Bei einem zweiten Versuch wurde das Parallelepiped horizontal gestellt, wie in der ersten Figur, und die Schwingungsaxe nach der Linie HK gerichtet; auch hier ist die Zahl der Schwingungen 189. Dreht man aber die Axe um 90^0, so dass sie ebenfalls durch H geht, so erhält man 181,5 Schwingungen, genau mit der Rechnung übereinstimmend. Geht die Axe durch h und ist senkrecht zur Ebene der Figur, so ist die Schwingungszahl 189 (189,12 nach der Rechnung); liegt die Axe dagegen in der Ebene der Figur, so ist die Schwingungszahl 200 (199,77).

Man kann nun noch weitere Versuche machen, indem man kürzere Stahlstangen anwendet und in die Mitten der schmalen Seiten des Parallelepipeds einbohrt, oder wenn man auf der breiten Seitenfläche einen Kreis zieht, dessen Halbmesser $= 18$, und durch einen Punkt des Umfangs ein Loch bohrt senkrecht zu dieser Seitenfläche und einen dünnen Stahlkeil hindurchsteckt, welcher als Schwingungsaxe dient; die Schwingungszahl wird ebenfalls $= 189$ sein. Es wird also dieser Apparat dazu dienen, den mit der Theorie der Trägheitsmomente in unmittelbarer Verbindung stehenden Isochronismus in umfassenderer und allgemeinerer Weise zur Anschauung zu bringen, als es mit dem Kater'schen Reversionspendel möglich ist.

Unter den Aufhängpunkten, welche zwischen den beiden Mänteln der Flächen (J_0) und (J') liegen, sind diejenigen hervorzuheben, deren Schwingungsaxenpaare einen Winkel von 90^0 miteinander bilden. Es seien

J_0 und J'_0 solche Punkte. Die Kugel, deren Durchmesser $J_0J'_0$ ist, schneidet die Curve, welche wir oben mit (v) bezeichneten, in den Endpunkten von zwei Durchmessern, die mit den Axen von (v) einen Winkel von 45° bilden; das Quadrat eines solchen Durchmessers ist also gleich der halben Quadratsumme der Axen, wie sich leicht daraus ableiten lässt, dass (v) die inverse Curve einer Ellipse ist. Aus 4) in Verbindung mit $v_1 = d - \frac{l}{2}$ folgt $v^2 + v_1^2 = \frac{l^2}{4}$. Die Ebene von (v) schneidet die Fusspunktfläche des Ellipsoids 7), deren Durchschnitt mit der xz-Ebene $AQCmA$ ist, in einer zweiten Curve (v'), deren Radien v' sind und deren Halbaxen $\mathfrak{v} = OQ$ und $\mathfrak{v}_1 = OQ'$ (senkrecht zur Ebene der Figur) demnach die gleiche Richtung haben, wie diejenigen von (v).

Nun sind $\mathfrak{v}^2$ und $\mathfrak{v}_1^2$ die beiden Wurzeln der in v_1^2 quadratischen Gleichung 6), also ist

$$9)\quad \frac{1}{4}(\mathfrak{v}^2+\mathfrak{v}_1^2)^2 = x^2\left(\frac{l^2}{4}-\frac{b+c}{2}\right)+y^2\left(\frac{l^2}{4}-\frac{c+a}{2}\right)+z^2\left(\frac{l^2}{4}-\frac{a+b}{2}\right).$$

Dies ist die Fusspunktfläche des Ellipsoids

$$10)\quad \frac{x^2}{\frac{l^2}{4}-\frac{b+c}{2}}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}-\frac{c+a}{2}}+\frac{z^2}{\frac{l^2}{4}-\frac{a+b}{2}}=1,$$

wenn wir einen Radius von 9) oder $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1^2)}$ setzen.

FO_2GF ist der Durchschnitt dieser Fläche mit der xz-Ebene, sie ist dadurch von der Wellengeschwindigkeitsfläche V_1 abgeleitet, dass $OG^2 = \frac{1}{2}(OM^2 + Om^2)$ oder dass das Quadrat ihres Halbmessers gleich der halben Quadratsumme der in gleicher Richtung liegenden Halbmesser von V_1 ist. Die Punkte J_0 und J'_0 erhält man, wenn $GJ_0 = GJ'_0 = \frac{l}{2}$ gemacht wird. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Diejenigen Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers, deren Schwingungsaxenpaare rectangulär sind, liegen auf einer Fläche, die von der Fusspunktfläche eines Ellipsoids 10) durch Verlängerung oder Verkürzung der Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist.

Schliesslich soll noch die Frage untersucht werden: auf welcher Curve liegen die Endpunkte der verschiedenen Schwingungsaxen, welche durch die Punkte der Strecke Ji gehen?

Die Polargleichung der Curve (v), deren Halbaxen OP und OP' wir oben mit v_0 und v'_0 bezeichneten, ist

$$v^2 = v_0^2 \cos^2\alpha + v_0'^2 \sin^2\alpha.$$

Dem Trägheitsradius v entspricht ein Aufhängpunkt J_0 zwischen J und i, durch welchen eine Schwingungsaxe parallel mit V geht und deren halbe

Länge $=1$ sein soll. Sind ξ und η die Coordinaten ihres Endpunktes in Beziehung auf zwei durch J_0 parallel mit v_0 und v'_0 gehende Axen, so ist $\cos\alpha=\xi$ und $\sin\alpha=\eta$. Ferner ist $v^2=ld-d^2$, $QJ_0=d$, also ist

$$v_0^2\xi^2+v_0'^2\eta^2+d^2-ld=0 \quad \text{oder} \quad v_0^2\xi^2+v_0'^2\eta^2+\left(d-\frac{l}{2}\right)^2=\frac{l^2}{4}.$$

Setzt man $d-\frac{l}{2}=\zeta$, so ist

$$11)\qquad v_0^2\xi^2+v_0'^2\eta^2+\zeta^2=\frac{l^2}{4},$$

d. h. die Endpunkte der Schwingungsaxen, welche durch die zwischen J und i liegenden Aufhängpunkte gehen, liegen auf dem Durchschnitt eines Rotationscylinders, dessen Durchmesser gleich der Schwingungsaxe ist, mit dem Ellipsoid 11).

Diese Durchschnittscurve ist in der Figur für die Strecke Hh gezeichnet, sie projicirt sich in der xz-Ebene als die Hyperbel KK_0h; HK ist die halbe Schwingungsaxe für den Punkt H, und H_0K_0 die Projection derselben für den Punkt H_0, sie macht mit der xz-Ebene den Winkel α.

Auch diese Resultate lassen sich mit dem Apparat veranschaulichen; man erhält stets die Schwingungszahl 189, wenn man die Schwingungsaxe nach der Figur stellt.

Reutlingen, November 1882. Dr. O. Böklen.

XXVIII. Ueber das zweigliedrige Pendel.

Nach L. Euler's und D. Bernoulli's Bezeichnungsweise soll im Folgenden unter einem zweigliedrigen (mathematischen) Pendel ein System zweier mathematischer Pendel verstanden werden, von denen das eine einen festen Aufhängepunkt besitzt, während das obere Fadenende des zweiten Pendels an dem schweren Punkte des ersten aufgehängt ist. Der Fall, in welchem die Schwingungen beider Pendel sich in ein und derselben Ebene vollziehen, ist von Euler in einer Abhandlung „De oscillationibus minimis penduli quotcunque ponduscolis onusti" in den Nov. Comm. Acad. Petropol. von 1774 untersucht worden, sowie von Bernoulli in einer Abhandlung desselben Bandes: „De motibus reciprocis compositis." In Liouville's Journal von 1876 sind die Gesetze dieser Pendelbewegungen, jedoch ebenfalls nur für den Fall ebener Schwingungen, von H. Résal entwickelt, anscheinend ohne des Verfassers Kenntniss der oben angeführten Abhandlungen von Euler und Bernoulli. Der allgemeine Fall räumlicher Schwingungen ist jedoch meines Wissens bisher nicht untersucht worden und soll im Folgenden einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

Bezeichnet man die Länge des oberen Pendelfadens mit l_1, die Masse des daran hängenden Punktes mit m_1, die entsprechenden Grössen des unteren Pendels mit l_2 und m_2, und legt man durch den festen Aufhängepunkt des Systems ein rechtwinkliges Coordinatensystem (die positive Z-Axe vertikal nach unten), so lauten die Bewegungsgleichungen der beiden Punkte:

$$1)\quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = T_1 x_1 - T_2(x_2 - x_1), \qquad 4)\quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = T_2(x_2 - x_1),$$

$$2)\quad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = T_1 y_1 - T_2(y_2 - y_1), \qquad 5)\quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = T_2(y_2 - y_1),$$

$$3)\quad m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = T_1 z_1 - T_2(z_2 - z_1) + m_1 g; \qquad 6)\quad m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = T_2(z_2 - z_1) + m_2 g.$$

Da ferner zwischen den Coordinaten der beiden Punkte die beiden Beziehungen bestehen:

$$7)\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l_1^2,$$

$$8)\quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_2^2,$$

so lassen sich die Grössen T_1 und T_2 eliminiren, indem man die Werthe von $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$ u. s. w. aus den Gleichungen 1) bis 6) in die zweiten Ableitungen der Gleichungen 7) und 8) einsetzt.

Führt man diese Operation wirklich aus, so werden die so erhaltenen Bewegungsgleichungen ausserordentlich complicirt und es zeigt sich, dass dieselben mittels der gebräuchlichen Functionen nicht integrirbar sind.

Nimmt man aber kleine Amplituden an, so kann man

$$z_1 = l_1, \quad z_2 - z_1 = l_2, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0$$

setzen, und führt man diese Werthe in die Gleichungen 3) und 6) ein, so ergiebt sich

$$0 = T_1 l_1 - T_2 l_2 + m_1 g, \quad 0 = T_2 l_2 + m_2 g$$

und hieraus

$$T_1 = -\frac{g}{l_1}(m_1 + m_2), \quad T_2 = -\frac{g}{l_2} m_2.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von T_1 und T_2 in 1), 2), 4) und 5) erhält man

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{g}{l_1}(m_1 + m_2) x_1 + \frac{g}{l_2} m_2 (x_2 - x_1), \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{g}{l_2}(x_2 - x_1),$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt_2} = -\frac{g}{l_1}(m_1 + m_2) y_1 + \frac{g}{l_2} m_2 (y_2 - y_1), \qquad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{g}{l_2}(y_2 - y_1),$$

oder endlich, indem man

$$\frac{m_2}{m_1}=\mu, \quad \frac{l_2}{l_1}=\lambda$$

setzt,

$$9)\quad \frac{d^2x_1}{dt^2}=-\frac{g}{l_1}(1+\mu)x_1-\mu\frac{d^2x_2}{dt^2}, \qquad 11)\quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=-\frac{g}{\lambda l_1}(x_2-x_1),$$

$$10)\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=-\frac{g}{l_1}(1+\mu)y_1-\mu\frac{d^2y_2}{dt^2}, \qquad 12)\quad \frac{d^2y_2}{dt^2}=-\frac{g}{\lambda l_1}(y_2-y_1).$$

Diese vier Bewegungsgleichungen bilden zwei von einander unabhängige Systeme von je zweien, nämlich das System aus den Gleichungen 9) und 11) und dasjenige aus den Gleichungen 10) und 12). Da beide Paare von Gleichungen ganz gleich gebildet sind, nur dass an Stelle der Variablen x_1 und x_2 die Variablen y_1 und y_2 treten, so müssen auch ihre Integralgleichungen (bis auf die auftretenden vier willkürlichen Constanten) von gleicher Art sein. Es genügt daher, das eine Paar Gleichungen, z. B. 9) und 11), zu integriren und die erhaltenen Resultate passend zu übertragen.

Man kann die Gleichungen 9) und 11) auf folgende Art integriren: Nach einem bekannten Satze über die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten sind die Werthe

$$x_1=A\cos(\sqrt{\varrho}\,t+\alpha), \quad x_2=A'\cos(\sqrt{\varrho}\,t+\alpha)$$

partikuläre Integrale der Gleichungen 9) und 11). Setzt man diese Werthe von x_1 und x_2 in 9) und 11) ein, so ergiebt sich

$$\varrho A-\frac{g}{l_1}(1+\mu)A+\mu\varrho A'=0, \quad \varrho A'-\frac{g}{l_1\lambda}(A'-A)=0$$

und hieraus

$$\frac{A'}{A}=\frac{\frac{g}{l_1}(1+\mu)-\varrho}{\mu\varrho},$$

$$14)\qquad \lambda\varrho^2-(1+\lambda)(1+\mu)\frac{g}{l_1}\varrho+(1+\mu)\left(\frac{g}{l_1}\right)^2=0.$$

Somit ergeben sich für ϱ die zwei Werthe

$$15)\quad \varrho_1=\frac{g}{2\lambda l_1}\left[(1+\lambda)(1+\mu)+\sqrt{(1+\mu)\{(1+\lambda)^2(1+\mu)-4\lambda\}}\right],$$

$$16)\quad \varrho_2=\frac{g}{2\lambda l_1}\left[(1+\lambda)(1+\mu)-\sqrt{(1+\mu)\{(1+\lambda)^2(1+\mu)-4\lambda\}}\right].$$

Da λ und μ ihrem Wesen nach stets positive Zahlen sind, so sind ϱ_1 und ϱ_2, wie leicht aus 15) und 16) zu zeigen ist, stets reell und positiv, und nie $\varrho_1=\varrho_2$. Setzt man nun

$$\frac{\frac{g}{l_1}(1+\mu)-\varrho_1}{\mu\varrho_1}=K_1, \quad \frac{\frac{g}{l_1}(1+\mu)-\varrho_2}{\mu\varrho_2}=K_2,$$

so sind

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \alpha_1), \\ x_2 = K_1 A_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \alpha_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = A_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \alpha_2), \\ x_2 = K_2 A_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \alpha_2) \end{cases}$$

zwei Paare zusammengehöriger partikulärer Integrale der simultanen Differentialgleichungen 9) und 11), und zwar bedeuten hierin

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ K_1,\ K_2$$

vier Zahlen, die in angegebener Weise von $l_1\lambda$ und μ abhängen, also für jedes einzelne zweigliedrige Pendel bestimmte Werthe haben, während

$$A_1,\ A_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$$

vier beliebige Constanten bedeuten.

Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Differentialgleichungen ist aber die Summe partikulärer Integrale einer Differentialgleichung ein Integral derselben Gleichung. Es ist also auch

$$17)\qquad x_1 = A_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \alpha_1) + A_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \alpha_2),$$

$$18)\qquad x_2 = K_1 A_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \alpha_1) + K_2 A_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \alpha_2).$$

Und zwar stellen diese Gleichungen die vollständigen Integrale von 9) und 11) dar, da sie beide die vier willkürlichen Constanten A_1, A_2, α_1, α_2 enthalten.

Entsprechend erhält man aus 10) und 12)

$$19)\qquad y_1 = B_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \beta_1) + B_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \beta_2),$$

$$20)\qquad y_2 = K_1 B_1 \cos(\sqrt{\varrho_1}\,t + \beta_1) + K B_2 \cos(\sqrt{\varrho_2}\,t + \beta_2).$$

Die acht Constanten A_1, A_2, B_1, B_2, α_1, α_2, β_1, β_2 bestimmen sich in jedem einzelnen Falle eindeutig aus den Anfangscoordinaten der beiden Punkte

$$x_1^0 y_1^0,\ x_2^0 y_2^0$$

und den entsprechenden Anfangsgeschwindigkeiten

$$v_1^0 w_1^0,\ v_2^0 w_2^0.$$

Vor Allem zeigen die Gleichungen 17) bis 20), dass die von den beiden Pendelkörpern beschriebenen Bahnen gleicher Natur sind, nur mit dem Unterschiede, dass die Constanten A_1, A_2, B_1, B_2 in der Gleichung der zweiten Pendelbahn durch $K_1 A_1$, $K_2 A_2$, $K_1 B_1$, $K_2 B_2$ vertreten werden. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Bahnen könnte nur dadurch eintreten, dass eine der Grössen K gleich Null wäre, was aber nicht eintreten kann, so lange weder λ noch μ gleich Null ist.

Ferner zeigen die Gleichungen 17) bis 20), dass die Pendelbahnen dieselben Curven sind, die man an Melde's Universalkaleidophon durch Einleitung zweier elliptischen Bewegungen erhalten kann, oder dieselben Curven, die man nach der Art der Lissajous'schen Figuren erhält, wenn man einen Lichtstrahl nacheinander von vier schwingenden Stimmgabeln reflectiren lässt, von denen je zwei gleiche Schwingungsdauer haben. Diese Curven sind bekanntlich im Allgemeinen transcendent und man kann,

wie auch aus Gleich. 17) bis 20) zu ersehen, t aus den Curvengleichungen nicht eliminiren, also dieselben nicht auf die Form $f(x, y) = 0$ bringen. Dies tritt nur dann ein, wenn das Verhältniss $\sqrt{\varrho_1} : \sqrt{\varrho_2}$ ein rationales ist. Setzt man

$$\frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_2}} = \frac{m}{n},$$

wo m und n die kleinsten ganzen Zahlen bedeuten mögen, in welchen sich das Verhältniss $\sqrt{\varrho_1} : \sqrt{\varrho_2}$ ausdrücken lässt und m der Bedeutung von ϱ_1 und ϱ_2 entsprechend stets grösser als n ist, so sind die Gleichungen der Curven algebraisch und vom Grade $2m$. Damit die Bahnen der Pendelkörper algebraische Curven werden, ist also nothwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{(1+\lambda)(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2(1+\lambda)^2 - 4(1+\mu)\lambda}}{(1+\lambda)(1+\mu) - \sqrt{(1+\mu)^2(1+\lambda)^2 - 4(1+\mu)\lambda}}$$

oder

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{\sqrt{(1+\mu)^2(1+\lambda)^2 - 4(1+\mu)\lambda}}{(1+\lambda)(1+\mu)},$$

$$\frac{(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} = \frac{(1+\mu)(1+\lambda)^2 - 4\lambda}{(1+\lambda)^2(1+\mu)},$$

$$4m^2 . n^2 (1+\lambda)^2(1+\mu) = 4(m^2+n^2)^2 . \lambda,$$

$$21) \qquad \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}(1+\mu) = \left(\frac{m^2+n^2}{m . n}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{m^2}{n^2}}{\frac{m}{n}}\right)^2.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf μ vom ersten Grade, liefert also stets einen und nur einen Werth für μ, sobald λ bestimmt ist. Da aber μ stets positiv sein soll, so folgt

$$\frac{\left(1+\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{m}{n}\right)^2} > \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$$

oder

$$22) \qquad \frac{m^2}{n^2} > \lambda > \frac{n^2}{m^2}.$$

Also nur wenn λ zwischen den beiden angegebenen Grenzen liegt, lässt sich das Verhältniss von $\sqrt{\varrho_1} : \sqrt{\varrho_2} = m : n$ herstellen.

In Bezug auf λ ist 21) quadratisch; für ein bestimmtes μ erhalte ich also zwei Werthe λ, welche stets reciprok sind; denn $\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$ ändert sich nicht, wenn man λ durch $\frac{1}{\lambda}$ ersetzt. Da aber λ positiv sein soll, so ist

$$\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} \geqq 4,$$

also nach 21)

$$\frac{(m^2+n^2)^2}{m^2.n^2}\,\frac{1}{1+\mu} \geqq 4$$

oder

$$23)\qquad \mu \leqq \frac{(m^2-n^2)^2}{4\,m^2.n^2}.$$

Genügt also μ dieser Bedingung, so erhält man aus 21) stets zwei reelle positive reciproke Werthe für λ, welche für den Grenzfall $\mu = \frac{(m^2-n^2)^2}{4\,m^2 n^2}$ beide einander gleich und $=1$ werden.

Aus den Ungleichungen 22) und 23) geht auch hervor, dass sich jedes beliebige Verhältniss $m:n$ herstellen lässt, mit Ausnahme des Falles $m=n$, in welchem die Bewegungen der beiden Pendelkörper die zweier einfacher Pendel wären.

Was die Umlaufszeit der beiden Pendel betrifft, so zeigen die Gleichungen 17) bis 20), dass x_1, y_1, x_2, y_2 unverändert bleiben, wenn man t um $\frac{2q\pi.m}{\sqrt{\varrho_1}} = \frac{2q\pi.n}{\sqrt{\varrho_2}}$ vermehrt, worin q eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Es ist also

$$\frac{2\pi.m}{\sqrt{\varrho_1}} = \frac{2\pi.n}{\sqrt{\varrho_2}}$$

die Zeit, die jedes der beiden Pendel gebraucht, um einen vollen Umlauf zu machen.

Wesentlich vereinfachte Curven beschreiben die beiden Pendelkörper wenn eine der vier Grössen A_1, A_2, B_1, B_2 verschwindet, was man stets durch passende Wahl der Anfangsbedingungen erreichen kann. Setzt man

$$24)\qquad \frac{x_2^0}{x_1^0} = \frac{v_2^0}{v_1^0} = K_1, \text{ so wird } A_2 = 0,$$

$$25)\qquad \frac{x_2^0}{x_1^0} = \frac{v_2^0}{v_1^0} = K_2, \text{ ,, ,, } A_1 = 0,$$

$$26)\qquad \frac{y_2^0}{y_1^0} = \frac{w_2^0}{w_1^0} = K_1, \text{ ,, ,, } B_2 = 0,$$

$$27)\qquad \frac{y_2^0}{y_1^0} = \frac{w_2^0}{w_1^0} = K_2, \text{ ,, ,, } B_1 = 0.$$

Ist nur eine der Gleichungen 24) bis 27) erfüllt, so entstehen diejenigen Curven, welche man am Kaleidophon durch Combination einer elliptischen und einer geradlinigen Bewegung erhält oder auch dadurch, dass man einen Lichtstrahl nach einander von drei Stimmgabeln reflectiren lässt, von denen zwei unisono klingen. Sind dagegen gleichzeitig Gleichungen 24) und 27) oder gleichzeitig 25) und 26) erfüllt, so entstehen die Curven, welche man durch zwei geradlinige Bewegungen sich zusammengesetzt denken kann, also die eigentlichen Lissajous'schen

Figuren, und zwar diejenigen, bei welchen die beiden Schwingungsrichtungen senkrecht aufeinander stehen. Da aber die Gleichungen 17) bis 20) bestehen bleiben, wenn auch die X- und Y-Axe keinen rechten Winkel einschliessen, so folgt, dass man durch passende Wahl der Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten auch zwei geradlinige Bewegungen unter beliebigen Winkeln combiniren kann, was sich natürlich auch direct nachweisen lässt. Wollte man endlich gleichzeitig den Gleichungen 24) und 26) oder gleichzeitig 25) und 27) genügen, so fallen offenbar die beiden Pendelbahnen in ein und dieselbe Vertikalebene und werden gerade Linien. Die Dauer einer ganzen Schwingung beträgt alsdann $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_1}}$, resp. $\frac{2\pi}{\sqrt{\varrho_2}}$.

Breslau. M. Luxenberg, Stud. math.

XXIX. Eine geometrische Auffassung der homogenen Coordinaten einer Geraden.

Sind die Gleichungen zweier Ebenen

$$u_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + \partial_1 = 0, \quad u_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + \partial_2 = 0,$$

so hat die beiden gemeinschaftliche Gerade bekanntlich die Richtung:

$$(bc):(ca):(ab).$$

Diese Determinanten seien die Coordinaten einer Strecke s unserer Geraden $u_1 = 0 \mid u_2 = 0$, so dass im orthogonalen System:

$$s^2 = (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2.$$

Die Ebene des Büschels, welche durch den Nullpunkt geht, hat die Gleichung

$$(u\partial) = 0$$

und ihre Stellung, die wir Stellung der Geraden s nennen wollen, d. h. die Richtung ihrer Normalen ist:

$$(a\partial):(b\partial):(c\partial).$$

Dies seien wiederum Coordinaten einer Strecke t, die somit auf $(u\partial) = 0$ normal steht, und es ist:

$$t^2 = (a\partial^2) + (b\partial^2) + (c\partial)^2.$$

Die bekannte Identität

$$(a\partial)(bc) + (b\partial)(ca) + (c\partial)(ab) = 0$$

zeigt, dass die Strecken s und t auf einander normal stehen. Die homogenen Coordinaten*

* Plücker, Geometrie § 1; — Baltzer, Anal. Geometrie § 48.

$$(bc),\ (ca),\ (ab);\quad (a\partial),\ (b\partial),\ (c\partial)$$

der Geraden können also als die Coordinaten zweier Strecken aufgefasst werden, von denen die erste auf der Geraden liegt, die zweite [auf der Geraden und] auf der Ebene des Büschels durch den Nullpunkt senkrecht steht.

Wir führen nun die Ebenen mit den Stellungen [d. h. normal zu] s und t ein:

$$S \equiv (bc)x + (ca)y + (ab)z = 0, \quad T \equiv (a\partial)x + (b\partial)y + (c\partial)z = 0,$$

deren Normalgleichungen* sind:

$$S:s = 0, \quad T:t = 0.$$

Die gemeinschaftliche Gerade beider Ebenen ist das Loth vom Nullpunkte auf $u_1 = 0 \mid u_2 = 0$ und dies hat demnach die Richtung

$$\begin{vmatrix} (ca) & (ab) \\ (b\partial) & (c\partial) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (ab) & (bc) \\ (c\partial) & (a\partial) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (bc) & (ca) \\ (a\partial) & (b\partial) \end{vmatrix}.$$

Dies seien wieder Coordinaten einer Strecke n. Das Quadrat derselben werde unter Benutzung der obigen Identität $(a\partial)(bc) + \ldots = 0$ berechnet, so findet man

$$n = s.t.$$

Bezeichnen wir jetzt das Loth vom Nullpunkt auf die Gerade der Länge nach mit δ, so finden wir die Coordinaten $\delta_1 \mid \delta_2 \mid \delta_3$ aus den Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad S = 0.$$

Da die Determinante $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 = s^2$, so erhalten wir

$$-s^2\delta_1 = n_1, \quad -s^2\delta_2 = n_2, \quad -s^2\delta_3 = n_3,$$

wo $n_1 \mid n_2 \mid n_3$ die Coordinaten von n sind; und es ist demnach

$$\delta = -\frac{t}{s} = -\frac{n}{s^2}.$$

Die Ebene, welche auf δ normal steht, hat die Gleichung

$$N \equiv \begin{vmatrix} x & (bc) & (a\partial) \\ y & (ca) & (b\partial) \\ z & (ab) & (c\partial) \end{vmatrix} + \left(\frac{n}{s}\right)^2 = 0$$

und ihre Normalform ist $N:n = 0$ oder $det:n - \delta = 0$.

Die Ebenen $S = 0$, $T = 0$, $N = 0$ stehen normal auf einander und sollen orthogonales Ebenensystem der Geraden in Bezug auf den Nullpunkt heissen. Letzterer beeinflusst allerdings die Lage nur bei $T = 0$ und $N = 0$.

Gewöhnlich** benutzt man zur Bestimmung der Geraden die drei Ebenen des Büschels, welche den Axen parallel sind [dies ist wenigstens

* Hesse, Vorlesungen über Raumgeometrie S. 16.

** Baltzer, Analytische Geometrie § 50, 1.

die geometrische Bedeutung der Gleichungen]. Da nämlich $u_1 + \varkappa u_2 = 0$ der x-Axe parallel, wenn $a_1 + \varkappa a_2 = 0$, so sind diese Gleichungen

$$(ca)z - (ab)y = (a\partial), \quad (ab)x - (bc)z = (b\partial), \quad (bc)y - (ca)x = (c\partial).$$

Unser obiges Ebenensystem gestattet, die Lösung zweier Aufgaben unmittelbar niederzuschreiben: Hat der Punkt P' die Coordinaten $x'|y'|z'$, so ist sein Abstand von der Geraden*

$$\sqrt{(T':t)^2 + (N':n)^2},$$

wobei T' und N' die Werthe von T und N für den Punkt P' bezeichnen. Denn da $T = 0$ und $N = 0$ zwei auf einander normale Ebenen der Geraden sind, so können die Abstände des Punktes P' aus der Normalform abgelesen werden** und sind gleich $T':t$, $N':n$, wodurch die Quadratdistanz gegeben.

Ist eine zweite Gerade $u'_1 = 0$, $u'_2 = 0$ gegeben, so hat der kürzeste Abstand*** der Geraden die gemeinschaftliche Richtung $S = 0 | S' = 0$:

$$\begin{vmatrix} (ca) & (ca)' \\ (ab) & (ab)' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (ab) & (ab)' \\ (bc) & (bc)' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (bc) & (bc)' \\ (ca) & (ca)' \end{vmatrix},$$

welche wieder als Coordinaten einer Strecke e betrachtet werden. Der kürzeste Abstand selbst ist nun die Projection einer beliebigen die Gerade verbindenden Strecke PP' mit der Richtung l auf die Richtung e:

$$dist = PP' \cos le = (x'-x)\cos xe + (y'-y)\cos ye + (z'-z)\cos ze;$$

nun ist aber $\cos xe = e_1 : e$, $\cos ye = e_2 : e$, $\cos ze = e_3 : e$ und demnach

$$e.dist = \begin{vmatrix} x'-x & (bc) & (bc)' \\ y'-y & (ca) & (ca)' \\ z'-z & (ab) & (ab)' \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man in $|(bc), (bc)', x'| + |(bc)', (bc), x|$ und berücksichtigt das Ebenensystem parallel den Axen, wonach $(ca)'z - (ab)'y = (a\partial)'$, so erhält man die bekannte Formel†

$$e.dist = (bc)(a\partial)' + (ca)(b\partial)' + (ab)(c\partial)' + (bc)'(a\partial) + (ca)'(b\partial) + (ab)'(c\partial)$$

hier in der Form

$$e.dist = st' \cos st' + s't \cos s't.$$

Dies gleich Null gesetzt, giebt auch die Bedingung für die Existenz eines gemeinschaftlichen Punktes beider Geraden.

Zusatz. Sind die beiden Ebenen $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ in ihrer Normalform gegeben

---

* Vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie Cap. III Art. 44; — Briot-Bouquet Nr. 456; — Hesse, Vorlesungen VI.

** Hesse a. a. O. S. 18.

*** Vergl. auch Cayley, Quart. Journ. XV, 164; — Mollame, Rend. di Napoli XVII, 106 und die obigen.

† Baltzer, § 51, 10 und § 50, 5 (direct aus $u_1 = 0$, $u_2 = 0$).

$$v_1 \equiv x \cos n_1 x + y \cos n_1 y + z \cos n_1 z - n_1 = 0,$$
$$v_2 \equiv x \cos n_2 x + y \cos n_2 y + z \cos n_2 z - n_2 = 0,$$

so ist $v_1 + \varkappa v_2 = 0$ nicht die Normalform einer beliebigen Ebene der Geraden, doch ist der Factor μ, welcher sie dazu macht, leicht zu finden; denn es ist

$$\mu^2 = 1 + 2\varkappa\nu + \varkappa^2,$$

wobei $\nu = \cos n_1 n_2$. Es ist dann ferner

$$\mu \cos n_1 n_3 = \cos n_1 x\,(\cos n_1 x + \varkappa \cos n_2 x)$$
$$+ \cos n_1 y\,(\cos n_1 y + \varkappa \cos n_2 y) + \cos n_1 z\,(\cos n_1 z + \varkappa \cos n_2 z),$$
$$\mu \cos n_1 n_3 = 1 + \varkappa\nu, \quad \mu \cos n_2 n_3 = \nu + \varkappa;$$

daraus folgt

$$\mu^2 \sin^2 n_1 n_3 = \varkappa^2(1-\nu^2), \quad \mu^2 \sin^2 n_2 n_3 = 1 - \nu^2,$$

wonach das Schnittverhältniss, wie bekannt,* sich ergiebt:

$$\sin n_1 n_3 : \sin n_2 n_3 = \varkappa,$$

nur dass er hier für die Normalen bewiesen. Die sämmtlichen Normalen der Ebenen der Geraden sind Sehnen eines Kreises der Ebene $S=0$ mit dem Durchmesser δ und der Tangente t im Gegenpunkt des Nullpunktes.

Berlin, Februar 1883. A. Thaer.

XXX. Ein Paradoxon der Theorie der Collineation.

Die Formeln

$$\mu\xi = ax + by + cz, \quad \mu\eta = dx + ey + fz, \quad \mu\zeta = gx + hy + iz$$

stellen eine collineare Beziehung zwischen den $(\xi\eta\zeta)$-Punkten und den (xyz)-Punkten der Ebene her. Die Aufgabe: „die sich selbst entsprechenden Punkte der Ebene zu finden“, fordert die Auflösung der Gleichungen:

I) $\mu x = ax + by + cz, \quad \mu y = dx + ey + fz, \quad \mu z = gx + hy + iz$

für die vier Unbekannten μ, x, y, z.

Dass diese Auflösung drei Werthsysteme $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ liefert, zu welchen nach beliebiger Bestimmung eines z auch der Werth von μ sich leicht zugesellt, schliesst man am besten aus der geometrisch sofort evidenten Thatsache, dass eine Collineation mit vier doppelt einander zugewiesenen Bestimmungspunkten nicht mehr die in obigen Formeln vorhandene Allgemeinheit aufweisen, sondern den speciellen Fall zweier vollständig sich deckender ebener Systeme ergeben würde. (Wegen der analytischen directen Lösung vergl. Clebsch-Lindemann, Geom., S. 261.)

---

* Hesse, Vorl. III u. V; — Baltzer, a. a. O. § 51, 7.

Die Bestimmung jener drei Werthsysteme werde nun angebahnt durch Aufstellung zweier vollständig gleichgebauter Gleichungen zweiten Grades, welche jene Systeme I) gleichfalls zu Wurzeln besitzen.

Die Kegelschnitte

$$\text{II)}\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ ax+by+cz & dx+ey+fz & gx+hy+iz \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ ax+by+cz & dx+ey+fz & gx+hy+iz \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

gehen, bei ganz beliebiger Wahl der Zahlen ABC, $A'B'C'$, durch jene Doppelpunkte, wie ein Blick auf die Gleichungen I) zeigt.

Da jedoch die Bestimmung der sechs Grössen A, B, C, A', B', C' eine ganz willkürliche war, so werden im Allgemeinen die Kegelschnitte II) vier Durchschnittspunkte aufweisen, von denen also einer dadurch ausgezeichnet erscheint, dass er, obwohl den Gleichungen II) genügend, doch dem System I) nicht angehört.

Es soll im Folgenden unsere Aufgabe sein, diesen ausgezeichneten Schnittpunkt, der offenbar von der Wahl der Grössen A, B, C, A', B', C' auf das directeste abhängt, zu fixiren.

Setzen wir

$$\lambda A = ax_1 + by_1 + cz_1, \quad \lambda B = dx_1 + ey_1 + fz_1, \quad \lambda C = gx_1 + hy_1 + iz_1$$

und denken uns dieses System nach x_1, y_1, z_1, λ aufgelöst, so ersieht man aus der neuen Form der Kegelschnitte II) (es sei nur der erste derselben aufgeführt):

$$\text{II}')\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ ax+by+cz & dx+ey+fz & gx+hy+iz \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \end{vmatrix} = 0,$$

dass derselbe nicht nur durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$, sondern auch durch den conjugirten Punkt $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ hindurchgeht.

Hiermit ist die geometrische Bedeutung der Zahlen A, B, C klargelegt, und ein Fingerzeig gegeben, in welcher Richtung auf jenen „vierten“ Punkt $x_0 y_0 z_0$ hinzuarbeiten ist.

In der That: denken wir uns für den zweiten Kegelschnitt II) ebenfalls die Bestimmung von $x_2 y_2 z_2$ geleistet und betrachten folgende Verbindungsgeraden:

$$\text{III)}\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{IV)}\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \\ ax_2+by_2+cz_2 & dx_2+ey_2+fz_2 & gx_2+hy_2+iz_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden III) und IV) ist der gesuchte ausgezeichnete Schnittpunkt: er liegt zugleich auf beiden Kegelschnitten II), ohne doch im Allgemeinen das System I) zu erfüllen.

Erfüllen nämlich die Coordinaten x_0, y_0, z_0 die Gleichung III), was man auch schreiben kann:

$$0=\begin{vmatrix} ax_0+by_0+cz_0 & dx_0+ey_0+fz_0 & gx_0+hy_0+iz_0 \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+cz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \\ ax_2+by_2+cz_2 & dx_2+ey_2+fz_2 & gx_2+hy_2+iz_2 \end{vmatrix}$$

und zugleich

$$\text{IV)}\quad 0=\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+ey_1+fz_1 \\ ax_2+by_2+cz_2 & dx_2+ey_2+fz_2 & gx_2+ey_2+fz_2 \end{vmatrix},$$

wozu wir noch die Identität fügen

$$0=\begin{vmatrix} ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \\ ax_2+by_2+cz_2 & dx_2+ey_2+fz_2 & gx_2+hy_2+iz_2 \end{vmatrix},$$

so muss nach bekanntem Satze die weitere Identität bestehen

$$0=\begin{vmatrix} ax_0+by_0+cz_0 & dx_0+ey_0+fz_0 & gx_0+hy_0+iz_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ ax_1+by_1+cz_1 & dx_1+ey_1+fz_1 & gx_1+hy_1+iz_1 \end{vmatrix}.$$

(Man entwickle einfach jene drei Determinanten nach Elementen der ersten Zeile.) Dies zeigt, dass jener Schnittpunkt $x_0 y_0 z_0$ in der That jenem Kegelschnitte II'), der $x_1 y_1 z_1$ enthält, angehört; durch Vertauschung der Indices zeigt man, dass er ebenso dem zweiten jener Kegelschnitte angehört.

Dass jener Punkt $x_0 y_0 z_0$ zugleich im Allgemeinen dem System der Wurzelpunkte von I) nicht angehört, folgt einfach aus der Bemerkung, dass seine Lage von der Wahl der — ganz beliebigen — A, B, C, A', B', C' abhängt.

München. Frits Hofmann.

XVIII.

Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung.

Von

GUIDO WEICHOLD.

Hierzu Tafel VII und VIII.

Einleitung.

Zweck der folgenden Untersuchung ist, die Realität der Periodicitätsmoduln derjenigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung zu bestimmen, welche zu algebraischen Gleichungen mit reellen Coefficienten von beliebigem Geschlechte p gehören. Gründen wird sich diese Bestimmung auf die Betrachtung der solchen Gleichungen mit reellen Coefficienten entsprechenden Riemann'schen Flächen. Die letzteren sind aber speciell symmetrische Flächen, wie Herr Professor Klein in seiner 1882 erschienenen Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" (S. 74)[1]) gezeigt hat. Daher beschäftigt sich die Untersuchung

1. mit den symmetrischen Flächen im Sinne der *analysis situs*,
2. mit den Periodicitätsmoduln der zu solchen symmetrischen Flächen gehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung.

Der Gedanke, die Realität jener Periodicitätsmoduln zu untersuchen, ist durchaus kein neuer, vielmehr liegen schon verschiedene Arbeiten über diesen Gegenstand vor. Als älteste ist zu nennen die Berliner Dissertation von Henoch vom Jahre 1865 mit dem Titel: „De Abelianarum functionum periodis", welche freilich nur den Fall der hyperelliptischen Functionen und auch diesen nicht in allgemeiner Weise behandelt.

Die zweite Arbeit ist dann die Abhandlung des Herrn Professor Klein in Band X der Mathem. Annalen (S. 365 flgg.), welche den Titel führt: „Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades". Dieselbe führt für den speciellen Fall $p = 3$ jene Bestimmung aus und schliesst dabei noch einen gewissen äussersten Fall, der auch in unserer

1) Diese Schrift, welche im Folgenden noch mehrfach zu citiren sein wird, soll immer kurz mit R. Th. bezeichnet werden.

Untersuchung eine Sonderstellung einnehmen wird, aus; im Uebrigen stützt sie sich wesentlich auf die Gestalten jener Curven und geht von ihnen erst zu den Riemann'schen Flächen über. Eine Verallgemeinerung dieser Methode war, weil die Lehre von den Gestalten der algebraischen Curven im Falle eines beliebigen p noch nicht genügend ausgebildet ist, nicht möglich, und es ist vor allem die Erkenntniss des schon oben angegebenen Ausgangspunktes von den Riemann'schen Flächen selbst, welche den leitenden Gedanken der vorliegenden Untersuchung bildet. Um so mehr möchte der Verfasser gleich an dieser Stelle erwähnen, dass er jene Erkenntniss sowie überhaupt die ganze Anregung zu der vorliegenden Arbeit und mannigfache Förderung bei derselben seinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Klein verdankt.

Endlich hat in neuester Zeit Herr Dr. Hurwitz in Band LXXXXIV von Crelle's Journal (S. 1 flgg.) eine Arbeit unter dem Titel: „Ueber die Perioden solcher eindeutiger $2n$-fach periodischer Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter rationaler Functionen besitzen und für reelle Werthe ihrer n Argumente reell sind" veröffentlicht, welche ebenfalls derartige Realitätsuntersuchungen anstellt, und zwar, wie der Titel zeigt, für einen noch allgemeineren Fall als den der Abel'schen Integrale; dem entsprechend sind auch die Resultate derselben nicht so speciell und einfach wie diejenigen, welche im Folgenden abgeleitet werden sollen.[1])

Was ferner die symmetrischen Riemann'schen Flächen anbelangt, deren Betrachtung die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet, so sind auch diese schon mehrfach behandelt worden, wenn auch zum Theil unter ganz anderen Gesichtspunkten. Es hat sich nämlich Herr Professor Klein in den Bänden VII und X der Mathem. Annalen in den Aufsätzen mit dem Titel: „Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen" mit diesen Flächen eingehender beschäftigt und daselbst auch schon die Hauptunterscheidung derselben in orthosymmetrische und diasymmetrische Flächen[2])

---

1) Den näheren Unterschied zwischen dieser Arbeit des Herrn Dr. Hurwitz und der vorliegenden anzugeben, würde zu weit führen; es sei nur gesagt, dass den in jener Arbeit unterschiedenen $n+1$ (resp. $p+1$) Classen in dieser $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten (vergl. § 2 des Textes) gegenüberstehen.

2) Diese Bezeichnung findet sich allerdings noch in keiner Publication angewendet; sie wurde zuerst in einem im Wintersemester 1881/82 von Herrn Professor Klein abgehaltenen Seminar eingeführt, in welchem derselbe auch die weiter unten erwähnte weitergehende Classification mittheilte und bei welchem auch der Verfasser die unmittelbare Anregung für die vorliegende Arbeit empfing.

Die der Classe der diasymmetrischen Flächen angehörigen sogenannten Doppelflächen kennt man übrigens schon länger, und zwar wohl seit Möbius, welcher zuerst solche Flächen betrachtete, aber freilich nicht als symmetrische Riemann'sche Flächen ansah.

Es scheint übrigens dieser Unterschied zwischen den ortho- und diasymmetrischen Flächen und die ihm entsprechende Eintheilung der algebraischen Curven

aufgestellt. Daneben hat Herr Schottky in seiner Dissertation vom Jahre 1875 eine bestimmte Classe solcher Flächen betrachtet, freilich ohne sie irgendwie als Riemann'sche Flächen anzusehen.[1]) Alsdann hat Herr Professor Klein in seiner Eingangs genannten Schrift (R. Th. S. 72 flgg). sowie in einer Note in Band XIX der Mathem. Annalen (S. 565 — 568) die symmetrischen Flächen weiter classificirt nach der Anzahl der sogenannten Uebergangscurven.

Schliesslich möchten wir noch bezüglich der im Folgenden angewandten Darstellung der symmetrischen Flächen durch sog. Fundamentalbereiche d. h. durch berandete Flächenstücke mit „bezogenen" Rändern hervorheben, dass dieselbe ebenfalls von Herrn Professor Klein angegeben wurde, und zwar zuerst in der bereits genannten Note in Band XIX der Annalen, sodann aber in der jüngst erschienenen Abhandlung in Band XXI der Mathem. Annalen (S 141 flgg.), welche den Titel führt: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Theorie".

I. Abschnitt.

Die symmetrischen Flächen.

---

§ 1.

Vorbemerkung.

Unter symmetrischen Flächen werden solche Flächen verstanden, welche eine Transformation in sich selbst zulassen, bei welcher die Winkel umgelegt werden[2]) und welche zweimal angewandt zur Identität zurückführt.

---

auch noch in anderer Beziehung von principieller Bedeutung werden zu sollen. So ist Herr Professor Klein durch die jüngst von dem französischen Geometer Laguerre in den Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris (tome 94 [1882 I] pag. 778, 832, 933, 1033 u. 1166) erschienenen Aufsätze, in welchen sehr verschiedene Probleme der Geometrie dadurch vereinfacht, vor allem weniger vieldeutig gemacht werden, dass den Curven immer ein bestimmter Sinn beigelegt wird, darauf aufmerksam geworden, dass sich diese Methode immer nur auf die den orthosymmetrischen Flächen entsprechenden Curven ausdehnen lässt, dagegen nicht auf die den diasymmetrischen Flächen entsprechenden.

1) Diese Dissertation erschien in Band LXXXIII von Crelle's Journal unter dem Titel: „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen". Die besondere Art seiner symmetrischen Flächen besteht in schlichten mit $p+1$ Randcurven versehenen Ebenenstücken, welche doppelseitig zu denken sind. Dasselbe Problem hatte übrigens schon Riemann in Angriff genommen; man vergl. Fragment XXV seines Nachlasses.

2) Wegen dieses Ausdrucks sowie überhaupt der ganzen Definition vergl. R. Th. pag. 70 u. 72.

Diese Transformation soll im Folgenden immer nur kurz die symmetrische Umformung der Flächen genannt werden.[1]) Ferner werden im Folgenden solche Punkte, welche bei der symmetrischen Umformung in sich selbst übergehen, sich selbst symmetrische, je zwei Punkte, welche dabei in einander übergehen, ein Paar zu einander symmetrische Punkte, solche Curven, deren sämmtliche Punkte bei der symmetrischen Umformung in sich übergehen, Uebergangscurven[2]), solche Curven dagegen, welche bei jener Umformung durch gegenseitige Vertauschung ihrer Punkte in sich übergehen, sich selbst symmetrische Curven und endlich je zwei Curven, von denen die eine in die andere übergeht, ein Paar zu einander symmetrische Curven genannt werden. Bei den sich selbst symmetrischen Curven kann man zweierlei Arten unterscheiden, je nachdem dieselben Uebergangscurven schneiden oder nicht. Im ersteren Falle ist die Lagerung der zu einander symmetrischen Punkte auf einer solchen Curve diejenige, welche in Fig. 1 für den Fall, dass die Curve sich nicht selbst schneidet, angegeben ist; es sind dabei a und d die beiden Uebergangscurvenpunkte, b und b' und ebenso c und c' Paare von zu einander symmetrischen Punkten. Im zweiten Falle dagegen sind die Punkte so gelagert, wie es Fig. 2 zeigt, wenn nämlich a und a', b und b', c und c' Paare symmetrischer Punkte sind. Es wird dementsprechend auch im Folgenden von sich selbst symmetrischen Curven der ersten oder der zweiten Art gesprochen werden, je nachdem dieselben die Uebergangscurven schneiden oder nicht.

Ueber die Natur der im Folgenden zu betrachtenden symmetrischen Flächen sollen nun aber noch einige beschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Erstens sollen sie völlig geschlossene solche Flächen sein, die sich allerdings unter Umständen auch ins Unendliche erstrecken können. Zweitens sollen dieselben frei sein von solchen Stellen, in denen sich eine unendlich grosse Zahl von Unstetigkeiten, wie Spitzen oder Kanten häuft; und endlich soll auch das Geschlecht der Flächen kein unendlich grosses oder gewissermassen ins Unendliche wachsendes sein, so dass man also immer im Stande ist, durch eine endliche Anzahl von geeigneten Zerschneidungen die Flächen in lauter auf die Ebene ausbreitbare Stücke zu zerlegen.

---

1) Es kann natürlich der Fall vorkommen, dass bei einer und derselben Fläche verschiedene solche Transformationen möglich sind, also dieselbe mehrere Symmetrien zugleich besitzt. Solche Fälle sind aber hier von keinerlei besonderer Bedeutung, und es wird daher immer nur der Fall einer einzigen Symmetrie in Betracht gezogen werden.

2) Da für die hier anzustellenden Betrachtungen isolirte sich selbst symmetrische Punkte immer nur mit unendlich kleinen Uebergangscurven zu identificiren sind, so wird im Folgenden überhaupt nur von Uebergangscurven gesprochen werden.

Die folgende Betrachtung der symmetrischen Flächen wird sich nun im Wesentlichen auf nachstehende drei Punkte erstrecken:

1. die Classificirung derselben,
2. die Zurückführung derselben auf Normalformen,
3. die schematische Darstellung derselben durch Fundamentalbereiche.

Der Uebersichtlichkeit halber wird aber der blossen Angabe der Eintheilung der symmetrischen Flächen zunächst eine Tabelle der späterhin als Normalformen zu benutzenden symmetrischen Flächen für die Fälle $p=1,2,3,4$ folgen. Dann erst wird jene Classification der symmetrischen Flächen begründet werden.

A. Classificirung der symmetrischen Flächen.

§ 2.

Die Classen und Arten der symmetrischen Flächen.

Bei den symmetrischen Flächen bieten sich neben dem Geschlechte oder der Anzahl der die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitte noch zwei weitere Eintheilungsgründe dar. Der erste ist derjenige, welcher zur Unterscheidung der symmetrischen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische Flächen führt. Er lässt sich folgendermassen charakterisiren. Zerschneidet man eine symmetrische Fläche längs aller Uebergangscurven, welche sie besitzt, so zerfällt dieselbe entweder in zwei getrennte Theile oder nicht. Im ersteren Falle heisst sie eine orthosymmetrische, im letzteren eine diasymmetrische.[1]) Für diese beiden Gattungen von symmetrischen Flächen soll im Folgenden immer der Ausdruck „Classe“ gebraucht werden.

Einen weiteren Eintheilungsgrund aber bildet die Anzahl der Uebergangscurven der symmetrischen Flächen. Es kann nämlich bei einer orthosymmetrischen Fläche vom Geschlechte p die Anzahl der Uebergangscurven, welche fortan kurz mit λ bezeichnet werden soll, die folgenden Werthe haben:

$$\lambda = p+1,\quad p-1,\quad p-3\ldots\ (\text{excl. } 0),$$

dagegen bei einer diasymmetrischen Fläche vom Geschlechte p die Werthe:

$$\lambda = p,\quad p-1,\quad p-2\ldots 2,\ 1,\ 0,$$

so dass bei einem und demselben Geschlechte p $p+1$ diasymmetrische und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrische Flächen existiren, wenn man unter dem Zeichen [ ] die grösste in dem eingeklammerten Ausdruck enthaltene ganze Zahl versteht. Man wird also hiernach im Ganzen:

$$\left[\frac{p+2}{2}\right] + p + 1 = \left[\frac{3p+4}{2}\right]$$

1) Die Bedeutung dieser Namen wird später (vergl. S. 336 Anm.) klar werden.

verschiedene Gruppen von symmetrischen Flächen bei einem und demselben p unterscheiden können, und diese Gruppen sollen im Folgenden die „Arten" der symmetrischen Flächen genannt werden.

Für die hiermit aufgestellten Classen und Arten der symmetrischen Flächen lässt sich nun eine höchst bequeme, kurze Bezeichnungsweise einführen. Deutet man nämlich die beiden Classen von symmetrischen Flächen nur noch durch die beiden Vorzeichen $+$ und $-$ an und versteht, wie schon vorher, unter p und λ das Geschlecht und die Uebergangscurvenanzahl, so kann man diese dreierlei Zeichen zu Symbolen von der Form:

$$\pm (p, \lambda)$$

vereinigen, von denen offenbar jedes die drei Bestimmungsstücke einer Art von symmetrischen Flächen enthält und darum als der „Charakter" einer solchen Art bezeichnet werden soll. Natürlich werden in den Symbolen die Werthe von p und λ so gewählt sein müssen, dass sie mit einander verträglich sind d. h. dass λ einen der Werthe hat, welche bei dem bestimmten p und der betreffenden Classe zulässig sind.

§ 3.
Repräsentanten der symmetrischen Flächen für die Fälle $p = 1, 2, 3, 4$.

Die auf Tafel II befindliche Tabelle der späterhin als Normalflächen zu betrachtenden und darum schon jetzt so bezeichneten symmetrischen Flächen giebt zunächst für alle Arten der symmetrischen Flächen mit Ausnahme allein derjenigen vom Charakter $-(p, 0)$ in den Fällen $p = 1, 2, 3, 4$ je einen Repräsentanten und dann für sich in den Fällen $p = 1$ und $p = 2$ je einen solchen der diasymmetrischen Flächen ohne Uebergangscurven an. Diese Trennung der Art vom Charakter $-(p, 0)$ von den übrigen Arten rechtfertigt sich durch die Unmöglichkeit, sie in derselben einfachen Weise darzustellen wie diese übrigen.

Zum Verständniss dieser Normalflächen ist Folgendes zu bemerken. Jede Fläche vom Charakter $+(p, \lambda)$ besteht aus einem doppelseitig zu denkenden λ-fach berandeten Ebenenstück, auf welches sich $\frac{p - \lambda + 1}{2}$ Henkelpaare, welche je nur einseitig zu denken sind, aufsetzen. Jede Fläche vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ aber besteht aus einem λ-fach berandeten, ebenfalls doppelseitig zu denkenden Flächenstück, welches $p - \lambda + 1$ Verdrehungen aufweist, vermöge deren je ein unmittelbarer Uebergang von der einen Flächenseite zur anderen stattfindet und um welche alle je eine und dieselbe Uebergangscurve herumführt. Der einfachste Fall einer solchen Fläche ist der der Fläche vom Charakter $-(1, 1)$, des sogenannten Möbiusschen Blattes. Bei allen diesen Flächen der Tabelle vom Charakter $\pm (p, \lambda > 0)$ werden durch die Ränder der doppelseitigen Flächenstücke die Uebergangscurven derselben repräsentirt.

Was dann weiter die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ anbelangt, welche in der ganzen Untersuchung immer eine gewisse Sonderstellung einnehmen werden, so ist als Repräsentant für den Fall $p=1$ in der Tabelle die von Herrn Professor Klein angegebene Fläche (vergl. R. Th. S. 80) gewählt. Dieselbe lässt sich am besten verstehen, wenn man sich die Entstehung derselben vergegenwärtigt. Man denke sich nämlich etwa einen Gummischlauch, stülpe das eine Ende desselben nach innen um, stecke es durch eine in der Wandung des Schlauches angebrachte Oeffnung nach aussen durch und setze es endlich mit dem anderen Ende des Schlauches längs des ganzen Querschnittes desselben in Verbindung. Aus dieser Fläche, welche sich längs der Curve D selbst durchdringt, erhält man dann durch die Ansetzung von 1, 2, 3 ... Henkelpaaren die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ für die Fälle $p=3,5,7$ .... Daneben soll dann der Repräsentant der Flächen vom Charakter $-(2, 0)$ in der Tabelle die Ebene in projectivischer Auffassung[1]) mit einem Henkelpaar sein, aus welcher sich die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ für die Fälle $p=4, 6, 8$... durch Hinzufügung von 1, 2, 3... Henkelpaaren ergeben.

Es sei hier nur noch bemerkt, dass neben den hier gerade angeführten Flächen für die einzelnen Arten natürlich noch sehr verschieden gestaltete solche Flächen gedacht werden können. Von der speciellen Betrachtung anderer Flächen wird aber hier, abgesehen von der zu erstrebenden Kürze, besonders deswegen abgestanden, weil eine zu gestaltliche Auffassung dieser Flächen leicht von dem allgemeineren Begriffe einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit, für welche die angeführten Beispiele nur Versinnlichungen sein sollen, abziehen könnte. Darum möge auch hier darauf hingewiesen werden, dass die Worte „Curve" und „Fläche" im Folgenden immer nur der Kürze halber gebraucht werden und sie stets in dem allgemeineren Sinne der „linearen" und der „zweidimensionalen Mannigfaltigkeit" verstanden werden sollen.

§ 4.

Begründung der Eintheilung der symmetrischen Flächen.

Es wird sich zunächst darum handeln, zu zeigen, dass die Unterscheidung von ortho- und diasymmetrischen Flächen wirklich eine berechtigte und auch eine umfassende ist. Das erstere folgt unmittelbar daraus, dass, wie die Beispiele des vorigen Paragraphen lehren, Flächen der beiden verschiedenen Classen vorhanden sind. Dass es aber ausser diesen beiden Classen keine dritte giebt, erhellt daraus, dass eine symmetrische Fläche nie in mehr als zwei Theile zerfallen kann, wenn

1) Dass die Ebene in projectivischer Auffassung in der That als Doppelfläche vom Geschlechte 0 anzusehen ist, geht aus den Aufsätzen des Herrn Professor Klein „Ueber den Zusammenhang der Flächen" in Band VII (S. 550) und Band IX (S. 479) der Mathem. Annalen hervor.

man sie längs aller ihrer Uebergangscurven zerschneidet. Um dies letztere zu beweisen, ist zuvörderst zu zeigen, dass Uebergangscurven sich nie schneiden können. Wäre dies nämlich der Fall, so würde ein Zerfallen der Flächen in mehr als zwei Stücke ohne Weiteres denkbar sein. Allein dass dies nicht stattfindet, lässt sich folgendermassen erkennen. Zu beiden Seiten einer jeden Uebergangscurve einer symmetrischen Fläche sind überall in unmittelbarer Nähe derselben nur Punkte gelegen, welche bei der symmetrischen Umformung der Fläche in einander übergehen, also Punkte, welche bei derselben nicht ungeändert bleiben. Dies letztere aber würde man anzunehmen genöthigt sein, wenn eine Uebergangscurve eine andere oder sich selbst schneiden sollte. Also können sich Uebergangscurven nicht schneiden.

Dass aber auch ohne eine solche Möglichkeit ein Zerfallen einer symmetrischen Fläche in mehr als zwei Theile beim Zerschneiden derselben längs der Uebergangscurven nicht eintreten kann, lässt sich indirect so beweisen. Man denke sich eine beliebige symmetrische Fläche mit λ Uebergangscurven und nehme an, es zerfalle dieselbe bei jener Zerschneidung in mehr als zwei Theile. Dann kann man sie offenbar zunächst nur längs so vieler der λ Uebergangscurven zerschneiden, dass sie gerade in zwei Stücke zerfällt; die dazu eben hinreichende Anzahl sei $\lambda - \pi$. Jedes der beiden Stücke wird also $\lambda - \pi$ Randcurven aufweisen, und zu jedem Punkte einer beliebigen dieser Randcurven wird der zu ihm symmetrische auf der zugehörigen Randcurve des anderen Stückes gelegen sein. Aber auch abgesehen von diesen einander entsprechenden Punktepaaren auf den zusammengehörigen Randcurven der beiden Stücke, werden auf jedem von beiden je alle symmetrischen Punkte zu den auf dem anderen gelegenen Punkten vorhanden sein müssen, weil ja die Fläche nur längs sich selbst symmetrischer Punktreihen zerschnitten worden ist, auf deren beiden Ufern immer zu einander symmetrische Punkte gelegen sind. Folglich muss durch die vorgenommene Zerschneidung die Fläche in zwei vollkommen symmetrische Hälften zerfallen sein. Auf keiner von beiden können mithin noch sich selbst symmetrische Punkte, also auch auf keiner noch Uebergangscurven existiren. Daher können auch ausser den $\lambda - \pi$ Uebergangscurven, längs deren die Fläche zerschnitten sein sollte, keine weiteren vorhanden sein; folglich muss $\pi = 0$ sein. Da aber die Zahl $\lambda - \pi$ gerade blos hinreichte, um ein Zerfallen der Fläche in zwei Theile herbeizuführen, so kann in der That eine symmetrische Fläche bei der Zerschneidung längs der Uebergangscurven höchstens in zwei Theile zerfallen.

Es ist nun weiter zu zeigen, dass auch die in § 2 aufgestellten $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten von symmetrischen Flächen berechtigt und umfassend sind. Das erstere geht wiederum aus den in § 3 angegebenen Beispielen hervor, das letztere aber soll jetzt des Näheren bewiesen werden.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass überhaupt nie mehr als $p+1$ Uebergangscurven existiren können. Denn es würde, wenn dies der Fall wäre, daraus folgen, dass man eine Fläche vom Geschlechte p längs $p+1$ oder mehr geschlossener, einander nicht schneidender Curven zerschneiden könnte, ohne dass dieselbe zerfiele, was offenbar gegen die Definition des Geschlechtes p ist. Speciell ergiebt sich hieraus, dass für die diasymmetrischen Flächen die Maximalzahl der Uebergangscurven nur p sein kann.

Dass ferner bei den orthosymmetrischen Flächen stets $p-\lambda+1$ eine gerade Zahl sein muss, lässt sich leicht darthun mit Hilfe der Regel für die Bestimmung der Grundzahl eines Flächensystems aus den Grundzahlen der einzelnen Flächen desselben, welche Herr Professor C. Neumann in seinem Werke: „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale" (S. 305) abgeleitet hat; man hat dazu nur noch die Definition und eine gewisse Eigenschaft der Grundzahl zu beachten. Die Grundzahl N einer Fläche ist nun bestimmt durch die Gleichung:

$$N=2p+R,$$

wo R die Anzahl der Randcurven der Fläche ist,[1]) und es besitzt diese Grundzahl N die Eigenschaft völlig ungeändert zu bleiben, wenn man auf der betrachteten Fläche beliebige Rückkehrschnitte zieht. Jene Regel aber lautet so: Die Grundzahl eines beliebigen Systems von n Flächen ist gleich der Summe der Grundzahlen der einzelnen Flächen vermindert um $2n-2$.

Zerschneidet man nun eine beliebige orthosymmetrische Fläche vom Geschlechte p längs aller λ Uebergangscurven, so erhält man nach dem Vorhergehenden zwei Flächenstücke, deren jedes λ Randcurven aufweist und welche auch, weil sie zwei vollkommen symmetrische Hälften der Fläche vorstellen, beide dasselbe Geschlecht, etwa p' besitzen werden. Daher wird nach jener Regel:

$$2p=2p'+\lambda+2p'+\lambda-2.2+2$$

oder:

$$p-\lambda+1=2p',$$

also in der That $p-\lambda+1$ eine gerade Zahl sein müssen.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass eine orthosymmetrische Fläche ohne Uebergangscurven bei ungeradem Geschlechte p, wo sie nach dem soeben Bewiesenen ja allein noch möglich wäre, nicht existiren kann. Es folgt dies einfach aus der Definition der orthosymmetrischen Flächen. Denn

1) Es ist dies allerdings nicht die von Riemann und Herrn Professor C. Neumann gegebene Definition der Grundzahl oder des Zusammenhangs, sondern vielmehr die des „ungewöhnlichen" Zusammenhangs, wie Herr Professor Klein sich auszudrücken pflegt; vergl. Math. Annal. Band VII S. 550 Anm. und daneben auch eine Bemerkung von Schläfli in Band LXXVI von Crelle's Journal (S. 152, Anm.).

eine längs keiner Uebergangscurve zerschnittene und doch in zwei Theile zerfallende Fläche müsste offenbar an und für sich aus zwei getrennten Theilen bestehen, könnte also nicht eine einzige geschlossene Fläche sein, wie solche hier allein in Betracht gezogen werden.

B. Reduction der symmetrischen Flächen auf Normalformen.

§ 5.

Ueber die stetige Beziehbarkeit zweier symmetrischer Flächen auf einander.

Wie aus den Betrachtungen des zweiten Abschnittes mit völliger Klarheit sich ergeben wird, lassen sich für die hier verfolgten Zwecke je zwei solche symmetrische Flächen als identisch ansehen, zwischen denen sich eine stetige Beziehung der Art herstellen lässt, dass symmetrischen Punkten der einen auch solche der anderen und speciell auch einer jeden Uebergangscurve der einen eine solche der anderen entspricht. Eine solche Beziehung wird immer durch gewisse Umformungen der einen Fläche vermittelt werden können, bei denen die zu einander symmetrischen und die sich selbst symmetrischen Punkte als solche, vor allem aber auch die Anzahl der Uebergangscurven erhalten bleibt. Diese Umformungen werden theils in Biegungen und Dehnungen, theils in Zerschneidungen und Wiederzusammensetzungen der getrennten Theile bestehen und diese Operationen werden also bei allen Flächen, welche wir hier einer Betrachtung unterziehen, vorgenommen werden können. Nun liegt die Frage sehr nahe, ob es vermittelst solcher Umformungen nicht möglich ist, eine stetige Beziehung zwischen sämmtlichen Flächen einer und derselben Art herzustellen, und in der That wird im Folgenden der Beweis geliefert werden, dass man dies kann. Derselbe wird sich vor allem auf einen Satz der *analysis situs* stützen, welchen Camille Jordan in Liouville's Journal (2° serie tome XI S. 105 etc.) bewiesen hat in einem Aufsatze, welcher den Titel führt: „Sur la transformation des surfaces". Derselbe lautet folgendermassen:

> Damit zwei Flächen oder Flächenstücke stetig auf einander bezogen werden können, ist nothwendig und hinreichend:
>
> 1. dass die Anzahl der getrennten Randcurven, welche jedes der beiden Flächenstücke begrenzen, dieselbe ist;
> 2. dass die Maximalzahl von nicht zerstückenden Rückkehrschnitten bei beiden dieselbe ist.
>
> Dabei ist es dann immer noch möglich, sowohl die verschiedenen Randcurven als auch die verschiedenen Rückkehrschnitte in beliebiger Weise einander zuzuordnen[1]).

---

1) Wenn sich auch der Satz nicht in der hier angegebenen Weise bei Camille Jordan ausgesprochen findet, so geht doch aus dem von ihm gegebenen Beweise hervor, dass er den obigen präciseren Wortlaut hätte haben können.

§ 6.

Die Einheit der Arten der symmetrischen Flächen.

Auf Grund des angeführten Jordan'schen Satzes wird der im vorhergehenden Paragraphen angekündigte Beweis erbracht sein, wenn gezeigt werden kann, dass einerseits jede beliebige symmetrische Fläche sich durch gewisse Rückkehrschnitte in zwei symmetrische Hälften zerlegen lässt, und dass man andererseits die in § 3 angegebene Normalfläche derselben Art immer durch eine gleiche Anzahl von Rückkehrschnitten, die auch sämmtlich auf die der ersteren Fläche im Sinne des vorigen Paragraphen stetig beziehbar sind, in zwei symmetrische Hälften zerlegen kann. Danach ist nun sofort klar, dass bei den orthosymmetrischen Flächen die stetige Beziehbarkeit aller Flächen einer und derselben Art oder also die Einheit der Arten in der That stattfindet; denn eine jede solche Fläche zerfällt ja immer durch die Zerschneidung längs sämmtlicher Uebergangscurven in zwei symmetrische Hälften. Es wird also lediglich noch darauf ankommen, zu zeigen, dass man auch bei den diasymmetrischen Flächen immer eine derartige Zerlegung in symmetrische Hälften bewirken kann.

Zu dem Zwecke denke man sich eine beliebige Fläche vom Charakter $-(p, \lambda)$ längs aller λ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots U_\lambda$ zerschnitten und bezeichne die diesen Schnitten entsprechenden λ Randcurvenpaare der Fläche resp. mit $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}'_2, \ldots \mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}'_\lambda$. Ferner markire man zwei beliebige zu einander symmetrische Punkte P und P' auf der so zerschnittenen Fläche und verbinde P mit jeder Randcurve $\mathfrak{U}$ durch λ Linien $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \ldots \mathfrak{L}_\lambda$, P' mit jeder Randcurve $\mathfrak{U}'$ durch die λ zu jenen ersteren symmetrischen Verbindungslinien $\mathfrak{L}'_1 \mathfrak{L}'_2, \ldots \mathfrak{L}'_\lambda$, so jedoch, dass die beiderlei Verbindungslinien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, wie es immer möglich ist, einander nirgends schneiden. An diese beiden zu einander symmetrischen Liniensysteme, von denen das eine durch die Linien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}$ und das andere durch die Linien $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{L}'$ gebildet wird, denke man sich nun immer in symmetrischer Weise die benachbarten Flächentheile angefügt, so dass jene symmetrischen Liniensysteme in zwei zu einander symmetrische Bereiche B und B' übergehen, von denen der eine die Randcurven $\mathfrak{U}$, der andere die Randcurven $\mathfrak{U}'$ umspannt, aber keiner über den anderen irgendwo weggreift. Diese beiden symmetrischen Bereiche B und B' sollen dann weiter in symmetrischer Weise so lange vergrössert werden, bis sie überall an einander stossen und zusammen die ganze Fläche erfüllen; alsdann werden die beiden Bereiche offenbar zwei zu einander symmetrische Hälften der Fläche repräsentiren müssen. Es wird sich nun nur noch um die Beschaffenheit und die Anzahl derjenigen Curven $T_1, T_2, T_3, \ldots$ handeln, längs deren die beiden Bereiche B und B' an einander treffen.

Was zunächst die Beschaffenheit der Curven T anbelangt, so ist ohne Weiteres klar, dass dieselben entweder sich selbst symmetrische Curven

der zweiten Art sein müssen oder aber Paare von zu einander symmetrischen Curven. Dann aber lässt sich zeigen, dass weder eine von den Curven T in eine andere einzumünden, noch mehrere Curven T einander zu kreuzen brauchen. Denn nimmt man an, es mündete im Punkte M die Curve T_i in die Curve T_k ein (vergl. Fig. 3), so würden an der Stelle M drei Gebietstheile G_1, G_2, G_3 an einander stossen, von denen aber sicher zwei einem und demselben Bereiche angehören müssten; also würde einer der drei Curvenzweige, welche in M sich vereinigen, nur zwei Gebietstheile desselben Bereiches trennen, mithin keine Linie sein, in welcher die beiden verschiedenen Bereiche B und B' zusammenstossen. Dass aber auch eine gegenseitige Ueberkreuzung der Curven T nicht nöthig ist und eventuell umgangen werden kann, ergiebt sich folgendermassen. Nimmt man an, es kreuzten sich im Punkte K die beiden Curven T_i und T_k (vergl. Fig. 4) und es stiessen dabei in K die vier Gebietstheile G_1, G_2, G_3, G_4 zusammen, so würde überhaupt nur der Fall in Betracht kommen, wo die neben einander liegenden Gebiete nicht demselben Bereiche angehörten, wo also etwa G_1 und G_3 dem Bereiche B und G_2 und G_4 dem Bereiche B' angehörten, und natürlich würde auch, da der Kreuzungspunkt K ein sich selbst symmetrischer Punkt der Fläche nicht sein kann, weil solche überhaupt nicht mehr auf derselben existiren, ein zweiter zu K symmetrischer solcher Kreuzungspunkt K' noch auftreten müssen. Dann aber würde man einfach bei K etwa G_1 und G_3 in der Weise zu verbinden haben, wie dies in Fig. 4a geschehen ist, um den Kreuzungspunkt zu umgehen und ohne dabei die beiden zu einander symmetrischen Bereiche mit einander zu verbinden; an dem symmetrischen Kreuzungspunkt K' aber würde man die beiden dem Bereiche B' angehörigen, zu G_1 und G_3 symmetrischen Gebietstheile in symmetrischer Weise zu verbinden haben, um wieder die völlige Symmetrie der beiden Bereiche B und B' herzustellen. Dass man ebenso bei jeder mehrfachen Kreuzungsstelle verfahren kann, ist unmittelbar zu übersehen. Also brauchen sich in der That die Begrenzungscurven T nirgends zu schneiden, und es soll daher angenommen werden, dass sie es nicht thun.

Was nun weiter die Anzahl μ der Curven T betrifft, so kann sie zuvörderst höchstens $p-\lambda+1$ sein, weil eine grössere Anzahl von einander getrennten Curven sicher ein Zerfallen der Fläche in mehr als zwei Theile bewirken müsste, während doch die zwei Bereiche B und B' die Fläche vollständig umfassen. Die Anzahl der Paare von zu einander symmetrischen Curven T kann daher auch höchstens $\left[\frac{p-\lambda+1}{2}\right]$ sein. Ausserdem kann die Zahl μ nur der Art sein, dass $p-\lambda+1-\mu$ eine gerade Zahl ist; denn der Zusammenhang der beiden symmetrischen Bereiche B und B' muss offenbar genau derselbe sein und folglich immer, wenn $\mu < p-\lambda+1$ ist, noch eine gerade Anzahl von nicht zerstückenden Rückkehrschnitten auf beiden Bereichen zusammengezogen werden können.

Auf der andern Seite zeigt eine leichte Ueberlegung — und es wird dies zum Theil auch im Folgenden noch näher zu erörtern sein —, dass man die in § 3 angegebenen Normalflächen vom Charakter $-(p, \lambda)$, nachdem sie längs der Uebergangscurven zerschnitten worden sind, auch immer in zwei symmetrische Hälften entweder durch sich selbst symmetrische Schnitte oder durch Paare von zu einander symmetrischen Schnitten zerlegen kann, und zwar auch wieder durch jede solche Anzahl μ von Schnitten, dass $0 < \mu \leqq p - \lambda + 1$ und $p - \lambda + 1 - \mu$ eine gerade Zahl ist. Damit ist aber auch für die diasymmetrischen Flächen jene stetige Beziehbarkeit aller Flächen einer und derselben Art auf einander oder die Einheit der diasymmetrischen Arten erwiesen.

Nunmehr ist aber auch klar, dass die sämmtlichen symmetrischen Flächen einer jeden Art zurückgeführt werden können auf die betreffende in § 3 angegebene Normalform dieser Art. Man wird also auch nur noch diese Normalformen in Betracht zu ziehen brauchen, ohne dabei irgendwie die Allgemeinheit der Untersuchungen zu beschränken.

C. Schematische Darstellung der symmetrischen Flächen.

§ 7.

Die Fundamentalbereiche der symmetrischen Flächen mit Uebergangscurven.

Um diese Fundamentalbereiche abzuleiten, wird zunächst zu zeigen sein, dass man ausser längs der λ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots, U_\lambda$ jede Normalfläche vom Charakter $+(p, \lambda)$ noch längs $\frac{p-\lambda+1}{2}$ Paaren von zu einander symmetrischen Curven $H_1 H'_1,\ H_2 H'_2, \ldots,\ H_{\frac{p-\lambda+1}{2}} H'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}$, jede Normalfläche vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ noch längs $p - \lambda + 1$ sich selbst symmetrischen Curven der zweiten Art $V_1, V_2, \ldots V_{p-\lambda+1}$ zerschneiden kann, um eine jede solche Fläche in zwei zu einander symmetrische, auf die Ebene ausbreitbare Hälften mit je $p+1$ Randcurven zu zerlegen. Dieser Nachweis ist aber unmittelbar durch die Angabe jener Schnitte geführt, und es wird ausserdem genügen, diese Angabe je für einen speciellen Fall zu machen. Denn es ist z. B. im Falle $+(3, 2)$ das eine Paar von zu einander symmetrischen Curven $H_1 H'_1$ dargestellt durch die in Fig. 5 punktirten, die beiden Henkel umspannenden Linien und man erkennt sofort, dass man in jedem complicirteren Falle jedes der $\frac{p-\lambda+1}{2}$ Henkelpaare in analoger Weise zu je einem Paare von Curven HH' verwenden kann. Andererseits lehren die zwei im Falle $-(3, 2)$ in Fig. 6 angegebenen und wiederum punktirten sich selbst symmetrischen Curven der zweiten Art V_1 und V_2 (jede derselben geht an der Verdrehungsstelle, wenn man so sagen darf, von der einen Seite der Fläche zur anderen über und eine jede Hälfte der-

selben verläuft immer gerade unter resp. über der zugehörigen anderen), wie man in jedem höheren Falle die $p-\lambda+1$ in der Normalfläche enthaltenen Verdrehungen zu ebenso viel solchen Curven V benutzen kann.

Nun zerschneide man eine beliebige Normalfläche vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ längs $\lambda-1$ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots, U_{\lambda-1}$ und ausserdem längs der $p-\lambda+1$ Curven HH' resp. V und bezeichne die den Curven $U_1, U_2, \ldots, U_{\lambda-1}$ entsprechenden Randcurvenpaare der zerschnittenen Fläche mit $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}'_2, \ldots, \mathfrak{U}_{\lambda-1}\mathfrak{U}'_{\lambda-1}$ und daneben die den Curven $H_1H_2, \ldots, H_{\frac{\lambda-p+1}{2}}$; $H'_1H'_2, \ldots, H'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}$ resp. den Curven $V_1V_2, \ldots$ $\ldots, V_{p-\lambda+1}$ entsprechenden Randcurvenpaare mit $\mathfrak{H}_1\overline{\mathfrak{H}}_1, \mathfrak{H}_2\overline{\mathfrak{H}}_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{H}_{\frac{p-\lambda+1}{2}}\overline{\mathfrak{H}}_{\frac{p-\lambda+1}{2}}, \mathfrak{H}'_1\overline{\mathfrak{H}}'_1, \mathfrak{H}'_2\overline{\mathfrak{H}}'_2, \ldots, \mathfrak{H}'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}\overline{\mathfrak{H}}'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}$ resp. mit $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'_2, \ldots, \mathfrak{B}_{p-\lambda+1}\mathfrak{B}'_{p-\lambda+1}$. Dann ist nach den vorausgehenden Betrachtungen und speciell auf Grund des Jordan'schen Satzes (§ 5) leicht einzusehen, dass man die so zerschnittene Fläche mit ihren $2p$ Randcurven stetig wird beziehen können auf eine Kugelfläche mit $2p$ kreisförmigen Oeffnungen $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}p, \mathfrak{O}'_1\mathfrak{O}'_2, \ldots, \mathfrak{O}'p$, von denen $\mathfrak{O}'_1\mathfrak{O}'_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{O}'p$ aus $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}p$ durch Spiegelung an einem gewissen grössten Kreis, dem Aequator A, wie er genannt werden soll, hervorgehen, und zwar wird diese Beziehung auch noch derart möglich sein, dass der nicht zerschnittenen Uebergangscurve U_λ gerade der Aequator A und je zwei zu einander symmetrischen Punkten der betrachteten Fläche auf der Kugelfläche zwei Spiegelpunkte in Bezug auf den Aequator entsprechen. Speciell soll nun noch angenommen werden, dass den Randcurven $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}'_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{U}_{\lambda-1}\mathfrak{U}'_{\lambda-1}$ die Begrenzungskreise der Oeffnungen $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}'_1, \mathfrak{O}_2\mathfrak{O}'_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{O}_{\lambda-1}\mathfrak{O}'_{\lambda-1}$, den Randcurven $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}'_1, \overline{\mathfrak{H}}_1\overline{\mathfrak{H}}'_1, \mathfrak{H}_2\mathfrak{H}'_2, \overline{\mathfrak{H}}_2\overline{\mathfrak{H}}'_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{H}_{\frac{p-\lambda+1}{2}}\mathfrak{H}'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}, \overline{\mathfrak{H}}_{\frac{p-\lambda+1}{2}}\overline{\mathfrak{H}}'_{\frac{p-\lambda+1}{2}}$ resp. den Randcurven $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'_2, \ldots, \mathfrak{B}_{p-\lambda+1}\mathfrak{B}'_{p-\lambda+1}$ die Begrenzungskreise der Oeffnungen $\mathfrak{O}_\lambda\mathfrak{O}'_\lambda$, $\mathfrak{O}_{\lambda+1}\mathfrak{O}'_{\lambda+1}, \ldots, \mathfrak{O}_p\mathfrak{O}'_p$ entsprechen. Es wird sich nur noch darum handeln, nach Massgabe der Zusammengehörigkeit der Randcurven $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ und $\overline{\mathfrak{H}}\overline{\mathfrak{H}}'$ resp. $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ die Zusammengehörigkeit der Punkte der die Oeffnungen $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ begrenzenden Kreise anzugeben, um damit den Fundamentalbereich einer Fläche vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ vollständig bestimmt zu haben. Da ist nun einmal klar, dass bei den Kreisen der Oeffnungen $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}'_2, \ldots, \mathfrak{O}_{\lambda-1}\mathfrak{O}'_{\lambda-1}$ die zusammengehörigen Punkte einfach die durch Spiegelung aus einander hervorgehenden Punkte sind. Weiter aber werden im Falle einer Fläche vom Charakter $+(p, \lambda)$ die Punkte der die Paare von Oeffnungen $\mathfrak{O}_\lambda\mathfrak{O}_{\lambda+1}$, $\mathfrak{O}'_\lambda\mathfrak{O}'_{\lambda+1}$; $\mathfrak{O}_{\lambda+2}\mathfrak{O}_{\lambda+3}$, $\mathfrak{O}'_{\lambda+2}\mathfrak{O}'^{\lambda+3}$, $\ldots$ $\ldots, \mathfrak{O}_{p-1}\mathfrak{O}_p$; $\mathfrak{O}'_{p-1}\mathfrak{O}'_p$ begrenzenden Kreise in der Weise zusammengehören, wie es in Fig. 7 für den Fall $+(3, 2)$ einerseits bei den mit 1 und andererseits bei den zu ihnen symmetrischen, mit 1' bezeichneten Oeffnung

gen angedeutet ist durch die am Umfange der Kreise beigefügten je drei gleichen Buchstaben. Endlich findet man leicht durch eine nähere Betrachtung der Schnitte $V_1, V_2, \ldots, V_{p-\lambda+1}$, dass im Falle einer Fläche vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ bei den Paaren von Oeffnungen $\mathfrak{O}_\lambda \mathfrak{O}'_\lambda, \mathfrak{O}_{\lambda+1} \mathfrak{O}'_{\lambda+1}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{O}_p \mathfrak{O}'_p$ zusammengehörige Punkte ihrer Begrenzungskreise je zwei solche Punkte sein werden, von denen der eine von dem Spiegelpunkt zum anderen um 180^0 auf dem Kreise, auf welchem er gelegen ist, entfernt ist. Deuten wir daher in diesem Falle die Zusammengehörigkeit der Punkte der fraglichen Oeffnungen durch Beifügung je dreier gleicher Ziffern an den Umfängen der zu einander symmetrischen Oeffnungen an, so wird sich im Falle $-(3, 2)$ der in Fig. 8 angegebene Fundamentalbereich ergeben.

Diese Fundamentalbereiche auf der Kugelfläche kann man sich nun auch auf die Ebene übertragen denken, indem man eine stereographische Projection vornimmt, bei welcher die Aequatorebene der Kugel auf der Projectionsebene senkrecht steht und letztere die Kugelfläche berührt. Es geht dann der Aequator A über in eine gerade Linie, die Axe A, welche die beiden symmetrischen Halbebenen trennt. Für die Fälle $+(3, 2)$ und $-(3, 2)$ erhält man so die Darstellungen in Fig. 9 und 10.

§ 8.

Die Fundamentalbereiche der diasymmetrischen Flächen.

Der Umstand, dass die Flächen vom Charakter $-(p, \lambda)$ nicht zerfallen, wenn man sie längs aller Uebergangscurven zerschneidet, ermöglicht die Darstellung derselben durch eine andere Art von Fundamentalbereichen als die im Vorhergehenden betrachtete, bei welcher ja der Fall $\lambda = 0$ ausgeschlossen war. Diese zweite Art von Fundamentalbereichen, welche nun für die diasymmetrischen Flächen allein bestehen, erhält man auf folgende Weise.

Man zerschneide eine solche Fläche vom Charakter $-(p, \lambda)$ längs aller λ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots, U_\lambda$ und ausserdem längs $p - \lambda$ der in § 7 angegebenen $p - \lambda + 1$ sich selbst symmetrischen Curven V, etwa längs $V_1, V_2, \ldots, V_{p-\lambda}$; die diesen p Schnitten entsprechenden Randcurvenpaare mögen resp. $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}'_2, \ldots, \mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}'_\lambda$ und $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}'_1, \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}'_2, \ldots, \mathfrak{V}_{p-\lambda} \mathfrak{V}'_{p-\lambda}$ heissen. Dann wird man die so zerschnittene Fläche mit ihren $2p$ Randcurven wieder auf eine Kugelfläche mit $2p$ kreisförmigen Oeffnungen $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{O}_2 \mathfrak{O}'_2, \ldots, \mathfrak{O}_p \mathfrak{O}'_p$, von denen nun aber $\mathfrak{O}'_1, \mathfrak{O}'_2, \ldots, \mathfrak{O}'_p$ aus $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}_p$ dadurch hervorgehen, dass man zu sämmtlichen Begrenzungspunkten der letzteren die diametralen Punkte bestimmt, in der Weise stetig beziehen können, dass symmetrischen Punkten der Fläche diametral gegenüberliegende Punkte der Kugelfläche und speciell den Randcurven $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}'_1, \ldots, \mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}'_\lambda$ die Begrenzungskreise der Oeffnungen $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}'_1, \ldots, \mathfrak{O}_\lambda \mathfrak{O}'_\lambda$ und den Randcurven $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}'_1, \ldots, \mathfrak{V}_{p-\lambda} \mathfrak{V}'_{p-\lambda}$ die Begrenzungskreise der Oeffnungen $\mathfrak{O}_{\lambda+1} \mathfrak{O}'_{\lambda+1}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{O}_p \mathfrak{O}'_p$ entsprechen. Um dies einzusehen, braucht man nur die be-

treffende Fläche noch längs der Curve $V_{p-\lambda+1}$ zu zerschneiden und dann die beiden symmetrischen Hälften, in welche sie dadurch zerfällt, auf zwei symmetrische Halbkugeln mit je p Oeffnungen in symmetrischer Weise stetig zu beziehen, so jedoch, dass den der Curve $V_{p-\lambda+1}$ entsprechenden Randcurven $\mathfrak{V}_{p-\lambda+1}$ und $\mathfrak{V}'_{p-\lambda+1}$ die beiden die Halbkugeln begrenzenden grössten Kreise entsprechen. Wenn man nämlich dann nach Massgabe der Lage der zusammengehörigen Punkte auf den Randcurven $\mathfrak{V}_{p-\lambda+1}$ und $\mathfrak{V}'_{p-\lambda+1}$ die beiden Halbkugeln an einander fügt, so findet man leicht, dass in der That die einander diametral gegenüberliegenden Punkte der so entstehenden ganzen Kugel symmetrischen Punkten der betrachteten Fläche entsprechen.[1]) Es geht daraus weiter hervor, dass bei den Begrenzungskreisen der Oeffnungen $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}'_1, \ldots, \mathfrak{O}_\lambda\mathfrak{O}'_\lambda$ wieder die diametral gegenübergelegenen Punkte zusammengehören, dass dagegen bei den Begrenzungskreisen der Oeffnungen $\mathfrak{O}_{\lambda+1}\mathfrak{O}'_{\lambda+1}, \ldots, \mathfrak{O}_p\mathfrak{O}'_p$ je zwei zusammengehörige Punkte solche sind, von denen der eine von dem dem anderen diametral gegenüberliegenden Punkte um 180^0 auf dem betreffenden Kreise entfernt ist. Für den Fall $-(3, 2)$ wird daher ein solcher Fundamentalbereich die Gestalt haben, welche in Fig. 11 angegeben ist, wobei wieder je drei zusammengehörige Punkte bei den zwei dem einen Schnitte V_1 entsprechenden Oeffnungen durch dieselben Zahlen bezeichnet sind.

Diese Fundamentalbereiche der Flächen vom Charakter $-(p, \lambda)$, von deren Uebertragung auf die Ebene übrigens abgesehen wird, weil dadurch die Anschaulichkeit nicht gerade erhöht wird, werden immer nur im Falle $\lambda = 0$ im Folgenden angewandt werden, in welchem sie offenbar auch aufgestellt werden können; denn dass bei den Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ immer p sich selbst symmetrische Curven der zweiten Art existiren, welche dieselben nicht zerstücken, zeigt eine nähere Betrachtung der in § 3 angegebenen Normalflächen dieser Art sofort.

---

1) Von der Eigenschaft der Flächen vom Charakter $-(p, \lambda)$, sich auf solche Fundamentalbereiche beziehen zu lassen, rührt übrigens die Bezeichnung „diasymmetrisch" her, welche nur eine Abkürzung für „diametralsymmetrisch" ist.

II. Abschnitt.

Die Periodicitätsmoduln der Abel'schen Normalintegrale erster Gattung auf symmetrischen Flächen.

§ 9.

Vorbemerkung.

Die bisher ganz absolut, d. h. ohne jede Beziehung zur Functionentheorie betrachteten symmetrischen Flächen sollen jetzt als im Raum gelegene Riemann'sche Flächen angesehen werden. Es entsprechen ihnen dann, wie Herr Professor Klein gezeigt hat (R. Th. S. 74) und wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, algebraische Gleichungen von der Form: $f(w, z) = 0$ mit reellen Coefficienten, ebenso wie umgekehrt zu solchen Gleichungen stets symmetrische Riemann'sche Flächen gehören. Insbesondere entsprechen je zwei zu einander symmetrischen Punkten immer zwei conjugirt complexe Werthepaare w, z, welche die betreffende Gleichung befriedigen, und den sich selbst symmetrischen Punkten die reellen Werthepaare w, z.

Die im Vorhergehenden gewonnene Eintheilung der symmetrischen Flächen wird daher eine Classification der algebraischen Gleichungen mit reellen Coefficienten begründen, welche offenbar jener von Herrn Professor Klein in dem speciellen Falle $p = 3$ gemachten Unterscheidung der verschiedenen Curvengestalten parallel läuft.

Es wird sich nun wesentlich darum handeln, für diese verschiedenen Arten von algebraischen Gleichungen mit reellen Coefficienten resp. von symmetrischen Flächen die Realität der Periodicitätsmoduln der zugehörigen überall endlichen Abel'schen Normalintegrale zu bestimmen. Ein System von p linear unabhängigen überall endlichen Normalintegralen kann man aber immer auf Grund eines gewissen canonischen Querschnittsystems der zugehörigen Riemann'schen Fläche bestimmen, und also wird auch durch eine solche Zerschneidung je das System der noch unbestimmten zweiten p^2 Periodicitätsmoduln eines solchen Systems von Normalintegralen bestimmt sein. In dem Falle einer symmetrischen Riemann'schen Fläche, resp. einer algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten wird speciell die Realität dieser zweiten p^2 Periodicitätsmoduln um so grösser sein, je symmetrischer jenes zu Grunde gelegte Querschnittsystem entweder wirklich ist oder wenigstens durch blosse Verzerrung gemacht werden kann.

Demgemäss soll im Folgenden:

1. für jede der verschiedenen Arten von symmetrischen Flächen ein möglichst symmetrisches Querschnittsystem angegeben,

2. die Beschaffenheit der diesen Querschnittsystemen entsprechenden überall endlichen Normalintegrale und
3. die Werthe der zweiten p^2 Periodicitätsmoduln dieser Integrale untersucht werden.

Aus den Resultaten der letzteren Untersuchung wird dann unmittelbar die Richtigkeit der soeben ausgesprochenen Behauptung bezüglich der Realität jener Periodicitätsmoduln folgen; andererseits aber wird sich bei der vorangehenden Betrachtung jener Normalintegrale ergeben, dass die solchen möglichst symmetrischen Querschnittsystemen entsprechenden Normalintegrale sogenannte reelle Integrale sind, wenigstens bei den Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$, während im Falle $-(p, 0)$ dieselben nur um den Factor $i = \sqrt{-1}$ von solchen reellen Integralen verschieden sein werden.

Der eigentlichen Angabe jener Querschnittsysteme möge aber noch eine kurze Betrachtung von sich selbst symmetrischen Curven auf den symmetrischen Flächen vorausgeschickt werden.

A. Canonisches Querschnittsystem.

§ 10.

Die symmetrischen Wege auf symmetrischen Flächen.

Während die sich selbst symmetrischen Curven der zweiten Art überhaupt nur bei den diasymmetrischen Flächen vorkommen können, weil bei den orthosymmetrischen Flächen ein Uebergang von einem Punkte zu dem zu ihm symmetrischen Punkte immer nur über eine der Uebergangscurven hinweg möglich ist, lässt sich zeigen, dass die sich selbst symmetrischen Curven der ersten Art auf sämmtlichen Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ vorhanden sind, und zwar immer p nicht auf einander zurückführbare, so dass die Flächen nicht zerfallen, wenn man sie längs derselben zerschneidet. Um dies nachzuweisen, sollen einfach je p solche Curven oder, wie sie fernerhin genannt werden sollen, Wege auf den Fundamentalbereichen der Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ angegeben werden. Es mögen zu dem Zwecke diese p sich selbst symmetrischen Wege der ersten Art mit $S_1, S_2, \ldots, S_p$ bezeichnet werden. Dann sind entsprechend den $\lambda - 1$ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots, U_{\lambda-1}$, längs deren die Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ zerschnitten wurden, um die in § 7 abgeleiteten Fundamentalbereiche derselben zu erhalten, $\lambda - 1$ jener Wege, etwa $S_1, S_2, \ldots, S_{\lambda-1}$ dargestellt durch solche Linien, wie die eine für den Fall $+(1, 2)$ in Fig. 12 punktirt gezeichnete Linie S_1. Was die $p - \lambda + 1$ übrigen Wege $S_\lambda, S_{\lambda+1}, \ldots, S_p$ betrifft, so sind bei den Flächen vom Charakter $+(p, \lambda)$ je zwei derselben durch ein Paar solcher Curven dargestellt, wie es für den Fall $+(2, 1)$ die in Fig. 13 punktirten Linien S_1 und S_2 sind, bei den Flächen vom



Charakter $-(p, \lambda > 0)$ dagegen jede einzelne derselben von einer solchen Gestalt, wie die in Fig. 14 für den Fall $-(1, 1)$ punktirt gezeichnete Linie S_1.

Es zeigt übrigens die nähere Betrachtung dieser je p sich selbst symmetrischen Wege der ersten Art sofort, dass bei der symmetrischen Umformung der Fläche ihre beiderlei Ufer sich nicht vertauschen. Dagegen tritt eine solche Vertauschung offenbar ein bei den $p-\lambda+1$ sich selbst symmetrischen Wegen der zweiten Art, welche in § 7 bei den Normalflächen vom Charakter $-(p, \lambda)$ angegeben wurden; ein Gleiches gilt von den Uebergangscurven.

§ 11.

Querschnittsystem der symmetrischen Flächen mit Uebergangscurven.

Es sollen jetzt für die Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ die in § 9 in Aussicht gèstellten möglichst symmetrischen canonischen Querschnittsysteme angegeben werden. Dabei werden, wie dies auch anderwärts zu geschehen pflegt, die einen p Querschnitte mit $A_1, A_2, \ldots, A_p$ und die anderen p ihnen zugeordneten mit $B_1, B_2, \ldots, B_p$ bezeichnet werden. Die Querschnitte $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sollen dann bei allen Flächen vom Charakter $+(p, \lambda > 0)$ in den im vorigen Paragraphen angegebenen p symmetrischen Wegen der ersten Art $S_1, S_2, \ldots, S_p$ bestehen. Von den Querschnitten $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_p$ aber sollen zunächst $B_1, B_2, \ldots, B_{\lambda-1}$ bei allen Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ gebildet werden durch die $\lambda-1$ Uebergangscurven $U_1, U_2, \ldots$ $\ldots, U_{\lambda-1}$, welche von den $\lambda-1$ Wegen $S_1, S_2, \ldots, S_{\lambda-1}$ geschnitten werden, so dass im Falle $+(1, 2)$ die beiderlei Querschnitte A_1 und B_1 die in Fig. 15 punktirten Linien sind. Weiter sollen dann bei den Flächen vom Charakter $+(p, \lambda)$ die $\frac{p-\lambda+1}{2}$ Paare von Querschnitten $B_\lambda, B_{\lambda+1}, \ldots, B_p$ so verlaufen, wie dies für ein solches Paar im Falle $+(2, 1)$ in Fig. 16 veranschaulicht ist. Bei den Flächen vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ aber sollen für die Querschnitte $B_\lambda, B_{\lambda+1}, \ldots, B_p$ diejenigen gewählt werden, welche bei jedem der ebenso viel Paare von Oeffnungen des Fundamentalbereichs, in welche die Querschnitte $A_\lambda A_{\lambda+1}, \ldots, A_p$ einmünden, so angebracht werden können, wie dies im Falle $-(1, 1)$ für ein solches Paar Fig. 17 zeigt.

Es ist nun leicht zu sehen, dass, während die sämmtlichen Querschnitte A lauter sich selbst symmetrische Curven der ersten Art sind, die Querschnitte B entweder blos aus Uebergangscurven bestehen oder aber aus Theilen einer Uebergangscurve und je einer Hälfte eines der Querschnitte A. Ferner überzeugt man sich auch leicht, dass man in Uebereinstimmung mit den Riemann'schen Festsetzungen über den Durchlauf-

ungssinn der Querschnitte A und B[1]), hier denselben so wählen kann, dass die in den Querschnitten B auftretenden Hälften der Querschnitte A in demselben Sinne durchlaufen werden wie diese selbst. Von dieser Beschaffenheit ist auch der in den Fig. 16 und 17 angenommene Durchlaufungssinn. Um nun aber die Zusammensetzung der Wege B noch deutlicher zu veranschaulichen, möge allgemein der in dem Querschnitt B_k enthaltene Uebergangscurventheil mit U_k bezeichnet werden, so dass also speciell $U_1 U_2, \ldots \ldots, U_{\lambda-1}$ die schon im Vorhergehenden so bezeichneten ganzen Uebergangscurven, $U_\lambda, U_{\lambda+1}, \ldots U_p$ aber Theile der allein noch übrig bleibenden λ^{ten} Uebergangscurve bedeuten. Für die Flächen vom Charakter $+(p, \lambda)$ werden sich alsdann die Querschnitte B folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned}
B_1 &= U_1, \\
B_2 &= U_2, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
B_{\lambda-1} &= U_{\lambda-1}, \\
B_\lambda &= U_\lambda + \tfrac{1}{2} A_{\lambda+1}, \\
B_{\lambda+1} &= U_{\lambda+1} + \tfrac{1}{2} A_\lambda, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_{p-1} &= U_{p-1} + \tfrac{1}{2} A_p, \\
B_p &= U_p + \tfrac{1}{2} A_{p-1},
\end{aligned}$$

für die Flächen vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ aber folgendermassen:

$$\begin{aligned}
B_1 &= U_1, \\
B_2 &= U_2, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
B_{\lambda-1} &= U_{\lambda-1}, \\
B_\lambda &= U_\lambda + \tfrac{1}{2} A_\lambda, \\
B_{\lambda+1} &= U_{\lambda+1} + \tfrac{1}{2} A_{\lambda+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_{p-1} &= U_{p-1} + \tfrac{1}{2} A_{p-1}, \\
B_p &= U_p + \tfrac{1}{2} A_p.
\end{aligned}$$

§ 12.

Querschnittsystem der symmetrischen Flächen ohne Uebergangscurven.

Da auf den Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ sich selbst symmetrische Curven der ersten Art nicht existiren, sollen auf einer solchen Fläche als Querschnitte $A_1, A_2, \ldots, A_p$ diejenigen p sich selbst symmetrischen Curven der zweiten Art angenommen werden, welchen in dem Fundamentalbereich

1) Vergl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, II. Abth. § 19.

derselben die $2p$ Oeffnungen entsprechen. Als zugeordnete Querschnitte $B_1, B_2, \ldots, B_p$ aber sollen hier p im Uebrigen beliebige, natürlich weder sich selbst noch einander schneidende geschlossene Linien gewählt werden, von denen eine jede einen der Querschnitte A in einem Punkte schneidet, so dass beispielsweise im Falle $p=1$ die Wege A_1 und B_1 die in Fig. 18 angegebenen sind.

Es wird nun aber noch zu zeigen sein, dass dieses anscheinend ziemlich willkürliche System der Querschnitte B doch auch als möglichst symmetrisch angesehen werden kann, insofern jeder Querschnitt B mit gewissen Querschnitten A in Beziehung steht. Zu dem Zwecke denke man sich allgemein zu dem Querschnitte B_k die zu demselben symmetrische Curve B'_k auf der Kugelfläche des Fundamentalbereichs construirt und zu diesen beiden Wegen B_k und B'_k noch zweimal die eine Hälfte des zugehörigen Querschnittes A_k gefügt. Es ist dann leicht zu sehen, dass man auf diese Weise je einen gewissen geschlossenen Weg erhält, der sich in der Form darstellen lässt:

$$B_k + \tfrac{1}{2} A_k + B'_k - \tfrac{1}{2} A_k,$$

und der im Fall $p=2$ und für $k=1$ in Fig. 19 veranschaulicht ist. Es ist ferner leicht zu erkennen, dass dieser geschlossene Weg von den $2p-2$ übrigen Oeffnungen, ausser den beiden dem Querschnitte A_k entsprechenden, gerade die einen $p-1$ Oeffnungen einschliesst, welche zu den anderen symmetrisch sind, und dass man auch den Querschnitt B_k immer so legen kann, dass der Durchlaufungssinn sämmtlicher eingeschlossener Querschnitte A derselbe ist. Daraus folgt aber dann, dass der Weg:

$$B_k + \tfrac{1}{2} A_k + B'_k - \tfrac{1}{2} A_k = B_k + B'_k$$

der Summe von Wegen:

$$\sum_1^p {}^i A_i - A_k$$

gleichwerthig ist, sofern es sich darum handelt, den Werth eines Integrales einer eindeutigen und stetigen Function zu bestimmen, welches über den ersteren Weg erstreckt werden soll. Man kann diese Aequivalenz etwa so ausdrücken:

$$(B_k + B'_k) \sim \left(\sum_1^p {}^i A_i - A_k\right).$$

B. Die Realität der überall endlichen Normalintegrale.

§ 13.

Verhalten reeller Integrale auf symmetrischen Flächen.

Unter einem reellen Abel'schen Integrale soll hier ein Integral verstanden werden von der Form:

$$\int_{w_0 z_0}^{w_1 z_1} R(w, z)\, dz,$$

wo w und z durch eine algebraische Gleichung:

$$f(w, z) = 0$$

mit reellen Coefficienten verbunden sind, die Function $R(w, z)$ eine rationale Function von w und z mit reellen Coefficienten ist und die Grenzen $w_0 z_0$ und $w_1 z_1$ jener algebraischen Gleichung genügende Werthepaare w, z sind.

Ein solches Integral wird nun offenbar einen reellen Werth annehmen, wenn die beiden Werthepaare $w_0 z_0$ und $w_1 z_1$ reell und auch die übrigen Werthepaare, welche auf dem Integrationswege durchlaufen werden sollen, oder auch statt derselben durchlaufen werden können, ohne dass dadurch der Werth des Integrales geändert würde, reell sind. Ferner werden sich zwei conjugirt complexe Werthe des Integrales ergeben, wenn $w_0 z_0$ und $w_1 z_1$ beliebige complexe Werthepaare sind und man dazu die conjugirt complexen Werthepaare $\overline{w_0 z_0}$ und $\overline{w_1 z_1}$ nimmt und nun das Integral das eine Mal über einen zwischen den ersteren beiden Werthepaaren und das andere Mal über einen solchen zwischen den letzteren beiden Werthepaaren $\overline{w_0 z_0}$ und $\overline{w_1 z_1}$ gelegenen Integrationsweg erstreckt, welcher entweder direct alle die zu den auf dem ersteren Integrationsweg gelegenen Werthepaaren conjugirten Werthepaare und sonst keine anderen enthält, oder doch wenigstens ohne Aenderung des Integralwerthes durch den so beschaffenen Integrationsweg ersetzt werden kann. Diese beiden Bemerkungen lassen sich mit Rücksicht auf die Beziehung der algebraischen Gleichungen zu den symmetrischen Riemann'schen Flächen auch so aussprechen:

1. Erstreckt man ein reelles Integral längs der Punkte eines Uebergangscurventheiles der zugehörigen Riemann'schen Fläche, so wird dasselbe einen reellen Werth annehmen.
2. Erstreckt man ein reelles Integral längs zweier zu einander symmetrischer Curvenstrecken auf jener Fläche in analogem Sinne, so wird man zwei conjugirt complexe Werthe desselben erhalten.

Aus dem zweiten Satze lassen sich nun sofort die folgenden beiden wichtigen Sätze ableiten über die Werthe, welche ein reelles Integral annimmt, wenn man dasselbe über einen sich selbst symmetrischen Weg der ersten und über einen solchen der zweiten Art erstreckt.

1. Der Werth eines über einen symmetrischen Weg der ersten Art erstreckten reellen Integrales ist rein imaginär.
2. Der Werth eines über einen symmetrischen Weg der zweiten Art erstreckten reellen Integrales ist reell.

Um diese beiden Folgerungen zu ziehen, hat man nur zu berücksichtigen, dass, während bei einem sich selbst symmetrischen Wege der zweiten Art symmetrische Partien in analogem Sinne durchlaufen werden, solche Partien bei symmetrischen Wegen der ersten Art in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden (vergl. Fig. 1 und 2).

Es ergiebt sich endlich auch noch leicht der folgende Satz über den Werth eines reellen Integrales, welches über eine Hälfte eines symmetrischen Weges der ersten Art erstreckt wird.

Der imaginäre Theil eines reellen Integrales, welches über eine zwischen den beiden Uebergangscurvenpunkten eines symmetrischen Weges der ersten Art gelegene Hälfte dieses Weges erstreckt wird, ist gleich der Hälfte des imaginären Werthes, welchen das über den ganzen Weg in demselben Sinne erstreckte Integral annimmt.

§ 14.

Reelle überall endliche Integrale auf symmetrischen Flächen.

Wenn $u+iv$ eine beliebige complexe Function des Ortes auf einer Riemann'schen Fläche ist, so sollen die reellen Bestandtheile u und v, aus denen sich jeder Werth derselben zusammensetzt, die zu der Function gehörenden Potentialfunctionen genannt werden[1]). Zwischen ihnen bestehen dann bekanntlich bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems x, y die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

vermöge deren zu jedem Werthe von u sich der zugehörige von v bis auf eine additive reelle Constante bestimmt, nämlich:

$$(F) \qquad v=\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right\}+C.$$

Nun denke man sich, wie dies nach einem bekannten Satze der Riemann-schen Theorie der Abel'schen Functionen (vergl. R. Th., S. 40) immer möglich ist, für jede der verschiedenen Arten von symmetrischen Flächen mit dem auf ihr im Vorhergehenden angegebenen Querschnittsystem p linear unabhängige überall endliche Potentialfunctionen: $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dadurch bestimmt, dass man allgemein u_k vorschreibt, am Querschnitt A_k die reelle Constante r_{kk} als Periodicitätsmodul anzunehmen, während es an allen übrigen Querschnitten A und an sämmtlichen Querschnitten B den Periodicitätsmodul 0 haben soll.[2])

---

1) Vergl. R. Th., S. 1 flgg.

2) Unter dem Periodicitätsmodul an einem Querschnitte wird dabei, wie gewöhnlich, der Zuwachs verstanden, welcher sich für die in Rede stehende Function beim Ueberschreiten des Querschnittes einstellt. Derselbe ist aber bekanntlich gleich dem Werthe, welchen das Integral annimmt, wenn es über den zugeordneten Querschnitt erstreckt wird.

Es wird sich dann für die Periodicitätsmoduln der u_k an den Querschnitten A das folgende Schema aufstellen lassen:

	A_1	A_2	...	A_p
u_1	r_{11}	0	...	0
u_2	0	r_{22}	...	0
⋮	⋮	⋮		⋮
u_p	0	0	...	r_{pp}

Es ist ferner auch leicht zu sehen, dass die so bestimmten Potentialfunctionen wirklich linear unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, bestände also eine Gleichung von der Form:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p = C,$$

worin $c_1, c_2, \ldots, c_p$ und C gewisse Constanten sein sollen, so würde einmal für jeden Querschnitt A als Integrationsweg:

$$c_1 . 0 + c_2 . 0 + \ldots + c_p . 0 = C,$$

also $C = 0$ sein müssen, daneben aber für den Querschnitt B_μ als Integrationsweg:

$$c_1 . 0 + c_2 . 0 + \ldots + c_{\mu-1} . 0 + c_\mu . r_{\mu\mu} + c_{\mu+1} . 0 + \ldots + c_p . 0 = C,$$

also $C = c_\mu . r_{\mu\mu}$ sein müssen; also könnte C keine Constante sein, und folglich sind $u_1, u_2, \ldots, u_p$ in der That linear unabhängig.

Weiter kann man nun aber zeigen, dass die so bestimmten Potentialfunctionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ über symmetrische Punktreihen in analogem Sinne erstreckt gleiche oder entgegengesetzt gleiche Werthe annehmen, je nachdem bei der betreffenden Fläche $\lambda > 0$ oder $\lambda = 0$ ist. Es ergiebt sich dies einfach aus der Symmetrie der Querschnitte A; man hat nur noch zu beachten, dass für die Flächen vom Charakter $\pm (p, \lambda > 0)$ die Definition jener Potentialfunctionen nach der symmetrischen Umformung genau dieselbe bleibt, weil sich dabei die Ufer der Querschnitte A nicht vertauschen, dass dagegen für die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ wegen der Vertauschung der Ufer ihrer Querschnitte A bei der symmetrischen Umformung die Definition der Potentialfunctionen u sich so umgestaltet, als wenn die Werthe der Periodicitätsmoduln der Functionen an sämmtlichen Querschnitten gerade in die entgegengesetzten übergegangen wären.

Bestimmt man endlich zu den aufgestellten Potentialfunctionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ vermöge der Formel (F) die zugehörigen Potentialfunc-

tionen $v_1, v_2, \ldots, v_p$, so werden diese, wie aus jener Formel unmittelbar hervorgeht, immer genau die umgekehrte Eigenschaft besitzen wie die Functionen u, d. h. es werden die Differentiale der v in symmetrischen Punkten für $\lambda > 0$ entgegengesetzt gleiche, für $\lambda = 0$ aber gleiche Werthe haben; denn die Werthe von x werden in symmetrischen Punkten gleich, die von y aber entgegengesetzt gleich angenommen werden können.

Daher werden nun die aus der Vereinigung der $2p$ Potentialfunctionen $u_1, u_2, \ldots, u_p; v_1, v_2, \ldots, v_p$ hervorgehenden überall endlichen Integrale:

$$w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2, \ldots, \quad w_p = u_p + iv_p$$

im Falle $\lambda > 0$ solche Integrale sein, welche in symmetrischen Punkten conjugirte Werthe annehmen, also reelle Integrale, dagegen im Falle $\lambda = 0$ solche Integrale sein, welche in symmetrischen Punkten Werthe annehmen, die von conjugirten um den Factor i verschieden sind, also mit dem Factor i multiplicirte reelle Integrale.

Die $2p^2$ Periodicitätsmoduln dieser Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_p$ aber lassen sich, wenn man allgemein den Periodicitätsmodul von v_k am Querschnitt A_i mit q_{ki} und am Querschnitt B_i mit b_{ki} bezeichnet, wo q_{ki} und b_{ki} natürlich reelle Grössen sind, in die folgenden beiden Schemata zusammenfassen:

	A_1	A_2	$\ldots$	A_p
$u_1 + iv_1$	$r_{11} + iq_{11}$	iq_{12}	$\ldots$	iq_{1p}
$u_2 + iv_2$	iq_{21}	$r_{22} + iq_{22}$	$\ldots$	iq_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$u_p + iv_p$	iq_{p1}	iq_{p2}	$\ldots$	$r_{pp} + iq_{pp}$

	B_1	B_2	$\ldots$	B_p
$u_1 + iv_1$	ib_{11}	ib_{12}	$\ldots$	ib_{1p}
$u_2 + iv_2$	ib_{21}	ib_{22}	$\ldots$	ib_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$u_p + iv_p$	ib_{p1}	ib_{p2}	$\ldots$	ib_{pp}

Die sämmtlichen Periodicitätsmoduln der w an den Querschnitten B sind also rein imaginär.

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass die überall endlichen Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_p$ linear unabhängig sind. Angenommen nämlich, es bestände eine Relation von der Form:

$$1) \qquad c_1(u_1 + iv_1) + c_2(u_2 + iv_2) + \ldots + c_p(u_p + iv_p) = C,$$

worin $c_1, c_2, \ldots, c_p$ und C irgendwelche Constanten sind, so würde diese Relation bei der symmetrischen Umformung der Fläche im Falle $\lambda > 0$ übergehen in die folgende:

$$2) \qquad c_1(u_1 - iv_1) + c_2(u_2 - iv_2) + \ldots + c_p(u_p - iv_p) = C,$$

im Falle $\lambda = 0$ aber in die Relation:

$$2') \qquad c_1(-u_1 + iv_1) + c_2(-u_2 + iv_2) + \ldots + c_p(-u_p + iv_p) = C.$$

Aus 1) und 2) würde nun folgen:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p = \frac{C}{2}$$

und aus 1 und 2'):

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p = 0.$$

Beide Gleichungen sind aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Potentialfunctionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ unmöglich; also sind in der That $w_1, w_2, \ldots, w_p$ linear unabhängig.

§ 15.

Die reellen Normalintegrale erster Gattung.

Man denke sich jetzt für alle symmetrischen Flächen ein System solcher überall endlicher Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_p$, wie es im vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurde, aufgestellt. Dann wird der Umstand, dass die sämmtlichen Periodicitätsmoduln jener Integrale an den Querschnitten B rein imaginär sind, erlauben, aus dem System der Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_p$ je ein System von p überall endlichen Normalintegralen abzuleiten, welche ebenso wie $w_1, w_2, \ldots, w_p$ reelle Integrale resp. um den Factor i von solchen verschiedene Integrale sind. Denn man hat nur p lineare Combinationen von der Form:

$$J_\mu = c_{1\mu}\, w_1 + c_{2\mu}\, w_2 + \ldots + c_{p\mu} w_p, \quad \mu = 1, 2 \ldots p$$

anzunehmen und darin die Constanten $c_{k\mu}$ so zu bestimmen, dass diese neuen Integrale $J_1, J_2, \ldots, J_p$ an Stelle der Periodicitätsmoduln ib_{kl}, welche die Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_p$ an den Querschnitten B aufwiesen, diejenigen an

diesen Querschnitten annehmen, welche durch das folgende bekannte Schema der einen p^2 Perioden der Normalintegrale gegeben sind:

	B_1	B_2	...	B_p
J_1	$2\pi i$	0	...	0
J_2	0	$2\pi i$	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
J_p	0	0	...	$2\pi i$

Dazu ist allerdings nöthig, dass die Determinante der b_{ki} von Null verschieden ist; dies ist aber, wie Herr Professor Prym in Band LXXI von Crelle's Journal (S. 231 flgg.) bewiesen hat, wirklich immer der Fall. Dass nämlich dann in der That die Integrale J_1, J_2, ..., J_p die erwähnte Eigenschaft bezüglich ihrer Realität erlangen, geht daraus hervor, dass die Constanten $c_{k\mu}$ sich bei jener Bestimmung, wie man leicht sieht, als reelle Constanten ergeben müssen.

Was endlich die zweiten p^2 Periodicitätsmoduln dieser Integrale J_1, J_2, ..., J_p an den Querschnitten A anbelangt, so pflegt man diese so zu bezeichnen, wie es in dem folgenden Schema geschehen ist:

	A_1	A_2	...	A_p
J_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1p}
J_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
J_p	a_{p1}	a_{p2}	...	a_{pp}

und man weiss von ihnen nach der Theorie der Abel'schen Functionen zunächst nur, dass zwischen ihnen die $\frac{p(p-1)}{2}$ Relationen:

$$a_{ki} = a_{ik}$$

bestehen,[1]) so dass also das obige Schema die Form einer symmetrischen Determinante besitzt. Es ist nun aber eben der Zielpunkt dieser Unter-

1) Vergl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, II. Abth. § 20.

suchung, die nähere Beschaffenheit der Werthe dieser Periodicitätsmoduln a_{ki} zu ermitteln, nämlich anzugeben, welche derselben bei den verschiedenen Arten von symmetrischen Flächen reell und welche complex sind, also noch einen imaginären Theil besitzen.

C. Die imaginären Theile der Periodicitätsmoduln a_{ki} der Normalintegrale.

§ 16.

Schemata für die Flächen mit Uebergangscurven.

Es leuchtet ein, dass die Werthe der Periodicitätsmoduln a_{ki} der Normalintegrale $J_1, J_2, \ldots, J_p$ wesentlich abhängen von der Beschaffenheit der Querschnitte B. Es soll nun gezeigt werden, dass bei der hier getroffenen Wahl der Querschnitte B die Werthe der Periodicitätsmoduln a_{ki} entweder völlig reell oder nur so complex sind, dass deren imaginärer Theil gleich πi ist.

Um dies zunächst für die Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ einzusehen, hat man nur einerseits die in § 11 angegebene Zusammensetzung der Querschnitte B bei diesen Flächen zu berücksichtigen und andererseits die in § 13 ausgesprochenen Sätze über die Werthe, welche ein reelles Integral annimmt, wenn man dasselbe über Uebergangscurventheile und wenn man es über Hälften von symmetrischen Wegen der ersten Art erstreckt. Dann ergiebt sich sofort, dass die a_{ki} für diese Flächen von der Form sind:

$$a_{ki} = \alpha_{ki} + \varepsilon \, . \, \pi i,$$

wo α_{ki} eine reelle Grösse und $\varepsilon = +1$ oder $= 0$ ist. Um aber die Realität der a_{ki} für diese Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ genauer anzugeben, sind in den folgenden beiden Schematis einerseits für die Flächen vom Charakter $+(p, \lambda)$ und andererseits für die Flächen vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$ die imaginären Theile der a_{ki} zusammengestellt.

Schema für die Flächen vom Charakter $+(p, \lambda)$.

	A_1	A_2	$\cdots$	$A_{\lambda-1}$	A_λ	$A_{\lambda+1}$	$A_{\lambda+2}$	$A_{\lambda+3}$	$\cdots$	A_p
J_1	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0
J_2	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$J_{\lambda-1}$	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0
J_λ	0	0	...	0	0	$\underline{\pi i}$	0	0	...	0
$J_{\lambda+1}$	0	0	...	0	$\underline{\pi i}$	0	0	0	...	0
$J_{\lambda+2}$	0	0	...	0	0	0	0	$\underline{\pi i}$	...	0
$J_{\lambda+3}$	0	0	...	0	0	0	$\underline{\pi i}$	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$ $\underline{\pi i}$
J_p	0	0	...	0	0	0	0	0	..$\underline{\pi i}$	0

Schema für die Flächen vom Charakter $-(p, \lambda > 0)$.

	A_1	A_2	$\cdots$	$A_{\lambda-1}$	A_λ	$A_{\lambda+1}$	$\cdots$	A_p
J_1	0	0	...	0	0	0	...	0
J_2	0	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$J_{\lambda-1}$	0	0	...	0	0	0	...	0
J_λ	0	0	...	0	$\underline{\pi i}$	0	...	0
$J_{\lambda+1}$	0	0	...	0	0	$\underline{\pi i}$	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
J_p	0	0	...	0	0	0	...	$\underline{\pi i}$

Beide Schemata zeigen, dass für alle Flächen vom Charakter $\pm(p, \lambda > 0)$ immer nur $p - \lambda + 1$ der p^2 Periodicitätsmoduln a_{ki} den imaginären Theil πi aufweisen, alle übrigen aber reell sind.

Die hierbei gewonnenen Resultate stimmen nun auch im Falle $p = 3$ mit denjenigen überein, welche Herr Professor Klein in der eingangs genannten Abhandlung in Bd. X der Mathem. Annalen abgeleitet hat, sofern man dabei lineare Transformationen der Integrale sowohl, als der Querschnitte zu Hilfe nimmt.

§ 17.

Schema für die Flächen ohne Uebergangscurven.

Um auch für die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ die imaginären Theile der a_{ki} zu bestimmen, hat man sich zunächst der in § 12 für die Querschnitte B dieser Flächen erhaltenen Aequivalenz:

$$(B_k + B'_k) \sim \left(\sum_1^p {}^i A_i - A_k \right)$$

zu erinnern, in welcher B'_k der zu B_k symmetrische Weg war, weiter aber zu berücksichtigen, dass die Normalintegrale $J_1, J_2, \ldots, J_p$ für diese Flächen vom Charakter $-(p, 0)$ von reellen Integralen um den Factor i verschieden waren. Denn da $a_{\mu k}$ der Werth des über den Querschnitt B_k erstreckten Integrales J_μ ist, so wird, wenn man:

$$a_{\mu k} = \alpha_{\mu k} + i \beta_{\mu k}$$

setzt, der Werth des über den Weg B'_k hinerstreckten Integrales J_μ sein:

$$a'_{\mu k} = -\alpha_{\mu k} + i \beta_{\mu k},$$

und daher wird sich vermöge der obigen Aequivalenz für den Werth des über den Weg $B_k + B'_k$ hinerstreckten Integrales J_μ die folgende Gleichung ergeben:

$$a_{\mu k} + a'_{\mu k} = 2 i \beta_{\mu k} = i \left\{ \sum_1^p {}^i \gamma_{\mu i} - \gamma_{\mu k} \right\},$$

wenn nämlich allgemein $i \gamma_{\mu k}$ den Werth des über den Querschnitt A_k hinerstreckten Integrales J_μ oder also den Periodicitätsmodul desselben am Querschnitt B_k bezeichnet. Diese Periodicitätsmoduln $i \gamma_{\mu k}$ sind aber durch das in § 15 angegebene Schema der Periodicitätsmoduln der Normalintegrale $J_1, J_2, \ldots, J_p$ an den Querschnitten B bestimmt und es ist nach demselben allgemein:

$$\gamma_{\mu k} = 0 \text{ für } \mu \gtrless k$$

und nur:

$$\gamma_{\mu \mu} = 2 \pi.$$

Also geht die obige Gleichung für $\beta_{\mu k}$ über in die folgenden beiden:

$$\beta_{\mu k} = \pi \text{ für } \mu \gtrless k$$

und

$$\beta_{\mu\mu} = 0.$$

Stellt man diese so bestimmten imaginären Theile der a_{kt} nun auch noch in ein Schema zusammen, so ergiebt sich das folgende:

Schema für die Flächen vom Charakter $-(p, 0)$.

	A_1	A_2	...	A_p
J_1	0	πi	...	πi
J_2	πi	0	...	πi
⋮	⋮	⋮		⋮
J_p	πi	πi	...	0

Es mag nur noch auf das Verhältniss dieses Schemas zu dem aus dem zweiten Schema des vorigen Paragraphen für den Fall $\lambda = 1$ folgenden hingewiesen werden. Es haben nämlich bei dem letzteren gerade nur diejenigen Periodicitätsmoduln a_{kt} imaginäre Theile, welche in dem obigen Schema reell sind, was offenbar dem Umstande parallel läuft, dass für den Fall $\lambda = 0$ erst die Functionen:

$$\frac{1}{i} J_1, \quad \frac{1}{i} J_2, \ldots, \quad \frac{1}{i} J_p,$$

reelle überall endliche Integrale repräsentiren.

XIX.

Grundzüge der mathematischen Chemie.

Von
Prof. Dr. W. C. Wittwer
in Regensburg

V.

6. Chlor.

Atomgewicht: $Cl = 35,5$. Moleculargewicht: $Cl\,Cl = 71$.

Beträgt die Quantität der trägen Substanz eines Massenatoms das 35,5fache eines Wasserstoffmassentheilchens, so erhalten wir das, was die Chemiker Chlor nennen und mit Cl bezeichnen.

Ist ein solches Atom inmitten des ätthererfüllten Raumes gegeben, so werden sich drei Aethertheilchen auf seiner Oberfläche niederlassen, und ihre Mittelpunkte werden die Ecke eines gleichseitigen Dreiecks bilden, dessen Ebene durch den Mittelpunkt des Massenatomes geht. Damit ist die Zahl der unmittelbar aufzunehmenden Aethertheilchen abgeschlössen; es übt jedoch die Gruppe ihren Einfluss auf die Stellungen der Aethertheilchen der Umgebung aus. Am nächsten kommen der Gruppe zwei Aethertheilchen, die ihren Platz in einer auf dem erwähnten Dreieck normal stehenden und durch den Mittelpunkt des Atomes gehenden Geraden (der Axe des Atomes) finden, so dass die Reihe $A\,Cl\,A$ dargestellt wird. Die Ruhelage dieser Aethertheilchen ist angegeben durch:

$$1)\qquad \left(\frac{35,5}{19,803} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{R^2} + R - \frac{3R}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = 0,$$

welcher Gleichung der Werth von $R(Cl\,A) = 0,9987$ Genüge leistet.

Ersetzt man in der vorstehenden Reihe eines der Aethertheilchen durch ein zweites Chloratom, so stellt sich dieses so, dass beide Axen in die Verbindungslinie der Atome fallen und dass das Aetherdreieck des einen Atoms gegen das des andern um 60 Grade gedreht ist. Es ergeben sich nun die Bedingungsgleichungen:

$$2)\left\{\begin{aligned}&6\left(\frac{35,5}{19,803}-1\right)\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35,5}{19,803}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}+\left(3-\frac{35,5}{19,803}\right)R\\&\qquad-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{35,5^2}{19,803^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0\\&\text{und}\\&\frac{35,5}{19,803}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0.\end{aligned}\right.$$

In beiden Gleichungen 2) sind die Glieder, welche $R+R_1$ enthalten, einander gleich, und da dieses auch bei den nachfolgenden Gleichungen mit zwei Unbekannten ohne Ausnahme der Fall ist, so werde ich der Einfachheit wegen stets in der zweiten Gleichung statt der Gesammtheit der in der ersten Gleichung vorkommenden Glieder mit $R+R_1$ den Ausdruck $\varphi(R+R_1)$ setzen. Der Werth von $\varphi(R+R_1)$ ist also von einem Gleichungspaare zum andern verschieden.

Ausserdem will ich noch zwei andere Vereinfachungen benützen.

Die Grösse $\frac{1}{19,803}$ werde ich mit a bezeichnen. Eine sehr oft vorkommende Reihe von Gliedern, nämlich

$$\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 15^{0\,2})^{3/2}}+\frac{2R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}+\frac{2R}{(R^2+4r^2\sin 75^{0\,2})^{3/2}},$$

soll im Nachstehenden stets mit $f(R)$ bezeichnet werden. Die entsprechende Bezeichnung findet auch statt, wenn R_1 oder $R+R_1$ an die Stelle von R treten.

Nach dem Vorangehenden ändert sich die zweite Gleichung in 2) um in:

$$\frac{35,5a}{R_1^2}+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0.$$

Den Gleichungen 2) entsprechen die Werthe $R(ClCl)=0,9762$ und $R_1(ClA)=1,0119$. Es ergiebt sich hieraus, dass, wenn zwei einzelne Chloratome einander nahe kommen, dieselben sich zu einem Molecul $ClCl$ vereinigen können, denn R in 2) ist kleiner als R in 1), und es kann daher ein Aethertheilchen der Reihe $AClA$ durch ein weiteres Chloratom ersetzt werden.

Es dürfte nicht uninteressant sein, einen Vergleich zwischen dem Verhalten des Sauerstoffs bei der Moleculbildung und demjenigen des Chlors anzustellen.

Bei dem einfachen Sauerstoffatom ist die Entfernung der nächsten zwei Aethertheilchen 1,0510*, und wenn eines davon durch ein zweites Sauerstoffatom ersetzt wird, so nähert sich letzteres dem ersten bis auf 0,9568. Bei dem Chlor ist die Aetherentfernung 0,9987 und die des zweiten Chloratoms 0,9762. Es ist also im Chlormolecul die Annäherung

* Abhandlung IV S. 227.

der Atome bedeutend kleiner als im Sauerstoffmolecul, was auf einen höheren Grad von Zersetzbarkeit des ersteren, also ein leichteres Eingehen in andere Verbindungen hindeutet. Dieses gilt zunächst für 0° abs. Temperatur; doch zeigt die Erfahrung die nämliche Erscheinung auch für unsere gewöhnlichen Wärmegrade.

Wird auch das zweite Aethertheilchen in 1) durch ein Chloratom ersetzt, so lagert sich dieses so an das ursprüngliche, nunmehr mittlere, dass sein Aetherdreieck gegen das des letzteren um 60° gedreht, aber parallel ist, so dass es also die nämliche Stellung hat, wie das Dreieck des andern äusseren Atomes. Dieses führt zu der Gleichung:

$$3)\quad \frac{6(35{,}5a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{12.35{,}5aR}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R-\left(35{,}5^2a^2\cdot\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{R^2}$$
$$-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{12R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}=0.$$

R hat den Werth 0,9884. Es kann also auch das zweite begleitende Aethertheilchen durch ein Chloratom ersetzt werden, und wenn bei Fortsetzung des Vorganges mehr und mehr der umgebenden Aethertheilchen ihre Plätze an Chloratome verlieren, deutet dieses darauf hin, dass das Chlor ebenso wie der Sauerstoff durch alleinige Temperaturerniedrigung condensirbar sein müsse. Dass erhöhter Druck eine Beschleunigung der Condensation herbeiführen werde, ist selbstverständlich, da der Druck die Abscheidung der die Chlortheilchen umgebenden Aethertheilchen befördern muss.

Durch Verbindung von drei Atomen Sauerstoff entsteht bekanntlich das Ozon, und die analoge Verbindung ist auch bei dem Chlor, wenigstens bei 0° abs. Temperatur möglich. Bisher weiss man in der Chemie von einem solchen Analogon des Ozons nichts. Möglich, dass diese Verbindung noch nicht gefunden wurde, wie ja auch die Entdeckung des Ozons um manches Jahr später datirt, als die des nicht activen Sauerstoffs. Doch ist noch ein Umstand zu berücksichtigen, der die Bildung von Cl_3 jedenfalls erschwert. Bei der Combination OOA ist $(OA) = 1{,}0715$, und wenn das Aethertheilchen durch ein Sauerstoffatom verdrängt wird, so nähert sich letzteres dem alsdann mittleren Atom bis auf 0,9820; es ergiebt sich also hier eine ganz bedeutende Differenz und es wird dem dritten Sauerstoffatom verhältnissmässig leicht, das Aethertheilchen zu entfernen. Soll bei dem Chlor der nämliche Vorgang eintreten, so ist bei $ClClA$ der Werth von $(ClA) = 1{,}0119$, während, wenn das Aethertheilchen durch ein weiteres Chloratom verdrängt wird, $(ClCl) = 0{,}9884$ wird. Der Unterschied ist hier viel kleiner und darum muss auch die Wahrscheinlichkeit der Aetherverdrängung bei dem Chlor viel kleiner sein als bei dem Sauerstoff. Dieses dürfte mit der Grund sein, warum die Verbindung Cl_3 noch nicht hergestellt wurde.

Denken wir uns, die Verbindung O_3 oder Cl_3 sei auf was immer für eine Weise gebildet und eine grössere Anzahl solcher Molecule in einem gegebenen Raume vorhanden, so muss, wenn zwei derselben einander nahe kommen, eine Neigung der sich genäherten Randmolecule bestehen, ihre bisherigen Gefährten zu verlassen und unter einander eine Verbindung einzugehen, so dass aus je zwei Moleculen O_3 oder Cl_3 drei Molecule O_2 oder Cl_2 sich bilden. Es ist dieses möglich, denn bei dem Sauerstoff rücken die Atome aus der Entfernung 0,9820 nach 0,9568 und bei dem Chlor von 0,9884 nach 0,9762. Diese Erscheinung wird um so leichter eintreten, je grösser die Wahrscheinlichkeit der Begegnung wird, also je dichter die Molecule O_3 oder Cl_3 bei einander sind, oder je mehr sie durch Schwingungen sich nahe kommen. Dieses findet auch in der That bei dem Ozon statt, man kann den Sauerstoff nur bis zu einer gewissen Grenze ozonisiren, d. h. die Zahl der unter ein gegebenes Quantum von Moleculen nicht activen Sauerstoffs eingemengten Ozonmolecule ist eine beschränkte, ist um so mehr beschränkt, je höher die Temperatur wird.

Bei Besprechung der Alkalimetalle habe ich das Anlagern eines Atomes an das andere in der nämlichen Weise abgeleitet, wie früher bei dem Sauerstoff und oben bei dem Chlor, und es kann zwischen ihnen und den letzteren bezüglich des Aggregatzustandes nicht wohl ein anderer Unterschied bestehen, als die Höhe des Siedepunktes. Die Alkalimetalle nehmen den luftförmigen Aggregatzustand erst bei höherer Temperatur an als Sauerstoff und Chlor, und es ist wohl nicht uninteressant, nachzusehen, wie die Verbindungen sich bei 0° abs. Temperatur unterscheiden. Zu diesem Zwecke lasse ich die Combinationen: Aether, Atom, Aether, dann Atom, Atom, Aether, und endlich Atom, Atom, Atom für Sauerstoff, Chlor, Lithium und Natrium hier folgen. Die unterhalb und zwischen den Bestandtheilen der Verbindungen stehenden Zahlen geben, wie früher, die Distanzen. Für Lithium und Natrium habe ich letztere nach den neuen Constanten berechnet. Kalium konnte ich hier nicht verwenden, weil bei diesem abweichend von den anderen vier Elementen sich nicht drei Atome in einer Reihe hinter einander stellen lassen, wie ich dieses bereits in meiner dritten Abhandlung bei der Besprechung des Kaliums gezeigt habe.

A O A	*O O A*	*O O O*
1,0510 1,0510	0,9568 1,0715	0,9820 0,9820
A Cl A	*Cl Cl A*	*Cl Cl Cl*
0,9987 0,9987	0,9762 1,0119	0,9884 0,9884
A Li A	*Li Li A*	*Li Li Li*
1,1865 1,1865	1,1256 1,2314	1,1740 1,1740
A Na A	*Na Na A*	*Na Na Na*
1,2073 1,2073	1,1498 1,2630	1,2065 1,2065

Man sieht aus diesen Zahlen sofort, dass die vorgeführten Elemente sich in zwei Paare theilen, Sauerstoff und Chlor einer-, Lithium und Natrium andererseits. Bei den bei gewöhnlicher Temperatur gasförmigen Substanzen ist die Atomentfernung beträchtlich kleiner als bei den festen Körpern, und es ergiebt sich daraus, dass der Einfluss der Wärme auf die Aenderung des Aggregatzustandes grösser sein müsse, wenn die Atomdistanz bei 0^0 abs. Temperatur kleiner ist, als wenn sie einen grösseren Werth hat. Die Verschiedenheit des Atomgewichtes kann hier nichts ausmachen, denn wenn man von dem kleinsten Atomgewichte der vier Elemente zu dem grössten übergeht, so wechselt allemal ein fester Körper mit einem Gase ab.

Chlor und Sauerstoff.

Bleibt man, wie ich in den früheren Abhandlungen gethan habe, bei der Betrachtung von Gruppen von je drei Gliedern stehen, so ergeben sich die Zusammenstellungen: zwei Atome Chlor und ein Atom Sauerstoff, ein Atom Chlor und zwei Atome Sauerstoff, und endlich ein Atom Sauerstoff, ein Atom Chlor und ein Aethertheilchen.

Verbindung von zwei Atomen Chlor mit einem Atom Sauerstoff (Unterchlorigsäureanhydrid, Cl_2O). Bei dieser Verbindung ist zunächst die Frage zu beantworten, in welcher gegenseitigen Stellung sich die drei Atome befinden. Sie stellen sich so gegen eineinander, dass die gegenseitige Abstossung einen kleinsten Werth erlangt.

Was nun die Chloratome anbelangt, so ist sicher, dass sie so gegen einander gelagert sind, dass die Axe des einen Atoms in der Verlängerung der Axe des andern liegt, so dass also die Aetherebenen beider parallel und die Aetherdreiecke gegen einander um 60^0 gedreht sind. Weniger sicher ist *a priori* die Stellung, welche ein Sauerstoffatom gegen ein Chloratom einnimmt. Es kann *a)* das Sauerstoffmassentheilchen in der Aetherebene des Chlors liegen, so dass die Verbindungslinie beider Massentheilchen den Winkel halbirt, den die Verbindungslinien zweier Chloräthertheilchen mit dem Chlormassentheilchen einschliessen, während die beiden Atomaxen einander parallel sind. Es kann auch *b)* das Sauerstoffmassentheilchen in der Axe des Chloratoms liegen, während seine Axe auf dieser Verbindungslinie normal ist, und gleichzeitig auch auf der Richtung der Verbindungslinie, die man von dem Chlormassentheilchen zu einem seiner Aethertheilchen zieht. Im ersten Falle ist die gegenseitige Einwirkung beider Atome gegeben durch:

$$\text{a)}\quad \frac{2.16a\left(R-\frac{r}{2}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2\right)^{3/2}}+\frac{16a}{(R+r^2)}+\frac{2.35{,}5\,aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4\left(R-\frac{r}{2}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{2}\right)^2+\frac{7}{4}r^2\right)^{3/2}}$$

$$-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16.35{,}5a^2}{R^2}.$$

Im Falle *b)* hat man

$$\text{b)}\qquad \frac{(2.35{,}5+3.16)\,a\,R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-fR-\frac{16.35{,}5\,a^2}{R^2}.$$

Es ist nun sehr naheliegend, zur Beantwortung der erwähnten Frage die vorstehenden Ausdrücke in Reihen nach wachsenden Potenzen von rR^{-1} zu entwickeln und ihre Werthe für verschiedene Grössen von R zu bestimmen. Man sieht jedoch bald, dass diese Reihen so wenig convergent sind, dass es viel einfacher ist, die Ausdrücke direct zu berechnen, wie ich es bei den bisher vorgeführten Gleichungen stets gethan habe. Setzt man nun den Werth von $R=0{,}95$ in den Formeln a) und b) ein, so ergiebt sich bei a) 5,9645 — 8,5486, also die Abstossung 2,5841, während man bei b) 5,5424 — 8,1053, d. i. die Abstossung 2,5629 bekommt. Es ist also die Abstossung bei der Stellung a) um 0,0212 grösser. Setzt man den Werth von $R=1{,}05$, so giebt a) 4,9905 — 7,2080 = — 2,2175 und b) 4,6831 — 6,8226 = — 2,1395. Hier ist also die Differenz beider Abstossungen 0,0780. Die Stellung b) ist also um so mehr vortheilhaft, je grösser R wird, und es ist schon möglich, dass bei sehr kleinen Werthen von R die Stellung a) eine geringere Abstossung zeigt; doch kommt eine so geringe Grösse von R im Nachstehenden nicht vor. Es ist also für die Verbindung Cl_2O vorauszusetzen, dass die drei Massentheilchen sich in einer Geraden befinden.

Nachdem die Stellung der Atome festgestellt ist, bleibt noch die Reihenfolge derselben zu untersuchen übrig. Dieselbe kann sein: *a)* $ClClO$, *b)* $ClOCl$.

a) Bei der Reihenfolge $ClClO$, in der also die Atome die oben angegebene Stellung haben, ergeben sich die Gleichungen:

$$4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{6(35{,}5a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(3.16+2.35{,}5)\,a\,(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5\,a)R\\&-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{35{,}5^2a^2}{R^2}-\frac{16.35{,}5a^2}{(R+R_1)^2}-f(R+R_1)=0\\&\text{und}\\&\frac{(3.16+2.35{,}5)\,a\,R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16\,a)R_1-\frac{16.35{,}5a^2}{R_1^2}-f(R_1)+\varphi(R+R_1)\\&\qquad=0.\end{aligned}\right.$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe: $R\,(ClCl)=0{,}9889$ und $R_1(ClO)=1{,}0011$.

b) Bei der Zusammenstellung $ClOCl$ entsteht bei unveränderter Drehung der Atome die Gleichung:

$$5)\quad\begin{aligned}&\frac{((3.16+2.35{,}5)\,a-\frac{3}{4})R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(35{,}5\,a-1)\,12R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5\,a)R\\&\qquad-\frac{35{,}5\,a^2}{R^2}\left(16+\frac{35{,}5}{4}\right)-f(R)=0.\end{aligned}$$

Hier ist $R(ClO)=0{,}9933$.

Soll sich Unterchlorigsäureanhydrid nach der Combination *a)* direct bilden, so kann dieses nur dadurch geschehen, dass ein Sauerstoffatom sich an ein Chlormolecul anhängt, und zu diesem Zwecke muss also ein Sauerstoffmolecul zerrissen werden. Soll dieses möglich sein, so muss die Entfernung des an das Chlormolecul sich anschliessenden Sauerstoffatoms von dem nächsten Chloratom, also R_1 oder $(Cl O)$ in 4), kleiner sein, als die Distanz der Sauerstoffatome in dem Sauerstoffmolecul, also $< 0{,}9568$. Dieses ist jedoch nicht der Fall, denn der Werth von R_1 in 4) ist 1,0011 und von einer Zerreissung des Sauerstoffmoleculs kann also keine Rede sein. Ausserdem muss das sich anschliessende Sauerstoffatom das neben dem Chlormolecul befindliche Aethertheilchen von seinem Platze verdrängen können, es muss also $(Cl O)$ in 4) kleiner sein, als $(Cl A)$ in 2). Ersterer Werth ist 1,0011, der letztere 1,0119. Eine Verdrängung des Aethertheilchens wäre hier möglich, doch wegen der geringen Grösse der Differenz nicht sehr wahrscheinlich. Betrachtet man das zweite Kriterium auch als bejahend, so ergiebt sich aus dem ersten, dass die Verbindung durch directes Zusammentreten der geeigneten Quantitäten von Sauerstoff und Chlor sich zu bilden nicht vermag.

Zum Eintreten der Combination *b)* ist nicht nur eine Zerreissung eines Sauerstoffmoleculs nöthig, sondern auch die Zerreissung eines Chlormoleculs, weil das Sauerstoffatom sich zwischen zwei Chloratome einschieben muss. Es muss also R in 5) kleiner sein als 0,9568, d. i. $(O O)$ im Sauerstoffmolecul, und kleiner als 0,9762, d. i. $(Cl Cl)$ in 2). Beides ist nicht der Fall und darum auch das Eintreten dieser Combination durch directes Zusammentreten von Sauerstoff und Chlor wenigstens für 0° abs. Temp. unmöglich. Man erhält übrigens die Verbindung auch bei gewöhnlicher Temperatur nicht auf directem Wege. Indirect bekommt man das Unterchlorigsäureanhydrid dadurch, dass man Chlorgas auf Quecksilberoxyd einwirken lässt, und die Verbindung entsteht nach der Formel:

$$Hg\,O + 2\,Cl_2 = Cl_2\,O + Hg\,Cl_2.$$

Betrachtet man diese Formel, so sollte man meinen, es müsste sich das Unterchlorigsäureanhydrid am einfachsten in der Weise bilden, dass der Sauerstoff des Quecksilberoxyds sich an ein Chlormolecul anschliesst und seinerseits durch ein zweites Chlormolecul ersetzt wird, das sich mit dem freigewordenen Quecksilber verbindet. Dieser so einfache Vorgang, demzufolge die Combination *a)* zum Vorschein kommen würde, hat das gegen sich, dass er dem Satze von der Einwerthigkeit des Chlors widerspricht; doch muss ich daran erinnern, dass auch Stimmen dafür sind, welche dem Chlor dem Sauerstoff gegenüber eine höhere Werthigkeit vindiciren. So hält L. Meyer* das Chlor in den Sauerstoffverbindungen für siebenwerthig.

* Moderne Theorien der Chemie, 3. Aufl., S. 275.

Hat sich das Unterchlorigsäureanhydrid, sei es auf was immer für eine Weise, gebildet, so ist stets die Möglichkeit einer Zersetzung durch Umgruppirung vorhanden. Nehmen wir die Combination *a)*, so können, wenn zwei Molecule einander nahe kommen, die Sauerstoffatome sich abtrennen und zu einem Sauerstoffmolecul zusammentreten. Es muss zu diesem Zwecke $(Cl\,O)$ in 4) grösser sein als $(O\,O)$ im Sauerstoffmolecul. Erstere Distanz hat die Grösse 1,0011, letztere ist $=0{,}9568$, und die Abtrennung ist daher sehr gut möglich. Zur Zerlegung der Combination *b)* muss $(O\,Cl)$ in 5) grösser sein als $(Cl\,Cl)$ in 2). Der Werth von $(O\,Cl)$ ist 0,9933, derjenige von $(Cl\,Cl)$ ist 0,9762. Es ist also auch hier die Zersetzung von Cl_2O naheliegend; doch ist die Differenz nicht so gross wie im vorigen Falle, und die Combination $Cl\,O\,Cl$ stellt also eine constantere Verbindung dar, als die Combination $Cl\,Cl\,O$. Es entspricht dieses Resultat dem Satze von der Einwerthigkeit des Chlors.

Es dürfte nicht überflüssig sein, hier die in den Lehrbüchern der Chemie vorkommende und das Unterchlorigsäureanhydrid vorstellende Formel $\left.\begin{matrix}Cl\\Cl\end{matrix}\right\}O$ etwas näher zu besprechen. Nach dieser Formel wäre vorauszusetzen, dass zwei Chloratome sich übereinander befinden und seitwärts davon ein Sauerstoffatom sich anlagert. Zur Erzielung der geringsten Abstossung stehen die zwei Chloratome in einiger Entfernung so, dass ihre Aetherebenen parallel sind und ihre Axen zusammenfallen. Die Aetherdreiecke sind um 60° gegen einander gedreht. In der Mitte zwischen beiden Chlorebenen ist eine dritte denselben parallele, und die Projectionen der Verbindungslinien der Chlormassentheilchen mit ihren Aethertheilchen schliessen auf der Mittelebene sechs Winkel von je 60° ein. Halbirt man nun einen solchen Winkel und zieht man dann eine auf der Axe der Chloratome normale Gerade, so steht auf dieser in einiger Entfernung von der Axe das Massentheilchen des Sauerstoffs. Die Axe desselben mag ursprünglich der Chloraxe parallel sein; doch wird infolge der Aetherwirkung der Chloratome eine Abweichung von dieser Stellung eintreten, und ebenso verändert sich die gegenseitige Drehung der Chloratome in der Weise, dass der dem Sauerstoff gegenüberliegende Winkel der Projectionen etwas grösser wird als 60°. Nach dem, was oben über die gegenseitige Stellung von Chlor- und Sauerstoffatom angeführt wurde, kann diese Stellung unmöglich eine Stellung der geringsten Abstossung sein, und es muss daher das Sauerstoffatom sich von derselben weg begeben und sich so stellen, dass seine Lage die oben durch die Formel b) angegebene wird. Dabei ist es gleichzeitig auch in dem Minimum der Abstossung gegen das zweite Chloratom. Es muss daher jedesmal eine der beiden Combinationen $Cl\,Cl\,O$ oder $Cl\,O\,Cl$ eintreten, und die chemische Formel $\left.\begin{matrix}Cl\\Cl\end{matrix}\right\}O$ wäre, wenn damit eine Stel-

lung der Atome bezeichnet werden wollte, unmöglich. Bei den höheren Oxydationsstufen des Chlors, der Chlorsäure und der Ueberchlorsäure, mag es allerdings vorkommen, dass, nachdem die besten Plätze vergeben sind, die noch weiter aufzunehmenden Sauerstoffatome sich seitwärts anlagern; allein das gehört nicht hierher.

Verbindung eines Atoms Chlor mit zwei Atomen Sauerstoff (Unterchlorigsäureanhydrid, ClO_2). Auch hier sind wieder zwei Fälle möglich; es kann die Reihenfolge der Atome sein: *a)* $ClOO$ und *b)* $OClO$.

a) Im ersten dieser Fälle ist das in der Mitte befindliche Sauerstoffatom gegen das benachbarte Chlor in der gewöhnlichen Stellung, das äussere Sauerstoffatom ist so gelagert, dass seine Axe gleichzeitig auf der Verbindungslinie der drei Atome und der Axe des mittleren Sauerstoffs normal steht. Man hat nun die Gleichungen:

$$6)\left\{\begin{aligned} &\frac{(2.35{,}5+3.16)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{((2.35{,}5+3.16)a-2)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\\ &+(3-35{,}5a)R-\frac{35{,}5.16a^2}{R^2}-\frac{(35{,}5.16a^2+1)}{(R+R_1)^2}\\ &-f(R)-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}=0\\ &\text{und}\\ &\frac{4.16aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R_1-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{16^2a^2}{R_1^2}+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Diesen Formeln entsprechen die Werthe: $R(ClO)=0{,}9965$ und $R_1(OO)=0{,}9765$.

b) Im zweiten Falle steht wieder jedes Sauerstoffatom gegen das in der Mitte befindliche Chlor wie gewöhnlich; es ist aber die Axe eines derselben gegen die des andern um 60° gedreht.

Gleichgewichtsbedingung ist:

$$7)\quad \frac{(2.35{,}5+3.16)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{4(2.16a-1)R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R-f(R)-\frac{4R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{16(35{,}5+4)a^2}{R^2}=0.$$

Dieser Gleichung entspricht $R(OCl)=1{,}0013$.

Die Vergleichung der Resultate von 6) und 7) zeigt, dass im ersteren Falle sowohl R als R_1 kleiner sind, als R in 7), und es besteht daher kein Zweifel, dass die Combination 6) derjenigen 7) vorzuziehen sei, welches Ergebniss auch mit der Forderung der Einwerthigkeit des Chlors übereinstimmt. Man kann sich die Bildung der Verbindung am leichtesten dadurch erklären, dass man annimmt, an ein Molecul Sauerstoff schliesse sich ein Chloratom an. Es ist übrigens $R(ClO)$ in 6) grösser als $(ClCl)$ in 2), und es muss daher eine Neigung bestehen, dass

die Chloratome von dem Sauerstoff weggehen und zu je zweien ein Chlormolecul bilden. Es ist in der That auch das Unterchlorsäureanhydrid leicht zersetzbar, ist, wie die Beobachtung zeigt, ein in hohem Grade explosiver Körper.

Verbindung eines Atoms Chlor mit einem Atom Sauerstoff. Diese Verbindung, der man als drittes Glied ein Aethertheilchen beigeben kann, lässt zwei Combinationen zu, denn es kann *a)* die Reihenfolge $ClOA$, sie kann *b)* $OClA$ sein. Jedesmal sind Chlor und Sauerstoff in der bereits wiederholt angegebenen Stellung der kleinsten Abstossung.

a) Bei der Reihenfolge $ClOA$ ergeben sich die Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{(2.35{,}5+3.16)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\dfrac{35{,}5a}{(R+R_1)^2}+(3-35{,}5a)R-\dfrac{16.35{,}5a^2}{R^2} \\ \qquad -f(R)-\dfrac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0 \\ \text{und} \\ \dfrac{16a}{R_1^2}+R_1-\dfrac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe: $R(ClO)=0{,}9765$ und $R_1(OA)=1{,}0668$.

b) In diesem Falle ist gegen *a)* nur die Reihenfolge der Theilchen geändert. Die entsprechenden Gleichungen sind:

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{(2.35{,}5+3.16)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\dfrac{16a}{(R+R_1)^2}+(2-16a)R-\dfrac{16.35{,}5a^2}{R^2} \\ \qquad -f(R)-\dfrac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0 \\ \text{und} \\ \dfrac{35{,}5a}{R_1^2}+R_1-\dfrac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0. \end{cases}$$

Es ist $R(OCl)=0{,}9883$ und $R_1(ClA)=1{,}0138$.

Wir haben hier ohne Zweifel den schon wiederholt besprochenen Fall, dass sich durch Ausscheiden der Aethertheilchen eine Doppelverbindung $ClOOCl$ oder $OClClO$ bildet. Am naturgemässesten, wenigstens dem Satze von der Einwerthigkeit des Chlors entsprechend, ist der erstere Fall, in dem sich an ein Sauerstoffmolecul beiderseits ein Chloratom anhängt, und diese Annahme gewinnt noch dadurch, dass, wie bereits oben erwähnt, die Zerlegung eines Chlormoleculs leichter vor sich geht, als diejenige eines Sauerstoffmoleculs. Wir hätten also für die Verbindung Cl_2O_2 die Reihenfolge $ClOOCl$. Durch directes Zusammenbringen von Chlor und Sauerstoff entsteht die Verbindung $ClOA$ nicht, weil $R(ClO)$ in 8) nicht kleiner ist, als $(ClCl)$ in 2), und man schwer annehmen kann, dass ein Chloratom sich von dem andern trennt und sich an den Sauerstoff anhängt, dem es auch nicht näher tritt, als vorher dem zweiten Chloratom. Berücksichtigt man die Verbindung $ClOOCl$,

so hat man den Fall 6), und da ergiebt sich, dass (*ClO*) nicht nur nicht kleiner, sondern erheblich grösser ist, als (*ClCl*) in 2). Wäre also die Verbindung wirklich vorhanden, so müsste eine Neigung zu zerfallen bestehen; sie ist übrigens meines Wissens überhaupt noch nicht hergestellt worden. Bei Annahme der Zusammensetzung *OClClO* kommt man nach 4) zu einer noch weniger beständigen Verbindung.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass zwischen Chlor und Sauerstoff eine nur untergeordnete Verwandtschaft besteht. Beide Elemente verbinden sich nicht direct mit einander, und ist eine Verbindung auf indirectem Wege zu Stande gebracht worden, so ist doch stets eine Neigung vorhanden, dass durch Lostrennung des Chlors eine Zersetzung vor sich geht.

Der Satz von der Einwerthigkeit des Chlors ist vollständig gewahrt bei Cl_2O_3 und bei ClO_2. Bezüglich der Verbindung Cl_2O ist zu beachten, dass die Bildung derselben sich leichter erklären lässt, wenn man ihre Constitution als *ClClO* voraussetzt, als wenn man *ClOCl* annimmt. Auch die Formeln 4) geben der ersteren Annahme gegen die zweite einen wenn auch ganz kleinen Vorzug, weil (*ClCl*) in 4) etwas, wenn auch nur ganz wenig kleiner ist, als (*ClO*) in 5). Es ist jedoch dieser Unterschied (0,9933 — 0,9889) so klein, dass er bei Annahme einer von 0^0 verschiedenen Temperatur ganz leicht in das Gegentheil umschlagen kann. Ausserdem muss ich wiederholt darauf aufmerksam machen, dass die Formeln und die Constanten nicht so genau sind, dass man auf Unterschiede, die erst in der dritten Decimale auftreten, ein grosses Gewicht legen kann. Es ist übrigens, wie bereits oben bemerkt, die Verbindung *ClOCl*, also diejenige, welche mit dem Satze von der Einwerthigkeit des Chlors harmonirt, jedenfalls die beständigere.

Chlor und Wasserstoff.

Untersucht man die Zahl der dreigliedrigen Combinationen von Chlor, Wasserstoff und (im Bedürfnissfalle) Aether, so ergiebt sich, dass, da der Natur der Sache nach Wasserstoff und Aether stets die äusseren Glieder sein müssen, nur drei verschiedene Zusammenstellungen möglich sind. Es sind diese *HClA*, *HClH* und *ClClH*.

Bezüglich der gegenseitigen Stellung von Chlor und Wasserstoff sind mehrere Fälle zu berücksichtigen. Es kann *a)* das Wasserstoffatom in der Aetherebene des Chloratoms liegen und befindet sich dann in einer Geraden, welche den Winkel zwischen den Verbindungslinien zweier Aethertheilchen und des Massentheilchens des Chloratoms halbirt. Es kann *b)* das Wasserstoffatom in der Axe des Chloratoms liegen. In beiden Fällen kann wieder das Massentheilchen des Wasserstoffs dem Chlor *α*) zu-, es kann ihm *β*) abgewendet sein. Um nun die Stellung der geringsten Abstossung zu ermitteln, habe ich das nämliche Verfahren

beobachtet, wie oben bei dem Sauerstoff, ich habe die Abstossungen für die Entfernungen 0,9 und 1,0 des Angriffspunktes oder Mittelpunktes des Wasserstoffs berechnet. Dieser liegt zwischen dem Aethertheilchen und dem Massentheilchen, um $\frac{r}{19,803+1} = 0,0165$ von ersterem entfernt. Die Abstossungen sind gegeben durch nachstehende Formeln:

$$a\alpha)\quad \frac{2a(R-\frac{1}{2}r)}{((R-\frac{1}{2}r)^2+\frac{3}{4}r^2)^{3/2}}+\frac{(35,5+1)a}{R^2}-\frac{35,5a^2}{(R-r)^2}-\frac{2\left(R-\frac{r}{2}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{(R+r)^2},$$

$$a\beta)\quad \frac{2a\left(R+\frac{r}{2}\right)}{\left(\left(R+\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2\right)^{3/2}}+\frac{a}{(R+2r)^2}+\frac{35,5a}{R^2}-\frac{2\left(R-\frac{r}{2}\right)}{\left(\left(R-\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2\right)^{3/2}}-\frac{35,5.a^2+1}{(R+r)^2},$$

$$b)\quad \frac{3a(R\mp r)}{((R\mp r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35,5a}{R^2}-\frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{35,5a^2}{(R\mp r)^2}.$$

Als R gilt die Entfernung des Wasserstoffäthertheilchens von dem Chlormassentheilchen. In der Formel b) gilt das obere Zeichen für α), das untere für β).

Die Ergebnisse sind nun nachstehende.

Entfernung:	$a\alpha$:	$a\beta$:	$b\alpha$:	$b\beta$:
0,9	− 1,2744	− 1,4283	− 0,7846	− 0,7883
1,0	− 1,0530	− 1,1917	− 0,6987	− 0,7316.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Abstossung einen kleinsten Werth erhält, wenn das Wasserstoffatom in der Axe des Chloratoms liegt und sein Massentheilchen dem Chlor zugewendet ist.

Untersucht man nun die Gleichgewichtsbedingungen für die Combination $HClA$, so ergiebt sich:

$$10)\quad \begin{cases} \frac{35,5a}{R^2}+\frac{a}{(R+R_1-r)^2}+\frac{3a(R-r)}{((R-r)^2+r^2)^{3/2}}+18,803aR+ar \\ \qquad -\frac{35,5a^2}{(R-r)^2}-\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}}=0 \\ \text{und} \\ \qquad \frac{35,5a}{R_1^2}+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0. \end{cases}$$

Der Werth von R, welcher diesen Gleichungen entspricht, ist 0,9898, wenn R die Entfernung des Wasserstoffäthertheilchens von dem Chlormassentheilchen bedeutet. Zieht man nach dem, was ich in meiner vorigen Abhandlung hierüber angegeben habe, $\frac{r}{20,803} = 0,0165$ hiervon ab, um die Entfernung des Mittelpunktes des Chlors von demjenigen des

Wasserstoffs zu erhalten, so ergiebt sich $(HCl) = 0{,}9733$. Der Werth von $R_1(ClA)$ ist 0,9903.

Die Verbindung H_2Cl setzt die Combination $HClH$ voraus und wird bedingt durch die nachstehende Formel:

$$11)\quad \frac{(35{,}5a - \frac{1}{4})}{R^2} + \frac{3a(R-r)}{((R-r)^2+r^2)^{3/2}} + \frac{2a}{(2R-r)^2} + 18{,}803\,aR + ar - \frac{35{,}75a^2}{(R-r)^2} - \frac{3R}{(R^2+r^2)^{3/2}} = 0.$$

Hier ist $R = 0{,}9820$ und nach Abzug von 0,0165 bleibt noch $(HCl) = 0{,}9655$.

Bei der Combination Cl_2H haben wir die Reihenfolge $ClClH$, die Ebenen der beiden Chloratome sind parallel und gegen einander um 60^0 gedreht, es ist also hier der nämliche Fall, wie wenn in 2) das Aethertheilchen durch ein Wasserstoffatom ersetzt wird, das sein Massentheilchen gegen das Chlor gerichtet hat. Es ergeben sich nun die Gleichungen:

$$12)\quad \begin{cases} \frac{6(35{,}5a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}} + \frac{3a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}} + \frac{35{,}5a}{(R+R_1)^2} + (3-35{,}5a)R \\ \quad - \frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}} - \frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}} - \frac{35{,}5^2a^2}{R^2} \\ \quad - \frac{35{,}5a^2}{(R+R_1-r)^2} = 0 \\ \text{und} \\ \frac{35{,}5a}{R_1^2} + \frac{3a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}} + 18{,}803\,aR_1 + ar \\ \quad - \frac{35{,}5a^2}{(R_1-r)^2} + \varphi(R+R_1) = 0. \end{cases}$$

Die Entfernung $R(ClCl)$ ist 0,9706, während R_1 den Werth 1,0017 hat. Nach Abzug von 0,0165 bleibt also für die Entfernung (ClH) noch 0,9852.

Ueberblickt man diese Zahlen, so ergiebt sich, dass allerdings zwischen dem Chlor und den Alkalimetallen, die ich in meiner dritten Abhandlung besprochen habe, bezüglich der Verwandtschaft zum Wasserstoff ein grosser Unterschied besteht, insofern Chlor sich leicht mit Wasserstoff verbindet, was bei den Alkalimetallen nicht der Fall ist; allein man beobachtet doch auch Verhältnisse, die sich schwer erklären lassen. Eigentlich sollte die Entfernung (ClH) bei der Combination $HClA$, also dem Chlorwasserstoff, am kleinsten sein, und dann wäre zu erwarten, dass bei der Zusammenstellung $ClClH$ die Entfernung $(ClCl)$ grösser sei als bei $ClClA$ in 2). Endlich sollte HCl bei $HClH$ grösser sein als in $HClA$. Würde all' dieses eintreten, so wäre der Chlorwasserstoff HCl die am leichtesten eintretende Verbindung von Chlor und Wasserstoff. Diese könnte zunächst dadurch entstehen, dass zu beiden Seiten eines Chlormoleculs je ein Wasserstoffatom sich anlegt, durch deren Zutritt

dann die Trennung der Chloratome im Molecule bewerkstelligt würde. Das wäre ein Vorgang, der dem von mir früher geschilderten Uebergange des gelben Kaliumhyperoxyds in weisses analog wäre; allein es steht der Umstand entgegen, dass in Cl_2H die Entfernung $(ClCl)$ etwas kleiner ist als im Chlormolecul, während sie grösser sein sollte. Es ist allerdings dieser Unterschied erst in der dritten Decimale, also da, wo die Ergebnisse der Rechnung unsicher werden, und es kann derselbe bei höherer Temperatur ganz leicht ins Gegentheil umschlagen; allein vorläufig ist er noch da, und ich bin fern davon, zu glauben, dass nicht durch Aenderung der Constanten oder Berücksichtigung eines von mir übersehenen Nebenumstandes ein anderes Resultat erzielt werden könnte.

Bei dem Wasserstoff sind noch zwei Umstände da, welche der Berechnung der Verhältnisse desselben Schwierigkeiten in den Weg legen. Der eine ist der, dass die Grösse r, d. i. die Summe der Radien von Massen- und Aetherthelichen, die ich bis jetzt noch als für alle Elemente gleich vorauszusetzen genöthigt bin, bei dem Wasserstoff des kleinen Atomgewichts wegen weiter von dem durchschnittlichen Werthe abweichen muss, als bei den übrigen bisher besprochenen Elementen. Der zweite Umstand ist die Schwierigkeit, der unsymmetrischen Gestalt des Wasserstoffatoms wegen seinen Mittelpunkt so genau anzugeben, als dieses bei den übrigen Elementen geschehen kann. Ich habe mich daher auch schon früher genöthigt gesehen, an meinen ursprünglichen Voraussetzungen Aenderungen vorzunehmen.

Chlor, Sauerstoff und Wasserstoff.

Von den verschiedenen Verbindungen, die durch Abänderung der Zahl der eintretenden Sauerstoffatome gebildet werden, kann ich hier nur diejenige berücksichtigen, welche aus je einem Atom Sauerstoff, Chlor und Wasserstoff besteht, die unterchlorige Säure. Für die Gruppirung der drei Atome giebt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Es kann sein *a)* $ClOH$ oder *b)* $OClH$.

a) Wenn der Sauerstoff in der Mitte steht, so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(3.16+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35,5a}{(R+R_1)^2}\\ &\qquad+(3-35,5a)R-f(R)-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\\ &\qquad-\frac{16.35,5a^2}{R^2}-\frac{35,5a^2}{(R+R_1-r)^2}=0\\ &\text{und}\\ &\frac{16a}{R_1^2}+\frac{2a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+18,803aR_1+ar-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}\\ &\qquad-\frac{16a^2}{(R_1-r)^2}+\frac{2a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0\end{aligned}\right.$$

Der Werth von $R(ClO)$ ist 0,9717, der um 0,0165 verminderte Werth von R_1, also (OH), ist 1,0301.

b) Bei der Reihenfolge $OClH$ muss sein:

$$14)\left\{\begin{aligned}&\frac{(3.16+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16a}{(R+R_1)^2}+\frac{2a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R\\&\quad-f(R)-\frac{16a^2}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16.35,5\,a^2}{R^2}=0\\&\text{und}\\&\frac{35,5a}{R_1^2}+\frac{3a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+18,803\,aR_1+ar-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{35,5a^2}{(R_1-r)^2}\\&\quad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Den Gleichungen entsprechen die Werthe: $R(OCl)=0,9825$ und $R_1=1,0034$, also $(ClH)=0,9869$.

Man kann sich die Bildung der unterchlorigen Säure nach den Formeln 13) dadurch erklären, dass in einem Wassertheilchen das eine Wasserstoffatom durch Chlor ersetzt wird, welcher Vorgang mit Zerreissung eines Chlormoleculs verbunden ist. Im Wasser ist $(HO)=1,0091$, im Chlormolecul ist $(ClCl)=0,9762$, während (ClO) in 13) den Werth 0,9712 hat. Letzterer ist am kleinsten, wenn auch die Differenz gegen $(ClCl)$ sehr klein ist, was eben nicht auf ein festes Zusammenhalten der unterchlorigen Säure schliessen lässt.

Nach den Formeln 14) ist nothwendig, dass an ein Chlorwasserstofftheilchen an der Seite des Chlors unter Abscheiden von Aether und Zerreissung eines Sauerstoffmoleculs sich ein Sauerstoffatom anschliesst. Hierzu ist nothwendig, dass die Entfernung (OCl) in 14) sich als kleiner herausstellt, als (OO) im Sauerstoffmolecul und als (ClA) in 10). Nun ist $(OO)=0,9568$, $(ClA)=0,9903$, und da (OCl) in $14)=0,9825$, so wäre es wohl keine besondere Schwierigkeit, das Aethertheilchen des Chlorwasserstoffs abzutrennen; wohl aber findet sich eine solche bei der Zerreissung des Sauerstoffmoleculs. Gesetzt, die Verbindung sei auf irgend eine Weise zum Vorschein gekommen, so muss stets die Neigung bestehen, dass die Sauerstoffatome zweier benachbarten Molecule der unterchlorigen Säure sich zu (OO) verbinden, so dass also die Säure in Sauerstoff und Chlorwasserstoff zerfallen müsste.

Es muss also die Combination $ClOH$ für die Zusammensetzung der unterchlorigen Säure der Combination $OClH$ vorgezogen werden. Bei ersterer ist auch der Satz von der Einwerthigkeit des Chlors gewahrt.

Chlor und Natrium.

Bei der Verbindung dieser beiden Substanzen können je nach der Zahl der eintretenden Atome und ihrer Reihenfolge verschiedene Fälle eintreten, die ich zuerst vornehmen will, worauf ich einen Rückblick über dieselben folgen lassen werde.

a) Zwei Atome Natrium verbinden sich mit einem Atom Chlor. Die Reihenfolge kann sein: *α*) *NaClNa* oder *β*) *NaNaCl*.

b) Ein Atom Chlor verbindet sich mit einem Atom Natrium und als Drittes im Bunde geht noch ein Aethertheilchen in die Combination ein. Die Reihenfolge kann sein: *α*) *NaClA* und *β*) *ClNaA*.

c) Zwei Atome Chlor stehen in Verbindung mit einem Atom Natrium. Die Reihenfolge ist: *α*) *ClNaCl* oder *β*) *ClClNa*.

aα) Die drei Atome sind so gelagert, dass die Ebenen der Aethertheilchen unter sich parallel sind, dass dagegen von einem Atom zum andern eine Drehung des Aetherdreiecks um 60° stattfindet, so dass also die beiden äusseren Aetherdreiecke gleich gelagert sind. Man bekommt so die Gleichung:

$$15)\quad \begin{gathered} \frac{3((23+35{,}5)a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{12.23aR}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(3-23a)R \\ -\frac{(4.23.35{,}5a^2+23^2a^2+3)}{4R^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{12R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}=0. \end{gathered}$$

Dieser Gleichung entspricht $R(NaCl)=1{,}0510$.

aβ) Hier ist die gegenseitige Stellung der benachbarten Atome dieselbe wie im vorigen Falle, und es muss sein:

$$16)\left\{\begin{gathered} \frac{6(23a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3a(23+35{,}5)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-23a)R-\frac{23^2a^2}{R^2} \\ -\frac{(23.35{,}5a^2+3)}{(R+R_1)^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{6(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0, \\ \text{und} \\ \frac{3((23+35{,}5)a-2)R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R_1-\frac{23.35{,}5a^2}{R_1^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+4r^2)^{3/2}} \\ +\varphi(R+R_1)=0. \end{gathered}\right.$$

Die Gleichungen sind erfüllt, wenn $R(NaNa)=1{,}1637$ und $R_1(NaCl)=1{,}1803$.

bα) Natrium und Chlor haben wieder parallele Aetherdreiecke, die um 60° gegen einander gedreht sind. Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$17)\left\{\begin{gathered} \frac{3(58{,}5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23a}{(R+R_1)^2}+(3-23a)R-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}} \\ -\frac{35{,}5.23a^2}{R^2}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0 \\ \text{und} \\ \frac{35{,}5a}{R_1^2}+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0. \end{gathered}\right.$$

$R(NaCl)=0{,}9749$, $R_1(ClA)=1{,}0880$.

bβ) Die gegenseitige Drehung der Atome ist die bisherige und gegen den vorigen Fall nur die Reihenfolge von *Cl* und *Na* abgeändert. Die Gleichungen heissen:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{3(58,5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35,5a}{(R+R_1)^2}+(3-35,5a)R-\frac{23.35,5a^2}{R^2}\\ &\qquad-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0\\ &\text{und}\\ &\qquad\frac{23a}{R_1^2}+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es folgen daraus: $R(ClNa) = 1,1194$ und $R_1(NaA) = 1,2204$.

Bei $c\alpha$) und $c\beta$) ist gegen $a\alpha$) nur die Reihenfolge, nicht aber die gegenseitige Drehung der Atome geändert.

Für $c\alpha$) hat man:

$$19)\quad \begin{aligned} &\frac{3(58,5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{12.35,5aR}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(3-35,5a)R-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}\\ &\qquad-\frac{12R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{(4.35,5.23a^2+35,5^2a^2+3)}{4R^2}=0.\end{aligned}$$

Der Werth von $R(ClNa)$ ist 1,1350.

Der Fall $c\beta$) giebt:

$$20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{6(35,5a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3.58,5a(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35,5a)R-\frac{35,5^2a^2}{R^2}\\ &-\frac{(35,5.23a^2+3)}{(R+R_1)^2}-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{6(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}=0\\ &\text{und}\\ &\frac{3(58,5a-2)R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(3-23a)R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{23.35,5a^2}{R_1^2}\\ &\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

$R(ClCl) = 1,0479$, $R_1(ClNa) = 0,9892$.

Die Vergleichung der vorstehenden Resultate ergiebt, dass nur die Fälle $b\alpha$) und $c\beta$), also die Verbindungen $NaClA$ und $ClClNa$ in Berücksichtigung zu ziehen seien, während die übrigen Combinationen wegen ihrer grossen Werthe von R und R_1 ausser Acht gelassen werden können.

Was nun diese zwei anbelangt, so zeigt die Verbindung $NaClA$ eine bedeutendere Annäherung von Na und Cl, als die Reihe $ClClNa$, während andererseits in letzterer die Entfernung $(ClCl)$ kleiner ist, als (ClA) in der ersteren. Fragt man sich nun, wie die Verbindung $ClClNa$ am einfachsten zu Stande kommen kann, so gelangt man zu dem Schlusse, dass dieses der Fall ist, wenn sich ein Natriumatom an ein Chlormolecul anhängt. Es ist dieses möglich, wenn $(ClNa)$ in 20) kleiner ist, als (ClA) in 2) und kleiner als $(NaNa)$ in der Verbindung $NaNaNa$. Nun ist $(ClNa) = 0,9892$, $(ClA) = 1,0119$ und $(NaNa)$ (bei Anwendung der neuen Constanten) $= 1,2064$. Die Verbindung ist also möglich. Denkt man sich, dieselbe sei zu Stande gekommen und eine grössere Anzahl von Moleculen derselben sei bei einander, so kann es nicht ausbleiben, dass

die äusseren Chloratome zweier benachbarten Molecule auf einander wirken. In der Verbindung ist $(Cl\,Cl)$ nach 20) $= 1{,}0479$; können sich jedoch zwei Chloratome zu einem Chlormolecul mit einander verbinden, so treten sie sich nach 2) bis auf 0,9762 näher, und es ergiebt sich, dass hier eine Neigung von $Cl\,Cl\,Na$ bestehen muss, dass sich zwei Molecule der Verbindung in zwei Molecule $Na\,Cl$ und ein Molecul $Cl\,Cl$ zerlegen. Die durch Wärme verursachten Schwingungen müssen diese Zerlegung begünstigen und in der That tritt die Verbindung $Na\,Cl$ bei höheren Temperaturen auf, sie entsteht, wenn Natrium in Chlorgas erwärmt wird. Ob die Verbindung auch in Temperaturen, die sich dem absoluten Nullpunkt nähern, gebildet werden könne, darüber besteht keine Erfahrung. Dieses ist jedoch zunächst von untergeordneter Bedeutung.

Die Bildung von $Na\,Cl$ aus $Na\,Cl_2$ kann übrigens noch auf eine zweite Art vor sich gehen, welche derjenigen analog ist, nach welcher aus $K\,O_2$ die nächst niedrige Oxydationsstufe $K\,O$ entsteht und die ich bereits bei dem Kalium erörtert habe. Bei dem Chlormolecul ist $(Cl\,Cl) = 0{,}9762$. Kommt nun als Ersatz des Aethertheilchens ein Atom Natrium dazu, so rücken die beiden Chloratome bis 1,0479 auseinander. Es kann nun auch auf der Seite des zweiten Chloratoms ein Natriumatom sich anhängen, und dieser Vorgang muss nochmals ein Auseinanderrücken der Chloratome nach sich ziehen. Wird dabei die Grenze 1,0880 überschritten, so zerfällt die Verbindung $Na_2\,Cl_2$ und es bilden sich zwei Molecule $Na\,Cl\,A$, indem auf der dem Natrium abgewendeten Seite des Chlors ein Aethertheilchen sich ansiedelt.

Man kommt so jedesmal auf die einzig mögliche Verbindung $Na\,Cl\,A$, das Chlornatrium, welche durch 17) repräsentirt ist und die auch der Forderung der Einwerthigkeit des Chlors entspricht.

Die Durchsichtigkeit der Kochsalzkrystalle weist auf die Anwesenheit freien (nicht mit den Atomen fest verbundenen) Aethers hin. Von den drei Bestandtheilen sind zwei stets Massentheilchen (Cl und Na) und einer ein Aethertheilchen. Wäre nun die Gruppirung der Gesammtheit und die gegenseitige Entfernung die nämliche, wie die der Aethertheilchen im allgemeinen Raume, so würde die Aetherdichtigkeit im Kochsalze ein Drittel derjenigen des allgemeinen Raumes sein und der Lichtbrechungsexponent wäre gleich $\sqrt{3} = 1{,}7322$. Im allgemeinen Raume ist die Gruppirung des Aethers eine derartige, dass die Kraft, welche bei gestörtem Gleichgewicht ein Aethertheilchen in die Ruhelage zurückzuführen sucht, einen kleinsten Werth hat, und da die Anordnung der Aethertheilchen im Kochsalz jedenfalls eine andere ist, als im allgemeinen Raume, so ergiebt sich nothwendig, dass, wenn ein Aethertheilchen aus seiner Gleichgewichtslage kommt, die es in letztere zurückführende Kraft grösser sein muss, als sie bei gleicher Dichtigkeit im allgemeinen Raume wäre; es muss also der Brechungsexponent des Stein-

salzes kleiner sein als 1,7322, und er hat in der That den Werth 1,4985. Mehr hierüber zu sagen ist zur Zeit nicht möglich.

Chlor, Natrium und Sauerstoff.

Die Combinationen dieser drei Stoffe können sich von einander durch die Reihenfolge unterscheiden, je nachdem man *a)* $Cl\,Na\,O$, *b)* $Na\,Cl\,O$ oder *c)* $Na\,O\,Cl$ nimmt.

a) Ist die Reihenfolge $Cl\,Na\,O$, so sind die Ebenen von Chlor und Natrium einander wieder parallel, die Dreiecke um 60^0 gegen einander gedreht. Die Verbindungslinie der Sauerstoffäthertheilchen (Sauerstoffaxe) ist den Ebenen von Chlor und Natrium parallel und gleichzeitig normal auf der Richtung der Geraden, welche das Massentheilchen des Natriums (oder des Chlors) mit einem seiner Aethertheilchen verbindet.

Man erhält die Gleichungen:

$$21)\left\{\begin{aligned}&\frac{3(58{,}5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(2.35{,}5+3.16)a(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R\\&\quad-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-f(R+R_1)-\frac{35{,}5.16a^2}{(R+R_1)^2}-\frac{35{,}5.23a^2}{R^2}=0\\&\text{und}\\&\frac{(2.23+3.16)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R_1-\frac{16.23a^2}{R_1^2}-f(R_1)-\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ist $R(Cl\,Na)=1{,}1337$ und $R_1(Na\,O)=1{,}1672$.

b) Bei der Combination $Na\,Cl\,O$ ist gegen *a)* wohl die Reihenfolge, nicht aber die gegenseitige Stellung der Theilchen geändert. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$22)\left\{\begin{aligned}&\frac{3(58{,}5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(2.23+3.16)a(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-23a)R\\&\quad-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-f(R+R_1)-\frac{35{,}5.16a^2}{(R+R_1)^2}-\frac{35{,}5.23a^2}{R^2}=0\\&\text{und}\\&\frac{(2.35{,}5+3.16)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R_1-\frac{16.35{,}5a^2}{R_1^2}-f(R_1)\\&\qquad-\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Hier hat man $R(Na\,Cl)=0{,}9896$ und $R_1(Cl\,O)=1{,}0638$.

c) Bei der Zusammenstellung $Na\,O\,Cl$ bleibt die gegenseitige Drehung der Theilchen unverändert. Die Gleichungen heissen:

$$23)\left\{\begin{aligned}&\frac{(2.23+3.16)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3((35{,}5+23)a-2)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-23a)R\\&\quad-\frac{16.23a^2}{R^2}-\frac{23.35{,}5a^2}{(R+R_1)^2}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}-f(R)=0\\&\text{und}\\&\frac{(2.35{,}5+3.16)aR}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R_1-\frac{16.35.5a^2}{R_1^2}-f(R_1)\\&\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ist $R(Na\,O)=1{,}0136$ und $R_1(O\,Cl)=1{,}0497$.

Ueberblicken wir die vorstehenden Ergebnisse, so zeigt sich, dass von der durch 21) dargestellten Combination $ClNaO$ wegen der grossen Werthe von R und R_1 ganz abgesehen werden muss. Bei der Reihenfolge $NaClO$ ist zwar die Entfernung $(NaCl)$ keine grosse, und hier besteht also kein Hinderniss für das Zustandekommen der Verbindung; wohl aber ist dieses bei der Grösse von (ClO) der Fall, weil hier eine bereits wiederholt besprochene Erscheinung auftritt. Es ist nämlich $(ClO) = 1{,}0638$, während andererseits (OO) im Sauerstoffmolecul den Werth 0,9568 besitzt. Es muss hier für das am Rande befindliche Sauerstoffatom die Versuchung nahe liegen, sich mit dem in der nämlichen Lage befindlichen Sauerstoffatom eines naheliegenden Moleculs $NaClO$ zu OO zu verbinden.

Was bei 22) bezüglich des Sauerstoffes gilt, das ist bei 23) für das Chloratom zu erwähnen; dabei ist jedoch zu bemerken, dass, da die Distanz $(ClCl)$ im Chlormolecul nach 2) 0,9762 ist, die Distanz (OCl) in 23) dagegen 1,0497, von 0,9762 bis 1,0497 keine so grosse Differenz ist, als von 0,9568 bis 1,0638 in 22) bei der Combination $NaClO$. Es muss also für den Sauerstoff eine grössere Neigung, wegzugehen, bestehen, als für das Chlor, oder mit anderen Worten, die Verbindung $NaOCl$ muss sich leichter bilden und, wenn gebildet, constanter sein als $NaClO$. Es muss übrigens bemerkt werden, dass auch die Verbindung $NaOCl$, das unterchlorigsaure Natron, Eau de Labarraque, zur Zeit wenigstens meines Wissens im trockenen Zustande nicht hergestellt ist, und es scheint also die Anwesenheit von Wasser (vielleicht auch $NaCl$) nöthig zu sein, um das Bestehen der Verbindung zu ermöglichen. Temperaturerhöhung bringt die Verbindung zum Zersetzen, es entwickelt sich Chlor. Mithin tritt der durch 23) angezeigte Fall ein. Die Zusammenstellung $NaOCl$, welche nach Obigem die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, entspricht dem Satze von der Einwerthigkeit des Chlors.

Chlor, Natrium und Wasserstoff.

Die Zahl der möglichen Combinationen beschränkt sich, weil der Wasserstoff stets nur als äusseres Glied zu verwenden ist, auf zwei: $ClNaH$ und $NaClH$.

Die Combination $ClNaH$ beruht auf der Erfüllung nachstehender Gleichungen:

$$24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{3(58{,}5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R+\frac{35{,}5a}{(R+R_1)^2}\\ &-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{35{,}5.23a^2}{R^2}-\frac{35{,}5a^2}{(R+R_1-r)^2}=0\\ &\text{und}\\ &\frac{3a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23a}{R_1^2}+18{,}803aR+ar-\frac{23a^2}{(R_1-r)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}\\ &\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ist $R(ClNa) = 1{,}1155$ und $R_1 = 1{,}1979$. Zieht man von letzterem Werthe 0,0165 ab, so ergiebt sich $(NaH) = 1{,}1814$.

Bei der Zusammenstellung $NaClH$ muss sein:

$$25)\left\{\begin{aligned}&\frac{3(58{,}5a-2)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{23a}{(R+R_1)^2}+(3-23a)R\\&-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{35{,}5.23a^2}{R^2}-\frac{23a^2}{(R+R_1-r)^2}=0\\&\text{und}\\&\frac{3a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35{,}5a}{R_1^2}+18{,}803aR_1+ar-\frac{35{,}5a^2}{(R_1-r)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}\\&\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

$R(NaCl) = 0{,}9696$ und $R_1 = 1{,}0737$ oder nach Abzug von 0,0165 $(ClH) = 1{,}0572$.

Bezüglich der Möglichkeit der Verbindung kann nur von der Combination $NaClH$ die Rede sein, und auch bei dieser tritt wieder der Fall ein, dass der am Rande stehende Wasserstoff sich leichter mit dem in gleicher Lage befindlichen Wasserstoffatom eines andern Moleculs $NaClH$ zu einem Molecul HH verbindet, als dass er bleibt, denn zwei Wasserstoffatome können sich bis auf 1,0375 nähern, während nach 25) der Werth $(ClH) = 1{,}0572$ ist. Die Möglichkeit der Verbindung hat daher wenig Wahrscheinlichkeit für sich und letztere ist auch noch nicht hergestellt worden. Wäre sie möglich, so müsste jedenfalls ein Conflict mit dem Satze von der Einwerthigkeit eines jeden der drei Bestandtheile zum Vorschein kommen.

Chlor und Lithium.

Wie bei dem Natrium, will ich auch bei dem Lithium die Gleichungen der einzelnen Combinationen aufeinander folgen lassen und dann in einem Rückblicke die betreffenden Schlüsse daraus ableiten.

Bei der Verbindung von zwei Atomen Lithium und einem Atom Chlor giebt es die zwei Varianten $LiClLi$ und $LiLiCl$. Die Verbindungslinien von Aether- und Massentheilchen eines Atoms stehen stets normal auf der Verbindungslinie der drei Massentheilchen und ausserdem ist im ersten Falle die Lithiumaxe normal auf der Richtung einer Geraden, welche das Chlormassentheilchen mit einem seiner Aethertheilchen verbindet. Die Axen der Lithiumatome sind ausserdem um 60° gegen einander gedreht.

Es entsteht die Gleichung:

$$26)\quad \frac{(3.7+2.35{,}5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R-f(R)-\frac{2(2-28a)R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4R}{(4R^2+3r^2)^{3/2}}$$
$$-7(35{,}5+\tfrac{1}{4})\frac{a^2}{R^2}=0.$$

$R(LiCl) = 1{,}0453$.

Nimmt man die Zusammenstellung *LiLiCl* an, so ist die Drehung des in der Mitte befindlichen Lithiums die nämliche wie im vorigen Falle, die Axen der beiden Lithiumatome sind gekreuzt. Die Gleichungen heissen:

$$27)\left\{\begin{array}{l}\frac{28aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{((3.7+2.35,5)a-2)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R\\ -\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{R+R_1}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{49a^2}{R^2}\\ \qquad -\frac{(7.35,5a^2+1)}{(R+R_1)^2}=0\\ \text{und}\\ \frac{(3.7+2.35,5)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(3-35,5a)R_1-f(R_1)-\frac{7.35,5a^2}{R_1^2}\\ \qquad +\varphi(R+R_1)=0.\end{array}\right.$$

Es berechnet sich: $R(LiLi)=1,1409$ und $R_1(LiCl)=1,1366$.

Verbindet sich nur ein Atom Lithium mit einem Atom Chlor, worauf noch ein Aethertheilchen beitritt, so giebt es die zwei Varianten *ClLiA* und *LiClA*. Die gegenseitige Drehung von Lithium und Chlor ist die nämliche wie in den früheren Fällen.

Die Reihenfolge *ClLiA* ergiebt:

$$28)\left\{\begin{array}{l}\frac{(4.7+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{35,5a}{(R+R_1)^2}+(3-35,5a)R-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\\ \qquad -\frac{7.35,5a^2}{R^2}-f(R)=0\\ \text{und}\\ \frac{7a}{R_1^2}+R_1-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0.\end{array}\right.$$

Es ist $R(ClLi)=1,0857$ und $R_1(LiA)=1,2006$.

Bei der Variante *LiClA* ist:

$$29)\left\{\begin{array}{l}\frac{(4.7+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{7a}{(R+R_1)^2}+(2-7a)R-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}\\ \qquad -\frac{7.35,5a^2}{R^2}-f(R)=0\\ \text{und}\\ \frac{35,5a}{R_1^2}+R_1-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+\varphi(R+R_1)=0.\end{array}\right.$$

Es ist $R(LiCl)=0,9852$ und $R_1(ClA)=1,0692$.

Verbinden sich zwei Atome Chlor mit einem Atom Lithium, so hat man wieder zwei verschiedene Reihenfolgen, nämlich *ClClLi* und *ClLiCl*. In beiden Fällen sind die Chloratome gegen einander um 60° gedreht, die Axe des Lithiums steht normal auf der Verbindungslinie jedes der beiden Chlormassentheilchen und eines der Aethertheilchen.

Bei *Cl Cl Li* ist:

$$30)\left\{\begin{aligned}&\frac{6(35{,}5a-1)R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{(3.7+2.35{,}5)a(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R\\&-\frac{3R}{(R^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{35{,}5^2a^2}{R^2}-\frac{7.35{,}5a^2}{(R+R_1)^2}-f(R+R_1)=0\\&\text{und}\\&\frac{(3.7+2.35{,}5)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R_1-\frac{7.35{,}5a^2}{R_1^2}-f(R_1)\\&\qquad\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ist $R(Cl\,Cl)=1{,}0316$ und $R_1(Cl\,Li)=0{,}9990$.

Bei der Combination *Cl Li Cl* hat man:

$$31)\quad\begin{aligned}&\frac{((3.7+2.35{,}5)a-\frac{3}{4})R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{12(35{,}5a-1)R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R-f(R)\\&\qquad-35{,}5\left(7+\frac{35{,}5}{4}\right)\frac{a}{R^2}=0.\end{aligned}$$

$R(Cl\,Li)=1{,}1022$.

Die Vergleichung der vorstehend abgeleiteten Resultate mit den entsprechenden des Natriums zeigt ein ganz analoges Verhalten der beiden Alkalimetalle gegen Chlor, und aus den nämlichen Gründen wie bei dem Natrium ist auch bei dem Lithium der Schluss zu ziehen, dass die Verbindung *Li Cl A*, das Lithiumchlorid, unter allen die wahrscheinlichste sei. Insoweit sich jetzt schon derartige Bestimmungen machen lassen, so ist es die, dass das Natriumchlorid eine festere Verbindung sei, als das Lithiumchlorid, weil der betreffende Werth von R bei ersterem kleiner ist, als bei letzterem. Es würde daraus eine leichtere Zersetzbarkeit des Lithiumchlorids folgen.

Chlor, Lithium und Sauerstoff.

Diese drei Elemente können, wenn je ein Atom in die Verbindung eintritt, drei verschiedene Reihenfolgen geben. Diese sind: *Cl Li O*, *Li Cl O* und *Li O Cl*.

Im ersten Falle ist die Stellung der Lithiumaxe die nämliche wie bisher, während die Sauerstoffaxe gegen die des Lithiums gekreuzt ist. Im zweiten Falle sind Lithium und Sauerstoff neben der gewöhnlichen Stellung gegen Chlor gegen einander um 60° gedreht. Im dritten Falle haben Lithium und Sauerstoff neben ihrer Stellung in der Reihenfolge auch ihre Drehung gegen 1 ausgetauscht.

Bei *Cl Li O* ergeben sich die Gleichungen:

$$32)\quad\begin{aligned}&\frac{(3.7+2.35{,}5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{((3.16+2.35{,}5)a-2)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R\\&-f(R)-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}-\frac{7.35{,}5a^2}{R^2}\\&\qquad-\frac{(16.35{,}5a^2+1)}{(R+R_1)^2}=0\end{aligned}$$

und

$$\frac{2(7+16)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R_1-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{7.16a^2}{R_1^2}+\varphi(R+R_1)=0.$$

Der Werth von $R(ClLi)$ ist 1,1022, derjenige von $R_1(LiO)$ ist 1,1172.

Bei $LiClO$ ist:

$$33)\left\{\begin{array}{l}\frac{(3.7+2.35{,}5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2(23a-1)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R-f(R)\\ \qquad -\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{7.35{,}5a^2}{R^2}-\frac{7.16a^2}{(R+R_1)^2}=0\\ \text{und}\\ \frac{(3.16+2.35{,}5)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(2-16a)R_1-f(R_1)-\frac{16.35{,}5a^2}{R_1^2}\\ \qquad\qquad +\varphi(R+R_1)=0.\end{array}\right.$$

Es ist $R(LiCl)=0{,}9994$ und $R_1(ClO)=1{,}0466$.

Nimmt man die Reihenfolge $LiOCl$, so werden die Gleichungen:

$$34)\left\{\begin{array}{l}\frac{2(16+7)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{((3.7+2.35{,}5)a-2)(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R\\ -\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+3r^2)^{3/2}}-\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+4r^2)^{3/2}}\\ \qquad -\frac{7.16a^2}{R^2}-\frac{(7.35{,}5a^2+1)}{(R+R_1)^2}=0\\ \text{und}\\ \frac{(3.16+2.35{,}5)aR_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+(3-35{,}5a)R_1-f(R_1)-\frac{16.35{,}5a^2}{R_1^2}\\ \qquad\qquad +\varphi(R+R_1)=0.\end{array}\right.$$

Es ist $R(LiO)=1{,}0011$ und $R_1(OCl)=1{,}0380$.

Auch hier tritt die Analogie zwischen Lithium und Natrium ganz unverkennbar hervor. Alle Schlüsse, die oben für das Natrium gezogen wurden, gelten auch für das Lithium. Der Umstand, dass zwischen Natrium und Chlor eine grössere Annäherung stattfindet, als zwischen Lithium und Chlor, auf den ich schon oben aufmerksam gemacht habe, zeigt sich auch hier; dagegen findet sich auch wieder die grössere Annäherung von Lithium und Sauerstoff, die, wie auch schon früher (Lithium) gezeigt, dann stattfindet, wenn Chlor nicht in die Verbindung eintritt. Ueber ein unterchlorigsaures Lithion, ob ein solches dargestellt wurde oder nicht, ist mir nichts bekannt. Wahrscheinlich ist noch gar kein Versuch hierzu gemacht worden.

Chlor, Lithium und Wasserstoff.

Wie bei dem Natrium, giebt es auch hier zwei verschiedene Zusammenstellungen: $LiClH$ und $ClLiH$. Im ersten dieser Fälle muss sein:

$$35)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{(3.7+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+(2-7a)R+\frac{7a}{(R+R_1)^2}+\frac{2a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r^2)+r^2)^{3/2}}\\&\quad-f(R)-\frac{7.35,5a^2}{R^2}-\frac{7a^2}{(R+R_1-r)^2}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0\\&\text{und}\\&\frac{35,5a}{R_1^2}+\frac{3a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{35,5a}{(R_1-r)^2}-\frac{3R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}+18,803aR_1\\&\qquad+ar+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ist $R(LiCl)=0,9780$ und $R_1=1,0523$, also $(ClH)=1,0358$.

Im zweiten Falle ist:

$$36)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{(3.7+2.35,5)aR}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3a(R+R_1-r)}{((R+R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+(3-35,5a)R\\&\quad+\frac{35,5a}{(R+R_1)^2}-f(R)-\frac{7.35,5a^2}{R^2}-\frac{35,5a^2}{(R+R_1-r)^2}\\&\qquad-\frac{3(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}=0\\&\text{und}\\&\frac{7a}{R_1^2}+\frac{2a(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}}+18,803aR_1+ar-\frac{7a^2}{(R_1-r)^2}-\frac{2R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}\\&\qquad+\varphi(R+R_1)=0.\end{aligned}\right.$$

Es ergiebt sich: $R(ClLi)=1,0817$ und $R_1=1,1774$, also $(LiH)=1,1609$.

Auch hier lässt sich die Analogie des Verhaltens des Lithiums mit dem des Natriums nicht verkennen, es sind nur die Werthe von R und R_1 etwas kleiner als bei letzterem. Bei der Combination $LiClH$ ist sogar (ClH) etwas kleiner als (HH) im Wasserstoffmolecul (1,0376); allein die Differenz ist so unbedeutend, dass sich wegen der Unsicherheit der beiden letzten Decimalen in den Werthen von R und R_1 durchaus nicht auf die Möglichkeit der Verbindung $LiClH$ selbst für die absolute Nulltemperatur schliessen lässt.

Bereits in meiner dritten Abhandlung über mathematische Chemie habe ich gezeigt, dass das Lithium bezüglich seines Verhaltens gegen Sauerstoff und Wasserstoff, sowie gegen beide zusammen ein vollständiges Analogon zu dem Natrium bildet. Im Vorstehenden glaube ich nachgewiesen zu haben, dass dieses auch für seine Beziehungen zum Chlor, sowie die Combinationen desselben mit Sauerstoff und Wasserstoff gilt. In allen Zusammenstellungen, mögen sie nun möglich sein oder nicht, lässt sich diese Analogie nachweisen. Es giebt nun noch ein drittes Element, das Kalium, von dem ich ebenfalls schon früher gezeigt habe, dass sein chemisches Verhalten gegen Sauerstoff und Wasserstoff vollständig dem von Natrium und Lithium entspricht, und es wäre nun hier der Platz, diesen Nachweis auch für Chlor zu liefern. Ich thue dieses in Rücksicht auf die riesigen Formeln und auf die infolge der verschie-

denen Drehungen des Kaliums weit grössere Mannichfaltigkeit von Combinationen nicht, da bei dem vorläufig doch nur provisorischen Charakter der ganzen Rechnung kein Ergebniss zu erwarten ist, welches dem Aufwand von Raum und Mühe nur annähernd entspricht, und es möge daher entschuldigt werden, wenn ich die Behandlung des Kaliums auf so lange aufschiebe, bis die zu erwartende Vereinfachung der Rechnung eher zu einem Ziele führt, oder bis die nähere Bestimmung der Constanten ein anderes als ein blos provisorisches Resultat erwarten lässt.

Betrachtet man nun das Resultat, zu welchem die Rechnung bei dem Chlor führt, näher, so lässt sich dasselbe in Nachstehendes zusammenfassen.

Das Chlor ist ein Gas, das zum Sauerstoff nur eine untergeordnete, zu Wasserstoff, Natrium und Lithium, so lange dieselben allein sind, eine bedeutende Verwandtschaft besitzt, welche letztere sich jedoch sofort vermindert, sobald sich das Chlor mit zwei verschiedenen Elementen verbinden soll.

Was die Einwerthigkeit des Chlors anbelangt, so ist sie gewahrt, wenn letzteres sich mit Sauerstoff, Natrium und Lithium verbindet. Bei dem Wasserstoff ist das Ergebniss insofern zweifelhaft, als dasselbe innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Rechnungsergebnisse liegt. In allen Verbindungen mit den erstgenannten drei Elementen ist diejenige Combination die wahrscheinlichste oder constanteste, bei welcher das Chloratom nur mit einem einzigen andern Atom verbunden ist. Diese Einwerthigkeit des Chlors gilt jedoch nur so lange, als man, wie es die heutigen Chemiker thun, den Aether einfach ignorirt. Thut man dieses nicht, betrachtet man den Aether auch als ein chemisches Element, so ist Chlor, wenn es mit Wasserstoff, Natrium oder Lithium in Concurrenz tritt, zweiwerthig, wie letztere beide es bezüglich des Wasserstoffs sind. Es ist also, um mich so auszudrücken, der Wasserstoff einwerthiger als Natrium und Lithium, denn er lässt sich überhaupt nur als Randglied einer Combination verwenden, und letztere sind es wieder mehr als das Chlor. Ich muss übrigens hier daran erinnern, dass, wie oben erwähnt, das Chlor auch bei den Chemikern nicht als durchaus einwerthiges Element gilt, sondern unter Umständen sogar eine hohe Werthigkeit zeigen kann.

Zum Schlusse möge es mir gestattet sein, der Uebersichtlichkeit halber die im Obigen abgeleiteten Resultate zusammenzustellen. Die zwischen den einzelnen Elementen stehenden Ziffern bedeuten die Distanzen. Bei denjenigen Verbindungen, welche hergestellt wurden, sind die Zahlen mit grösserer Schrift gedruckt. Als herstellbar betrachte ich auch die Verbindung Cl_3, weil das Chlor condensirbar ist.

A *Cl* *A*
0,9987 0,9987

Cl *Cl* *O*
0,9889 1,0011

Cl *O* *Cl*
0,9933 0,9933

H *Cl* *A*
0,9733 0,9903

Cl *O* *H*
0,9717 1,0301

Na *Cl* *Na*
1,0510 1,0510

Li *Cl* *Li*
1,0453 1,0453

Na *Na* *Cl*
1,1637 1,1803

Li *Li* *Cl*
1,1409 1,1366

Cl *Na* *O*
1,1337 1,1672

Cl *Li* *O*
1,1022 1,1172

Cl *Na* *H*
1,1155 1,1979

Cl *Li* *H*
1,0817 1,1609

Cl *Cl* *A*
0,9762 1,0019

Cl *O* *O*
0,9965 0,9765

O *Cl* *O*
1,0013 1,0013

Cl *Cl* *H*
0,9706 0,9852

O *Cl* *H*
0,9825 0,9869

Na *Cl* *A*
0,9749 1,0880

Li *Cl* *A*
0,9852 1,0692

Cl *Na* *A*
1,1194 1,2204

Cl *Li* *A*
1,0857 1,2006

Na *Cl* *O*
0,9896 1,0638

Li *Cl* *O*
0,9994 1,0466

Na *Cl* *H*
0,9696 1,0572

Li *Cl* *H*
0,9780 1,0358

Cl *Cl* *Cl*
0,9884 0,9884

Cl *O* *A*
0,9765 1,0668

O *Cl* *A*
0,9883 1,0138

H *Cl* *H*
0,9655 0,9655

Cl *Na* *Cl*
1,1350 1,1350

Cl *Li* *Cl*
1,1022 1,1022

Cl *Cl* *Na*
1,0479 0,9892

Cl *Cl* *Li*
1,0316 0,9990

Na *O* *Cl*
1,0136 1,0497

Li *O* *Cl*
1,0011 1,0380

Kleinere Mittheilungen.

XXXI. Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung.

Bereits vor mehr als sechs Jahren habe ich mich zur Beschäftigung mit Permutationen der im Titel erwähnten Art hingeleitet gesehen und die nachstehende Note abgefasst. Da ich in der letzten Zeit bemerkte, dass diese Permutationen auch für eine gewisse Auffassung des Configurationsproblems actuelle Bedeutung haben, so unternehme ich es, die Note zu veröffentlichen. Zwar fand ich inzwischen, dass denselben Gegenstand in einer andern Einkleidung (Determinantenform) auch Herr Weyrauch (Cr.-Borch. Journ., 74. Bd. S. 273) behandelt; indessen ist die Art der Ableitung eine ganz andere als bei mir.*

1.

Es ist die Anzahl jener Permutationen von n Elementen anzugeben, in denen kein einziges Element an seiner früheren Stelle steht.

Die gesuchte Zahl wird lediglich von n abhängen und heisse $f(n)$. Die Elemente seien durch die ihre ursprüngliche Aufeinanderfolge bezeichnenden Indices $1, 2, 3, \ldots n-1, n$ vertreten. Werden sämmtliche Permutationen ohne einschränkende Bedingung nach der gewöhnlichen Ordnung entwickelt, so ergeben sich n Gruppen mit je $(n-1)!$ Complexionen, durch das Element charakterisirt, mit dem ihre erste Stelle besetzt ist. Hiervon muss sofort die Gruppe 1 ausgeschaltet werden und von den übrigen $n-1$ wählen wir die Gruppe m zur Betrachtung aus.

In derselben ist die erste Stelle mit m besetzt, das Element 1 daher auf die $n-1$ weiteren Plätze angewiesen, aber jeden von diesen einzunehmen berechtigt, ohne dass hierdurch unserer Bedingung widersprochen würde. Es würde daher die Zusammensetzung der nach Weglassung des m restirenden $n-1$-stelligen Complexion aus den Elementen

$$1, 2, 3, \ldots m-1, m+1, \ldots n-1, n$$

nicht mehr nach dem Gesetze f erfolgen.

Wir sondern deshalb die Gruppe m in zwei Classen. Die erste erhält das Element 1 an die Stelle m, die $n-2$ übrigen Stellen sind

* Die Aufgabe ist auch schon angeregt von Herrn M. Cantor, diese Zeitschrift II. Bd. S. 410. Sylvester bezeichnet die betreffenden Determinanten als wirbellose.

nach der obigen Bedingung zu besetzen. Die Anzahl in dieser Classe ist $f(n-2)$.

In der zweiten Classe darf nun 1 auch nicht mehr an der m^{ten} Stelle stehen, daher alle $n-1$ Elemente nach dem Gesetze f zu verschieben sind. Die Anzahl in dieser Classe ist $f(n-1)$. In der Gruppe m sind also $f(n-1)+f(n-2)$, und, da dieselbe beliebig war, im Ganzen

$$1)\qquad f(n)=(n-1)\,[f(n-1)+f(n-2)]$$

unsere Aufgabe lösende Complexionen vorhanden.

1) ist eine Recursionsformel für die verlangte Anzahl. Hiernach ergiebt sich unter Voraussetzung von $f(1)=0$, $f(2)=1$:

$$\begin{array}{lll} f(3)=2, & f(6)=265, & f(9)=133496, \\ f(4)=9, & f(7)=1854, & f(10)=1334961, \\ f(5)=44, & f(8)=14833, & f(11)=13684570. \end{array}$$

Aus 1) liesse sich direct eine independente Formel für $f(n)$ herleiten. Dies geschieht jedoch einfacher durch die Lösung einer zweiten Aufgabe.

2.

Es ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen zu bestimmen, in denen m bestimmte Elemente nicht an ihrer Stelle stehen sollen.

Diese Aufgabe ist durch Decomposition auf die frühere zurückzuführen.

Die verlangten Complexionen zerfallen nämlich in solche, in denen kein einziges Element seine frühere Stelle einnimmt, $f(n)$; ferner in solche, worin ein bestimmtes der $n-m$ freizügigen Elemente seinen Platz behält und deren Anzahl ist $f(n-1)$; da es aber $(n-m)$ solcher Elemente giebt, sind in dieser Kategorie $\binom{n-m}{1}f(n-1)$ der Aufgabe genügende Complexionen enthalten. Ebenso, wenn von den $n-m$ zwei fest bleiben sollen: $\binom{n-m}{1}f(n-2)$ u. s. w. bis zu der Anzahl jener Complexionen, wo alle $n-m$ fest bleiben, $\binom{n-m}{n-m}f(m)$. Die verlangte Anzahl ist daher dargestellt durch folgende Summe von $n-m+1$ Gliedern:

$$\binom{n-m}{0}f(n)+\binom{n-m}{1}f(n-1)+\dots+\binom{n-m}{s}f(n-s)+\dots$$
$$\dots+\binom{n-m}{n-m}f(m)=\sum_{s=0}^{s=n-m}\binom{n-m}{s}f(n-s).$$

3.

Ueberträgt man diese Formel auf den Fall, wo $m=0$ ist, also das Permutiren ohne jede Beschränkung erfolgt und die Anzahl $n!$ ist, so ergiebt sich:

$$2)\quad \binom{n}{0}f(n)+\binom{n}{1}f(n-1)+\binom{n}{2}f(n-2)+\binom{n}{3}f(n-3)+\dots$$
$$\dots+\binom{n}{n-1}f(1)+\binom{n}{n}f(0)=n!$$

woraus für $n=1$ folgt, dass $f(0)=1$ gesetzt werden muss.

Setzt man in 2) für n die Werthe $0, 1, 2, 3, \dots s, \dots n-1, n$, so entstehen folgende Gleichungen:

$$0!=\binom{0}{0}f(0),$$
$$1!=\binom{1}{1}f(0)+\binom{1}{0}f(1),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$s!=\binom{s}{s}f(0)+\binom{s}{s-1}f(1)+\dots+\binom{s}{0}f(s),$$
$$(s+1)!=\binom{s+1}{s+1}f(0)+\binom{s+1}{s}f(1)+\dots+\binom{s+1}{1}f(s)+\binom{s+1}{0}f(s+1),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r!=\binom{r}{r}f(0)+\binom{r}{r-1}f(1)+\dots+\binom{r}{r-s}f(s)$$
$$+\binom{r}{r-s-1}f(s+1)+\dots+\binom{r}{0}f(r),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(n-1)!=\binom{n-1}{n-1}f(0)+\binom{n-1}{n-2}f(1)+\dots+\binom{n-1}{n-1-s}f(s)$$
$$+\binom{n-1}{n-2-s}f(s+1)+\dots+\binom{n-1}{n-r-s}f(r)+\dots$$
$$\dots+\binom{n-1}{0}f(n-1),$$
$$n!=\binom{n}{n}f(0)+\binom{n}{n-1}f(1)+\dots+\binom{n}{n-s}f(s)$$
$$+\binom{n}{n-1-s}f(s+1)+\dots+\binom{n}{n-r}f(r)+\dots$$
$$\dots+\binom{n}{1}f(n-1)+\binom{n}{0}f(n).$$

Wir multipliciren nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$(-1)^n\binom{n}{n},\quad (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1},\quad \dots,\quad \binom{n}{1},\quad \binom{n}{0},$$

also allgemein die Gleichung $r!$ mit $(-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}$, und addiren sie sodann.

In der Summe liefert $f(s)$ das Glied:

$$f(s)\left\{\binom{n}{0}\binom{n}{n-s}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-s-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{n-s-2}-+\dots\right.$$
$$\dots+(-1)^{n-s}\binom{n}{n-r}\binom{r}{r-s}+\dots$$
$$\left.\dots+(-1)^{n-s-1}\binom{n}{n-s-1}\binom{s+1}{1}+(-1)^{n-s}\binom{n}{n-s}\binom{s}{0}\right\}.$$

Die in der Klammer stehende Reihe kann auf folgende Art summirt werden. Sie ist auch zu schreiben:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{s}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{s}+\ldots+(-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{s}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-s}\binom{n}{n-s}\binom{s}{s}.$$

Nun ist

$$\binom{n}{s}\binom{s-1}{r-1}-\binom{n}{r}\binom{n-r}{s-r}$$
$$=\binom{n}{s}\binom{s-1}{r-1}-\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(s-1)s}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots(s-r)}$$
$$=\binom{n}{s}\binom{s-1}{r-1}-\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}\cdot\frac{(s-r+1)\ldots(s-1)s}{1.2.3\ldots(s-1)s}$$
$$=\binom{n}{s}\binom{s-1}{r-1}-\binom{n}{s}\binom{s}{r}=\binom{n}{s}\left[\binom{s-1}{r-1}-\binom{s}{r}\right]=-\binom{n}{s}\binom{s-1}{r}.$$

Somit ist auch

$$3)\qquad \binom{n}{s}\binom{n-s-1}{s-1}-\binom{n}{r}\binom{n-r}{n-s-r}=-\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{r}\ldots$$

Setzen wir nun in 3) $r=1, 2, 3, \ldots (n-s-1), (n-s)$ und nehmen gleichzeitig die dadurch entstehenden Gleichungen mit alternirenden Vorzeichen, so erhalten wir

$$\binom{n}{s}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{s}=-\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{r}$$
$$-\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{r}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{s}=+\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^{n-r-1}\binom{n}{s}\binom{n+s+1}{n-r+1}+(-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{s}=(-1)^{n-r}\binom{n}{s}\binom{s-1}{n-r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^{s-2}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{s-2}+(-1)^{s-1}\binom{n}{s-1}\binom{s+1}{s}=(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{n-s-1}$$
$$(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{s-1}+(-1)^{s}\binom{n}{s}\binom{s}{s}=(-1)^{s}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{n-s}$$
$$=0.$$

Bei der Addition dieser sämmtlichen Gleichungen verschwinden alle Glieder ausser der zweiten Colonne und $\binom{n}{s}$, daher ist

$$4)\qquad \binom{n}{0}\binom{n}{s}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{s}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{s}-+\ldots(-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{n}{s}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{s}\binom{n}{n-s}\binom{s}{s}=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Factor von $f(s)$, welches Glied also in der Summe verschwindet. Da nun aber s in 4) alle Werthe von $1, 2, 3, \ldots n-1, n$ annehmen darf, so erhalten wir durch die Addition folgende Gleichung:

$$f(n) = n! - (n-1)!\binom{n}{1} + (n-2)!\binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^r (n-r)!\binom{n}{r} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n 0!\binom{n}{n},$$

worin $0! = 1$, oder

$$f(n) = n!\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{1.2\ldots r} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^n \frac{1}{1.2\ldots n}\right].$$

Die independente Lösung von 2) hat nun die Form

$$\sum_{s=0}^{s=n-m} \binom{n-m}{s} \sum_{r=0}^{r=n-s} \frac{(-1)^r}{r!} = \sum_{s=0}^{s=n-m} \frac{n!\,(n-s)!}{s!\,(n-m)!} \sum_{r=0}^{r=n-s} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Zwischen diesen letzteren Ausdrücken bei einem und demselben n findet sich noch folgende Beziehung:

Bildet man alle Complexionen von n Elementen, in denen m bestimmte Elemente verschoben sind, und diejenigen, wo dies mit den $n-m$ übrigen der Fall ist, so giebt es keine von den $n!$ überhaupt möglichen, die nicht in eine von diesen beiden Classen gehören würde, dagegen nur $f(n)$, die in beide gehören. Somit ist

$$f_n^m + f_n^{n-m} = n! + f_n^n = n! + f(n).$$

Prag. S. Kantor.

XXXII. Ueber Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

In seiner „Geometrie der Lage" (2. Aufl., Thl. I S. 74) erwähnt Herr Prof. Th. Reye die Aufgabe: zu bestimmen, ob ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welcher durch zwei projectivische Punktreihen gegeben ist, eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel umhüllt; jedoch giebt der Verfasser des genannten Werkes keine Lösung dieses Problems. Die folgende Untersuchung dürfte daher zur Ausfüllung der gebliebenen Lücke dienen.

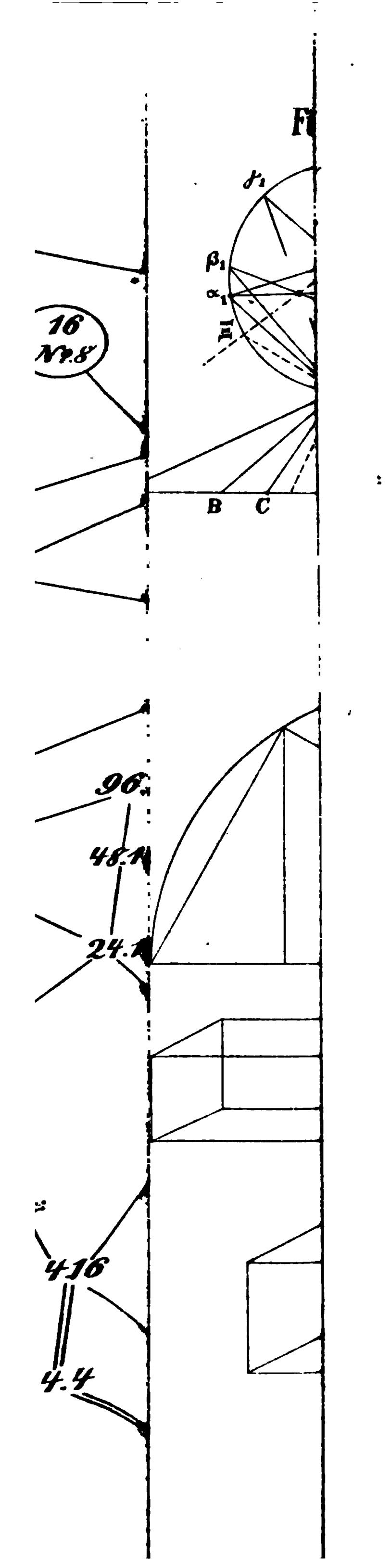
Ich gehe von dem Satze aus, dass eine Curve (c) zweiter Ordnung immer in einem der zwei vollständigen Winkel liegt, die von zweien ihrer Tangenten gebildet werden. Daraus folgt, dass durch zwei parallele Tangenten entweder alle Punkte oder kein Punkt der Curve von allen Punkten ausser einem der unendlich fernen Geraden (o) der Ebene getrennt sind; namentlich tritt der erste Fall ein, wenn die Curve eine Ellipse, der letzte, wenn sie eine Hyperbel ist. Eine Parabel wird von der unendlich fernen Geraden berührt.

Wenn also zwei Punktreihen u und u_1 projectivisch auf einander bezogen sind, so braucht man nur die Punkte P und Q von u_1 zu bestimmen, welche den Punkten uo und uu_1 von u beziehungsweise entsprechen, um folgendes Kriterium zu erhalten:

Wenn Q und $u_1 o$ durch P und $u u_1$ von einander getrennt sind, ist die eingehüllte Curve eine Ellipse; sie ist eine Parabel, wenn P m $u_1 o$ zusammenfällt, sowie auch, wenn u oder u_1 mit o zusammenfällt; s geht natürlich in eine Gerade über, wenn Q mit $u u_1$ zusammenfällt; son ist sie eine Hyperbel, da Q ein Punkt der Curve (Berührungspunkt v u_1) und P der Punkt ist, wo u_1 von der mit u parallelen Tangen geschnitten wird.

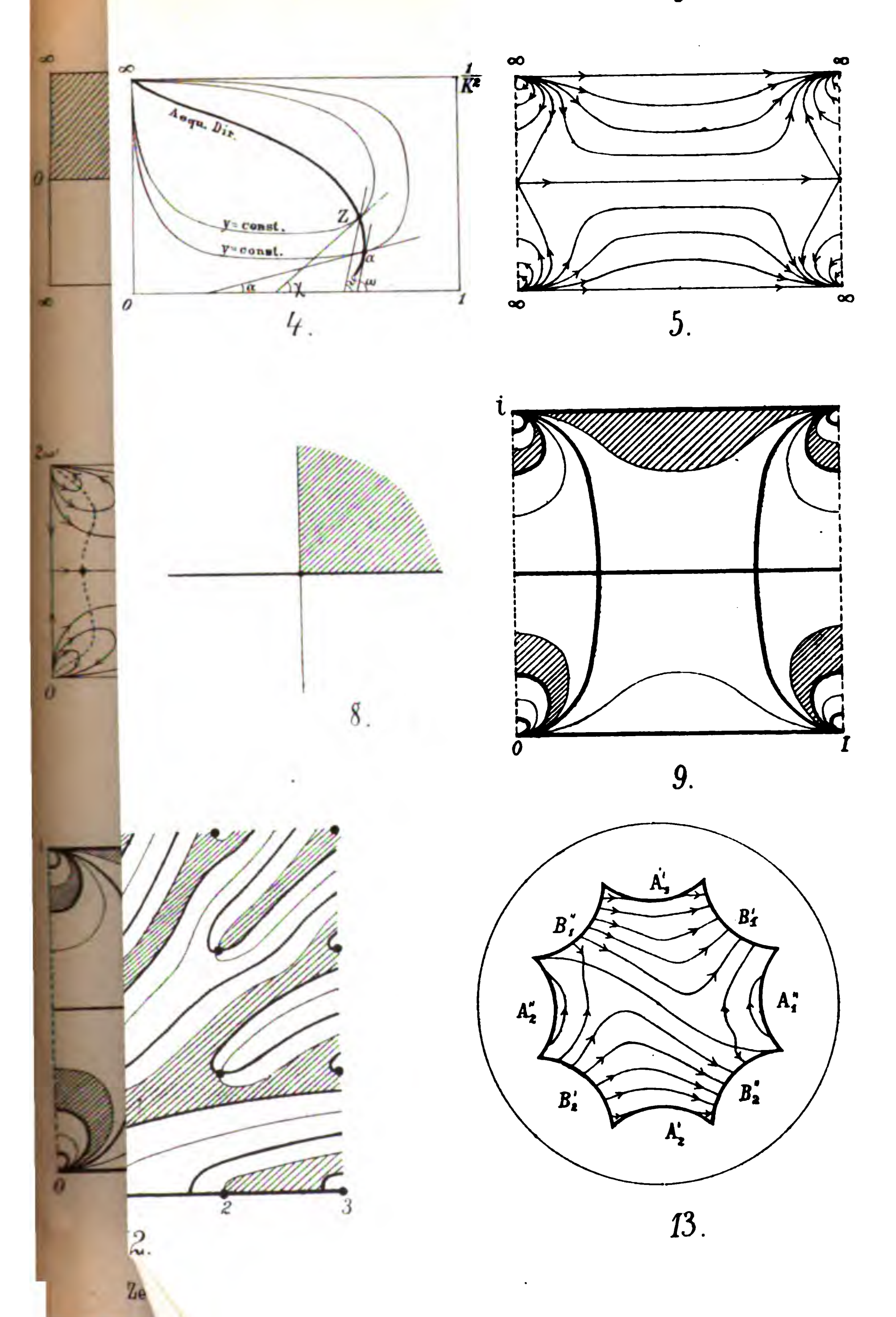
Dieses Kriterium versagt, wenn u und u_1 parallel sind, d. h. we $u_1 o$ und $u u_1$, sowie auch P und Q zusammenfallen. Man muss dann ei andere Tangente statt u_1 nehmen, was immer möglich ist, da nicht me als eine der fünf Tangenten dem u parallel sein kann.

Upsala. Ad. Meyer, Cand. phil.

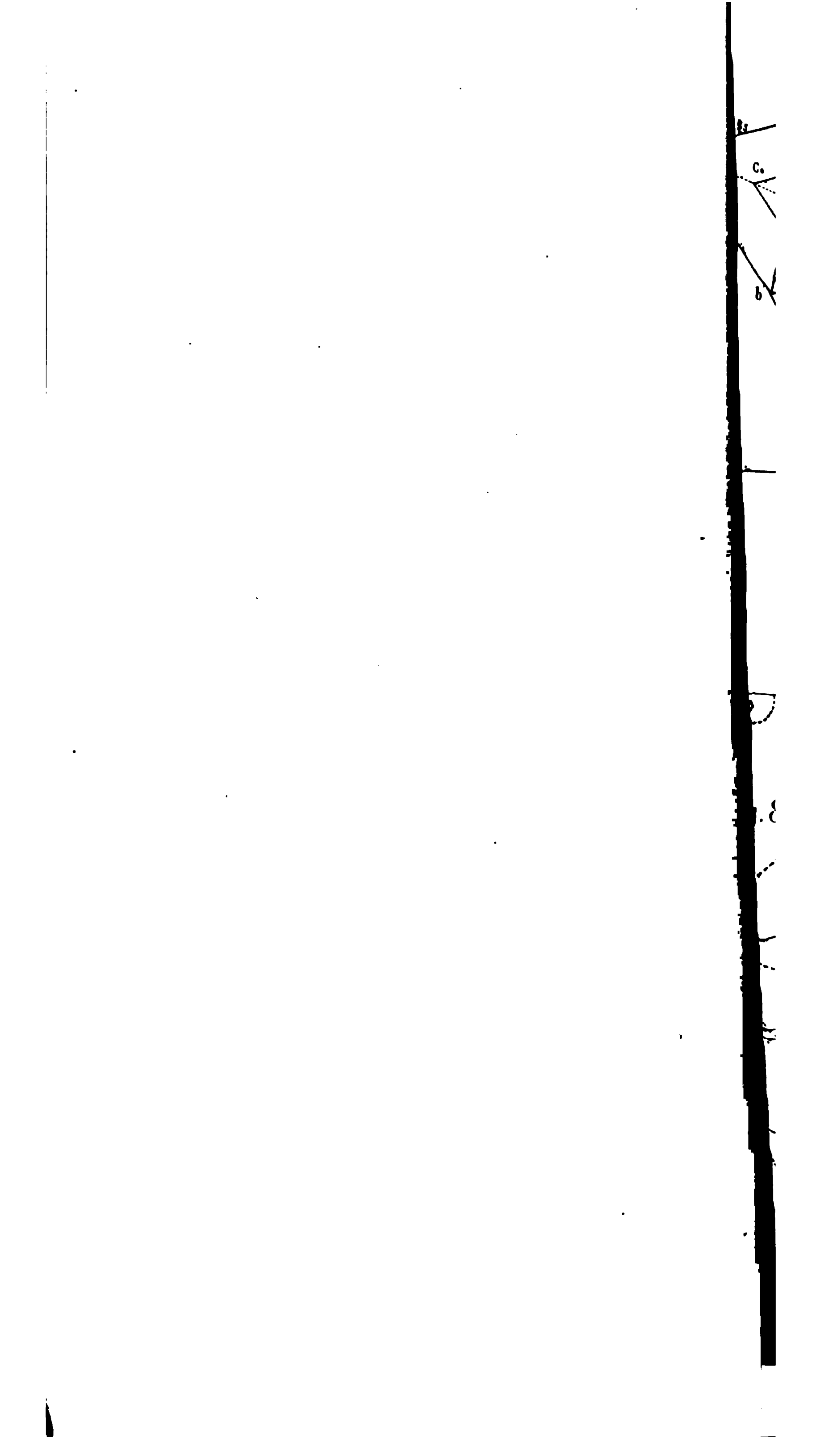


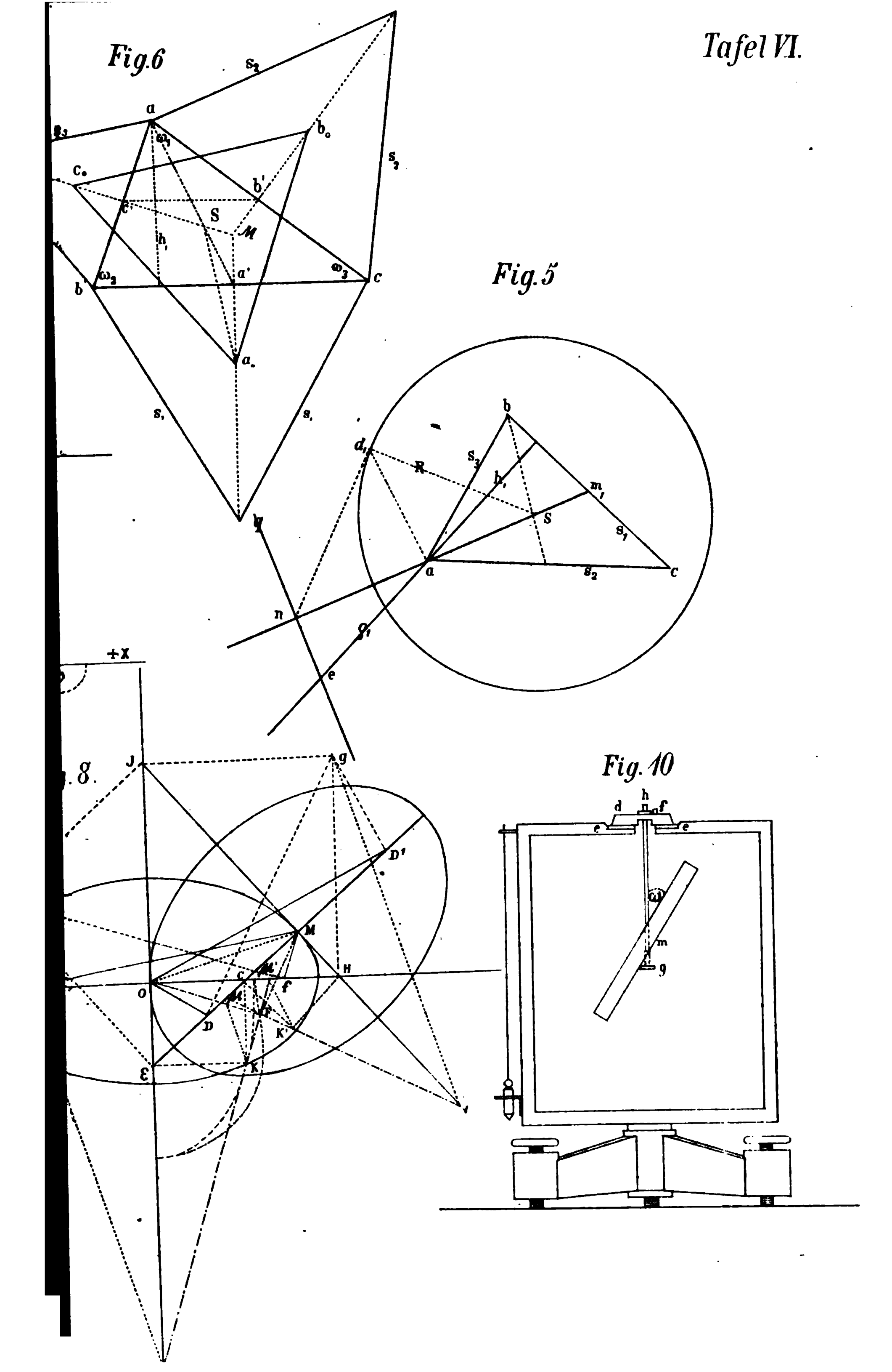
16
Nr.8
96.
48.1
24.1
416
4.4
B
C

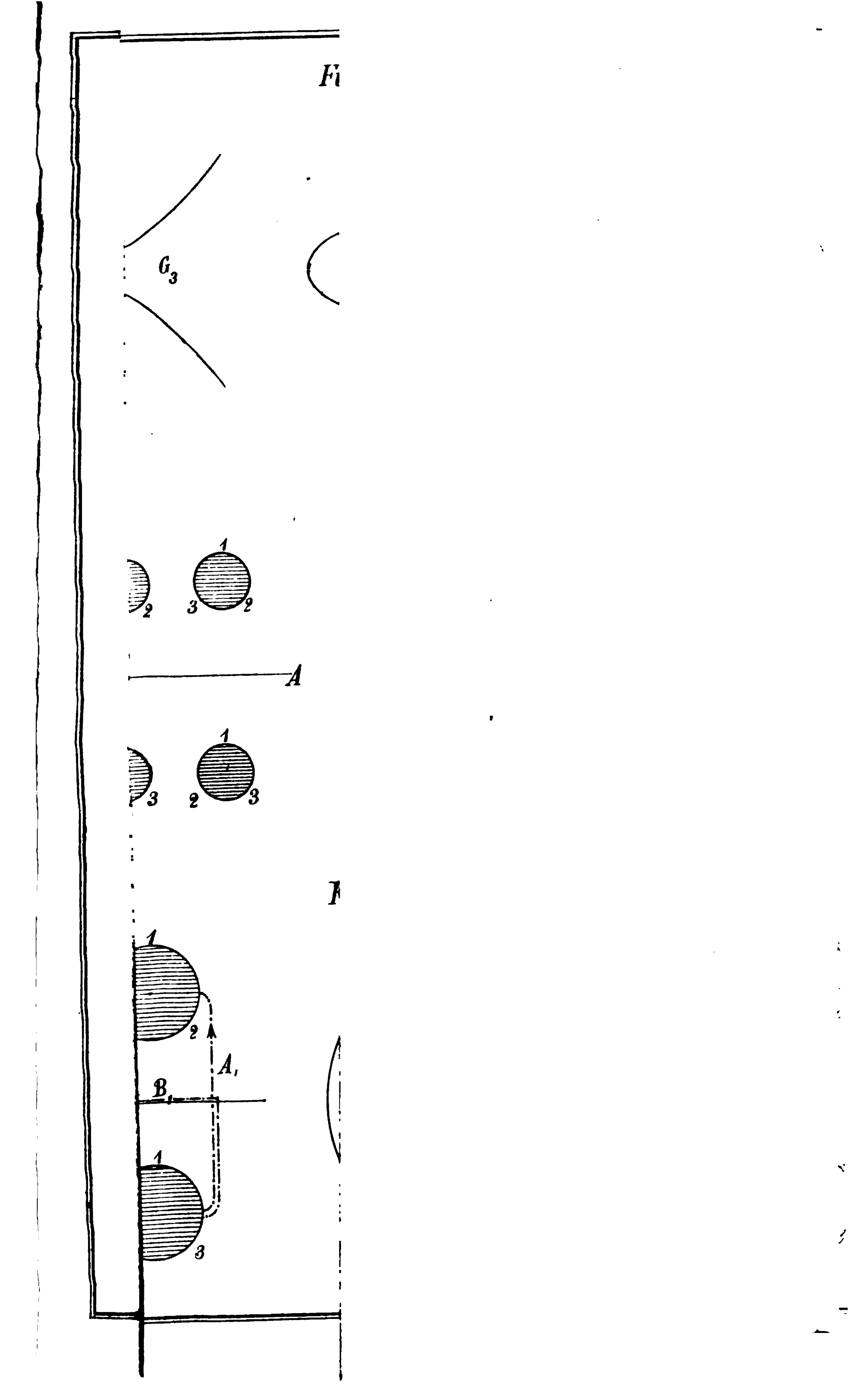




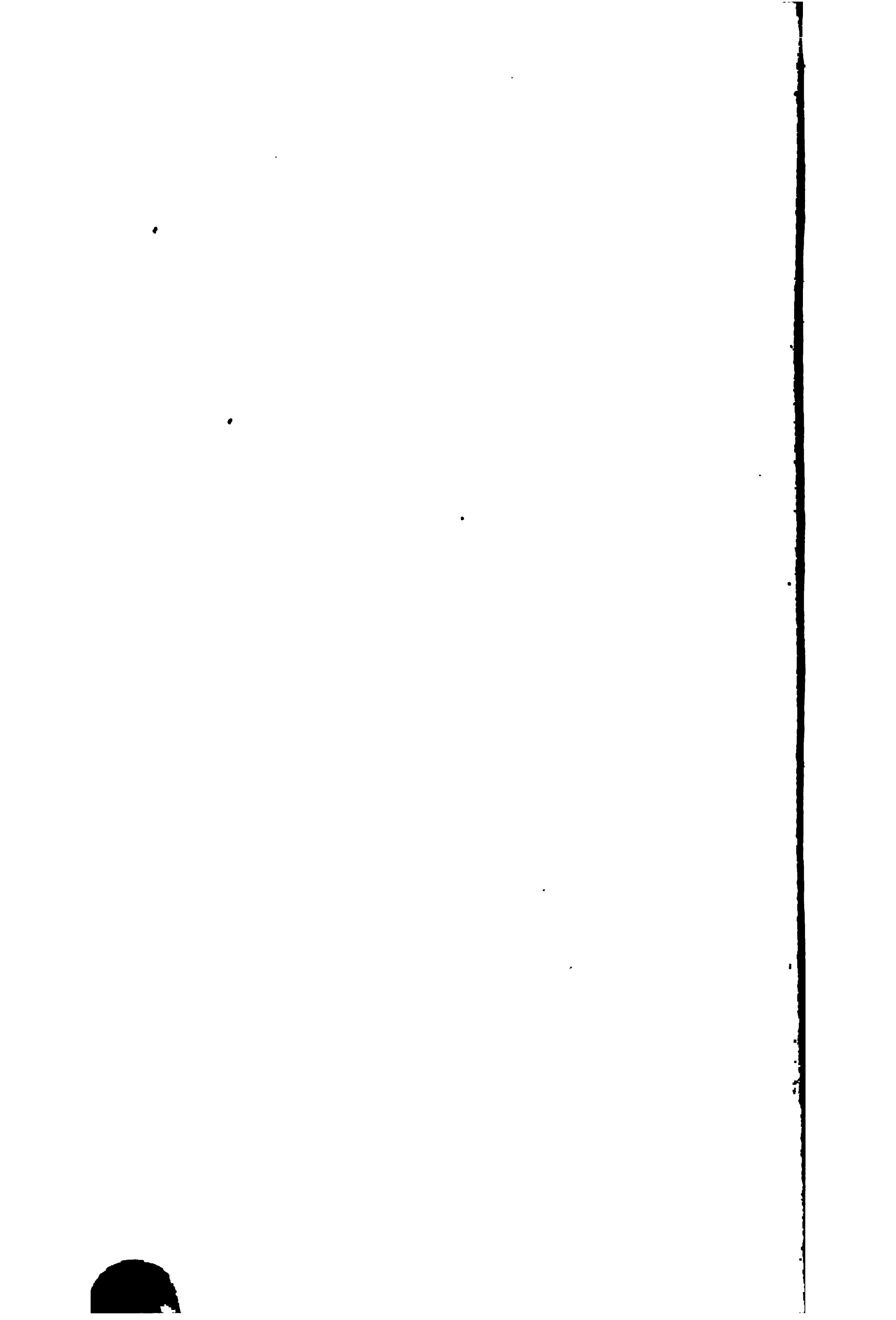
Aequ. Dir.
y = const.
y = const.
Z
4.
5.
8.
9.
13.

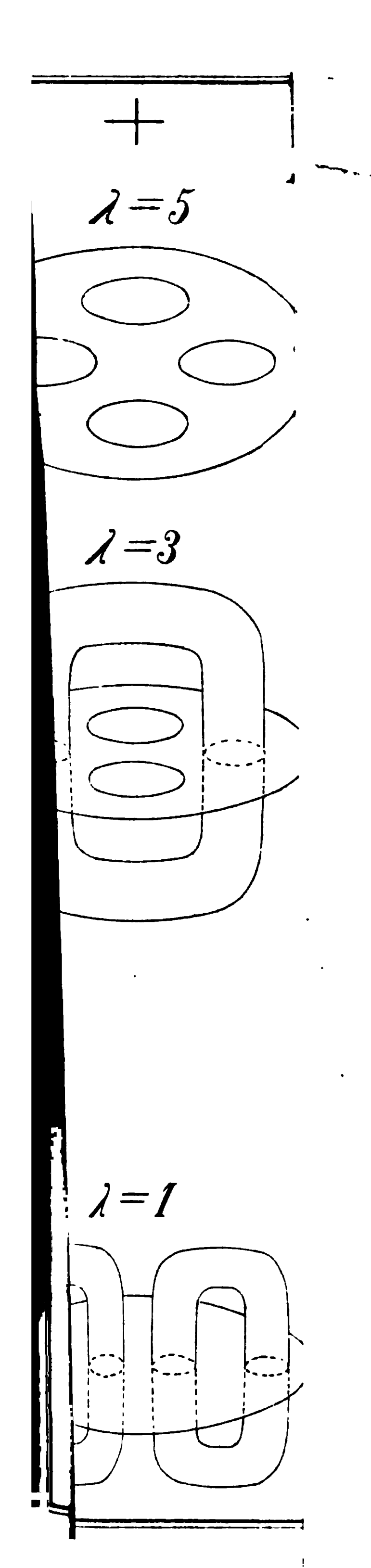



Fig. 6
Fig. 5
Fig. 10
8.



Fi
G_3
1
3
2
2
A
1
2
3
3
1
2
A_1
B_1
1
3





+
λ=5
λ=3
λ=1



Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXVIII. Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1883.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Geodäsie.

Mechanik und Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber eine Handschrift der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden.

Von

Maximilian Curtze,

Oberlehrer und Bibliothekar am Königl. Gymnasium und Realgymnasium zu Thorn.

Hierzu Taf. I Fig. 7 und 8.

In dem eben erschienenen „*Katalog der Handschriften der königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden. Bearbeitet von Dr. Franz Schnorr von Carolsfeld*“ findet sich auf Seite 304 die Beschreibung einer Handschrift, welche augenblicklich die Signatur *Db.* 86 hat. Dieselbe ist von hohem Interesse, jedoch ist Schnorr's Beschreibung nicht in allen Theilen stichhaltig, und es lohnt sich, eine eingehendere und in jeder Beziehung exacte Beschreibung zu liefern.

Die Handschrift, in klein Folio, geschrieben am Anfange des 14. Jahrhunderts, besteht aus drei Vorsatzblättern (davon das erste und dritte Papier, das zweite Pergament), aus 277 beschriebenen Pergamentblättern, welche 1—48, 50—278 bezeichnet sind (Blatt 49 ist in der Paginirung ausgelassen), und zwei Nachblättern (das erste Pergament, das letzte Papier), so dass die Gesammtzahl aller Blätter 282 beträgt. Sie ist in Holzdeckel mit rothem Leder überzogen gebunden und wird durch zwei messingene Schliessen zusammengehalten. Beim Binden sind von Randbemerkungen mehrere verstümmelt, auch von den Figuren manche beschädigt. Der Schnitt ist vergoldet.

Der Inhalt der Handschrift ist nun folgender:

1. Auf dem dritten Vorblatt ist ein Zettel aufgeklebt, welcher die Worte enthält: „*Emi de vidua M. Valentini Thaus*. 14. *die Ĩbris*. *Anno MDLXXX.*“ Darunter steht von derselben Hand ein Inhaltsverzeichniss des Bandes: „*Numerus librorum in hoc volumine contentorum*“, dessen letzter Titel vom Buchbinder weggeschnitten ist.

2. Blatt 1—48: Euklid's Geometrie in der Uebersetzung Atelhards von Bath. Die Recension, von welcher zuerst H. Weissenborn in der „*Zeitschrift für Mathematik und Physik*“ gehandelt hat. Diese Recension ist bemerkenswerth, da sie von dem griechischen Texte sich viel weiter entfernt, als die von Campano edirte Recension und speciell die Beweise vor den dazugehörigen Lehrsätzen enthält. Ueber dem Anfange

steht von Thaw's Hand: „*Alardj vel Adelhardj expositio in Euclidem V.T.*". Darüber von anderer Hand: „*meminit eius Regiomontanus in prefatione in Alfraganum*". Am Ende (Blatt 48[b]) steht Folgendes: „ꝗ *Explicit liber euclidis philosophi de arte Geometrica continens.CCCCLXV.proposita et proposiciones et.XI.porismata preter anxiomata singulis libris premissa proposita quidem infinitiuus proposiciones indicatiuus explicans.*" Eine grosse Zahl von Randglossen begleiten den Text. Die Figuren sind gut gezeichnet und haben vielfach, im Gegensatz zu dem von Weissenborn beschriebenen Exemplare, Buchstaben an den Eckpunkten.

Blatt 49 fehlt.

3. Blatt 50[a]—61[b], Zeile 28: „*Geometria iordani vel iordani de triangulis*", so steht von gleichzeitiger Hand auf dem linken Rande, dagegen trägt der rechte Rand von Thaw's Hand die Worte: „*liber primus de triangulis*". Das Stück beginnt: „*Continuitas est indiscrecio termini cum terminandi potencia.*" Auf Blatt 52[a] beginnt „2 *liber Jordanj de triangulis*" (Thaw's Hand) mit den Worten: „*Duabus lineis propositis quarum una sit minor quarta alterius vel equalis: minori talem lineam adiungere ut que adiecte ad compositam: eadem sit composite ad reliquam propositarum proporcio.*" Das zweite Buch schliesst auf Blatt 54[a] und daselbst beginnt: „*Incipit tertius liber de triangulis*" (Thaw's Hand) mit den Worten: „*Si tres linee in circulo equedistantes equales inter se arcus comprehendant; maxime ad mediam maior erit distancia et maiorem cum ea circuli partem comprehendet.*" Dieses Buch reicht bis Seite 56[b] und dort beginnt dann: „*Liber quartus de triangulis*" (Thaw's Hand) mit den Worten: „*Superficierum que inter arcus equaliter sese excedentes et lineas contingentes continuantur: sicut et ipsarum contingencium erit maiorum differencia maior.*" In diesem Buche sind zwei Sätze mit zwei Sätzen aus dem *liber trium fratrum* identisch. Der erste: „*Quemlibet angulum rectilineum in tria equa diuidere*", und der andere: „*Inter duas quantitates propositas duas alias invenire ut continuentur quatuor quantitates secundum proporcionem unam.*" Die Lösung des ersten Problems geschieht mit der Kreiskonchoide, die des zweiten nach Art des Archytas.

4. Blatt 61[b], Zeile 29 bis 110[b]: „*incipit Jordanus*", so steht mit ganz verblasster Tinte, aber von gleichzeitiger Hand auf dem linken Rande, darunter von der Hand Thaw's „*Arithmetica Iordanj Nomorarij*". Sie ist bekanntlich zweimal edirt von Jean le Fèvre d'Étaples (Johannes Faber Stapulensis). Beide Ausgaben weichen erheblich von der Handschrift ab, was davon herrührt, dass Faber mancherlei Aenderungen und Zusätze sich erlaubte. So hat die Handschrift 3 *Petitiones*, der Druck 6, die Handschrift 8 *Communes animi conceptiones*, der Druck dagegen 20 u. s. w. Die Anfänge der 10 Bücher sind durch grössere reich verzierte Buchstaben ausgezeichnet. Buch 2 beginnt Blatt 64[b]; Buch 3 Blatt 67[a]; Buch 4 Blatt 69[b]; Buch 5 Blatt 72[b]; Buch 6 Blatt 74[b];

Buch 7 Blatt 80^b; Buch 8 Blatt 86^b; Buch 9 Blatt 92^b, in diesem ist am Schlusse eine längere Lücke; Buch 10 endlich beginnt auf Blatt 103^b, der Beweis des letzten Satzes fehlt.

5. Blatt $111^a - 122^a$, Zeile 5: „*Euclides de visu*“ steht von Thaw's Hand über der betreffenden Pièce. Dieses Exemplar der Optik des Euklid ist in mehrfacher Weise interessant. Heiberg hat in seinen „Litterargeschichtlichen Studien über Euklid“ (Leipzig, Teubner, 1882) eine Form der Optik edirt, welche er als die ältere und authentische betrachtet. Nun findet sich in der Handschrift *R*. 4°. 2 der königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn eine direct aus dem Griechischen geflossene Uebersetzung dieser Heiberg'schen Recension, und ein Exemplar dieser selben Uebersetzung liegt in unserem Manuscripte vor. Der Abschreiber ist sich aber bewusst, dass es noch eine andere Ausgabe der Optik giebt, und in seinen hinzugefügten Randglossen giebt er dieser Verschiedenheit Ausdruck. So steht neben den beiden letzten Petitionen: „*Quidam libri habent ista duo principia et quidam non.*“ So sagt er zu dem ersten Satze: „*Nullum uisorum simul uideri totum*“: „*Alia translacio nullum uisorum simul totum uideri*“ und fügt nun einen langen Beweis hinzu, wie ihn die andere (aus dem Arabischen geflossene) Uebersetzung giebt.

6. Blatt 122^a, Zeile 6 bis 128^a, Zeile 15. Auch dieses Stück dürfte der Aufmerksamkeit werth sein. Es enthält ein Werk, das nur durch das Explicit betitelt ist: „*Explicit liber de speculis.*“ Es enthält aber die Katoptrik des Euklides. Die beiden von Heiberg (a. a. O. S. 152 u. 153) berichtigten Stellen der Uebersetzungen von Pena und Dasypodius sind in derselben ebenfalls richtig überliefert. So heisst Satz 5: „*In concavis speculis siue supra centrum siue supra periferiam siue extra periferiam oculum ponis: uisus repercussi concidunt*“, und die Figur zu Satz 6 ist genau diejenige, welche Herr Heiberg reconstruirt hat, und genau mit denselben Buchstaben.

7. Blatt 128^a, Zeile 6 bis 158^b: Es folgen die Sphaerica des Theodosius. Am Ende heisst es: „*Explicit liber theodosii de speris.*“ Es ist die aus dem Arabischen geflossene Uebersetzung, was aus dem Worte *meguar* für Axe deutlich hervorgeht. Das Werk besteht bekanntlich aus drei Büchern. Davon beginnt das zweite auf Blatt 135^a, das dritte auf Blatt 147^b. Unter dem Explicit befindet sich von dem Schreiber der Handschrift noch ein anderer Beweis eines Satzes des Theodosius.

8. Blatt $159^a - 159^b$, Zeile 11: „*libellus de proporcionibus corporum pro uirtute*“, so steht von einer spätern, aber nicht der Hand Thaw's auf dem rechten Rande. Dieser Titel ist irreleitend, denn das fragliche Stück ist nichts weiter als das Fragment „*de graui et leui*“ des Euklides. Es beginnt: „*Corpora equalia in magnitudine sunt que replent loca equalia*“ und schliesst: „*patet propositum per premissam*“, ist also nicht dem Wortlaut nach identisch mit dem von Zamberti und Gregori aufgenommenen Exemplare.

9. Blatt 159[b], Zeile 12 bis 165[a]: Es folgt ein „*liber minuciarum*“, welches Schnorr als Bestandtheil des vorhergehenden Stückes aufgefasst hat. Der Titel steht mit ziemlich verblasster und wenig jüngerer Schrift als die der Handschrift auf dem linken Rande. Anfang: „*Quodlibet intellectum* r[v] *partis aut parcium nuncupatur totum.*“ Schluss: das Einmaleins von 1 bis 9 in der Form der Pythagoreischen Tafel. Nur arabische Ziffern.

10. Blatt 165[b]—168[a]: Mit alter Handschrift steht: „*liber de proporcionibus corporum secundum motum in tempore*“, darunter von Thaw's Hand: „*Proclus de motu περὶ κινήσεως extat graece V. T.*“ Alle Anfangsbuchstaben fehlen. Beginnt: „*(C)ontinua sunt quorum termini unum. (C)ontingencia sunt quorum termini simul.*“ Schluss: „*Vni enim una mocio erit con T.R.A.R.j.A.*

Blatt 168[b] ist leer.

11. Blatt 169[a]—175[a]: „*Incipit algorismus demonstratus*“ so halb abgeschnitten von gleichzeitiger Hand am obern Rande des Blattes. Es ist der bekannte, früher dem Regiomontan zugeschriebene „*Algorismus demonstratus de integris*“, der 1534 edirt ist. Beginnt: „*Figure numerorum sunt nouem* ı.7.3.ℵ.ᔦ.6.Λ.8.q. *Et est prima unitas.secunda binarii.et sic deinceps.*“ Schluss: „*In.a.bis et.b.in se.et.c.in.a.bis et in.b.bis et in se semel.qod erat propositum.*“

12. Blatt 175[b]—176[b], 178[a], Zeile 1—3: „*liber archimenidis de comparacione figurarum circularium ad rectilineas*“, das heisst die *circuli mensura* des Archimedes, wie schon die Form „*Archimenides*“, zeigt, aus dem Arabischen übersetzt. Beginnt: „*Omnis circulus orthogonio triangulo est equalis cuius unum duorum laterum rectum continencium angulum medietati diametri circuli equatur.et alterum ipsorum linee circulum continenti.*“ Schliesst: „*Linea ergo continens circulum addit super triplum diametri eius minus septima ipsius et plus X partibus de LXXI et illud est quod declarare voluimus.*“

13. Blatt 177[a] und [b]: Ist in der Schorr'schen Beschreibung ganz ausgelassen, obwohl durch einen Vogel, bei welchem die Worte stehen: „*verte folium antecedentem ad tale signum*“, auf dasselbe hingewiesen wird, denn an der Spitze desselben ist derselbe Vogel, wie hier, gemalt. Dies Blatt enthält, jedoch ohne zugehörige Figuren, die „*Demonstratio Campani de figura sectore*“, welche auch in der Handschrift *R*.4°.2 der königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn sich findet. Anfang: „*Cum aliquis semicirculus diuidatur in duos arcus.*“ Schluss: „*et ex proporcione corde dupli arcus* cf *ad cordam dupli arcus* ce *Explicit*“. Das Blatt ist von völlig anderem Pergament als die übrigen Blätter.

14. Die in dem unter 1. erwähnten Inhaltsverzeichniss angegebenen *Theoremata Cratili* können, meiner Meinung nach, nur auf die beiden folgenden Lehrsätze bezogen werden, dieselben umfassen Blatt 178[a], Zeile 4 bis Blatt 178[b], Zeile 23. Die beiden Sätze heissen folgendermassen — ich drucke sie vollständig ab, da besonders der zweite eine

bis jetzt für das Mittelalter nicht bekannte Beweisführung für den Dreiecksinhalt aus den drei Seiten enthält —:

1) *Omnis trianguli in semicirculo cadentis unius duorum laterum in alterum multiplicacio est equalis multiplicacioni diametri in perpendicularem, que cadit super basim trianguli.*

Racio patens est per VIII. et per primam partem 15ᵉ *sexti euclidis. sicut enim diameter ad alterum laterum, ita reliquum ad perpendicularem* (siehe Fig. 7).

Neben dem folgenden Theorem steht von Thaw's Hand: σφάληρον θεόρημα. *Vide hac de re Campanum prop.* 13. *lib.* 2 *Euclidis aliter idem.* An der bezeichneten Stelle steht, wenigstens in den mir zugänglichen Ausgaben Euklid's, nichts dergleichen.

2) *Si tria trianguli latera coacerventur, medietatisque compositi ad singula latera differencie sumantur, primaque in secundam ducatur et in productum tercia; itemque inde productum in predictam medietatem, radix producti erit area trianguli.*

Sit datus triangulus abc *et medietas coacervati ex lateribus ipsius sit linea* klm, *differentieque ipsius sint ad* ab *linea* t *et ad* ac s *et ad* bc k. *Sed solidum quod continet* tsk (im Original steht idest) *sit designatum nota* z. *Intelligamus igitur in dato trigono circulum contingentem latera notis* f, g, e, *cuius centrum* d, *a quo prodeant ad puncta contactus linee* df, de, dg *singulis lineis perpendiculares atque inter se equales: sed et a* d *ad tres angulos linee protrahantur, que singulos angulos per equa parcientur, quorum omnium medietates quoniam equantur uni recto, et quia angulus* dbf *et angulus* bdf *equantur recto: erit angulus* bdf *tanquam angulus* daf *et angulus* gcd. *Ducatur ergo linea* pqdh *ita, ut angulus* hdf *equatur angulo* daf, *eritque angulus* hda *rectus et similiter angulus* qda *et ob id etiam angulus* gqd *equalis angulo* gad *et reliquus scilicet* qdc *equalis angulo* dbh *quoniam totus angulus* qdc *est equalis duobus scilicet* gad *et* dbe. *Erigatur itaque perpendicularis* ac, *donec concurrat cum linea* hdqp, *que sit* cp, *et continuetur* p *cum* a. *Deinde, quoniam* af *est equalis* ag, *et* bf *equalis* be, *atque* ce *equalis* cg, *linee enim ab eodem puncto exeuntes usque ad contactus circuli sunt equales, tunc* af *et* fb *et* ce *sunt tamquam tres relique. Erunt ergo medietas trium laterum. component ergo lineam* klm, *sitque* k *equalis* af, *et* l *equalis* fb, *et* m *equatur* ce. *Manifestum est eciam quod* klm *addit super* ab, *quantum est* m, *quare* m *equalis est* t, *sed et similiter* ac *addit* l, *quare* l *equatur* s, *atque similiter* bc *addit* k, *itaque* k *est equalis* r. *Sint eciam linee* n *et* o *equales perpendicularibus, quarum una* df, *solidumque sub lineis* klm *et* n *et* o *contentum sit* y. *Quia idem anguli* adp *et* acp *sunt recti et equales, puncta* adcp *in eodem semicirculo consistent, quare anguli* pac *et* pdc *sunt equales. Erunt ergo anguli* pac *et* fbd *equales, itaque trianguli* fbd *et* acp *sunt similes, eritque* bf *ad* fd *sicut* ac *ad* cp. *Sed eciam* fd *ad* fh *sicut* po *ad* cq, *quoniam trianguli* dfh *et* cpq *sunt similes.*

Itaque bf *ad* fh *tanquam* ac *ad* qc, *ergo coniunctim* bf *et* ac *ad* fh *et* cq *sicut* bf *ad* hf, *sed* bf *est tanquam* qg *propter triangulos similes et quia* fd *equalis est* dg. *Itemque* bf *et* ac *sunt tamquam* klm. *Est ergo* klm *ad* gc *sicut* bf *ad* fh. *Sed proporcio* bf *ad* fh *aggregatur ex proporcione* bf *ad* df *et ex proporcione* df *ad* fh, *sed* af *ad* fd *tanquam* fd *ad* fh *proporcio, ergo* bf *ad* fh *constat ex proporcionibus* bf *ad* df *et* af *ad* df. *Sed proporcio* bf *ad* df *tanquam linee* s *ad* n, *et* af *ad* df *sicut differencie* r *ad* o *proporcio: itaque* klm *ad* t *aggregatur ex proporcione* s *ad* n *et* r *ad* o *Quia igitur solidi* y *ad solidum* z *aggregatur proporcio ex proporcionibus* klm *ad* t *et* n *ad* s *et* o *ad* r, *et proporciones* n *ad* s *et* o *ad* r *faciunt proporcionem* t *ad* klm: *erit solidum* y *equale solido* z. *Producit autem* klm *in* o *superficiem equalem triangulo dato. Diuisus est enim triangulus* abc *in tres triangulos* adb *et* bdc *et* adc, *sed ex dimidio* ab *in* df *fit equale triangulo* adb, *et ex dimidio* ac *in* dg *equum est trigono* adc, *et quod ex dimidio* bc *in* de *est equale triangulo* bdc, *et quia omnes perpendiculares sunt equales linee* o, *ideo quod fit ex dimidio omnium laterum in* o, *et ipsum est* klm, *est tamquam area trianguli* abc. *Cum ergo solidum* y *habet latera* o, n, klm *et ex* o *in* klm *fiat area trianguli, tunc* n *ducta in eandem aream perficit solidum* y, *quare cum* o *sit equale* n, *erit area trianguli inter lineam* klm *et solidum* y *proporcionale, quare inter eandem et solidum* z. *Si ergo, ut proponitur,* klm *ducatur in* z, *radix producti erit area trianguli.* (Siehe Fig. 8.)

Wer war jener Cratilus, dessen Theoremata diese beiden gewesen sein sollen?

15. Es folgt Blatt 178^b, Zeile 24 bis 179^b eine Abhandlung, welche Thaw auf Blatt 179^a betitelt: „*propositiones aliquot περὶ τῶν ὁμοκέντρων*“. Nicht uninteressante Sätze über homocentrische Kreise. Beginnt: „*Geometri eos arcus similes esse (dicunt): qui angulos recipiunt equales*“ und schliesst: „*et eius proporcio erit proporcio corde arcus circuli vnius ad cordam arcus similis alterius circuli circumducti eidem centro scilicet* o *existente angulo* o *recto sicut corde arcus circuli unius circumducti* o *centro ad cordam arcus similis circuli alterius eidem centro circumducti.*

16. Blatt 180^a – 182^b, Zeile 3: Enthält die Abhandlung, welche Director Hultsch im dritten Bande seiner Pappusausgabe als anonyme Schrift über isoperimetrische Figuren veröffentlichte (Seite 1138—1165). Sie beginnt: „*Prelibandum vero primum quoniam ysoperimetrorum ysopleurororum rectilinearum et circulis contentorum quod plurium est angulorum: maius est.* Es sind sieben nummerirte Lehrsätze. Der Schluss lautet: „*Equalis ergo piramis poliedro minor existens cono equali spere. Quare et solidum poliedrum minus spera*“.

Das Stück findet sich auch in der Handschrift *F. II.* 33 der öffentlichen Bibliothek zu Basel.

17. Blatt 182^b, Zeile 4 bis 183^a, Zeile 23: Dieses Stück ist mit der Nr. 8 bis auf kleine orthographische Abweichungen identisch. Es hat von einer wenig späteren Handschrift den Titel: „*liber euclidis de graui et leui et de comparacione corporum ad inuicem*", was bei Schnorr lautet: „*Euclides, de gnomone, item de compositione eorum ad invicem.*" Auch hier beginnt das Stück: „*Corpora sunt equalia in magnitudine: que replent loca equalia*" und endigt: „*Erit igitur* b *ad* a *ut* z *ad potenciam ipsius* a *que est* g. *Explicit liber euclidis de ponderoso et leui et comparacione corporum ad inuicem.*"

18. Es folgt der Beweis des Satzes: „*Diameter est assimeter coste*", d. h. der Beweis, dass die Hypothenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks der Seite desselben incommenshrabel ist (Blatt 183^a, Zeile 24—41).

19. Blatt 183^b—185^a, Zeile 35: „*Incipit liber de canonio*" steht von gleichzeitiger Hand auf dem linken Rande. Eine Abhandlung, die mir zum ersten Male entgegentritt. Sie beginnt: „*Sic fuerit canonium simmetrum magnitudine et substancie eiusdem*". Es sind nur vier Lehrsätze. Das Werkchen schliesst: „*et hic erit numerus minoris porcionis quod oportebat ostendere. Explicit liber de canonio*".

20. Es folgen Blatt 185^a, Zeile 36 bis Blatt 186^b zwei Aufgaben, welche zu dem Vorhergehenden in gewisser Beziehung stehen: 1) *Si fuerit aliquod corpus de duobus mixtum corporibus notis et uolumus scire quantum in eo sit de utroque ipsorum:* 2) *Queritur in longitudine equali et tereti eiusdem materie per inequalia diuisa, quantum sit apponendum breuiori: ut tota equidistet orizonti.*

21. Blatt 186^a—187^b: „*Incipit liber de ponderibus uel de statera iordani*", darunter von der Hand Thaw's: „*secundum quedam Euclidis*". Es ist das Fragment der Jordanus'schen Schrift, welches 1533 Apianus zu Nürnberg unter dem Titel edirte: „*De ponderibus Jordani Nemorari proposiciones tredecim.*" Am Schlusse steht: „*Expliciunt elementa iordani super demonstracionem ponderum*" und darunter folgende Bemerkung Thaw's: „*quidam putant hunc librum de ponderibus esse Euclidis et vidi manuscripta exemplaria quedam in quibus erat inscriptio talis Euclides de ponderibus. Valentinus thaw Math. profess.*" Die Schrift ist mit vielerlei Randglossen versehen; eine längere steht noch unter dem *Explicit.*

22. Blatt 188^a—194^b: Ohne Titel. Es ist dieselbe Schrift, welche im Codex Basil. F. II. 33 betitelt ist *Archimenides de curvis superficiebus* und im Codex Magliab. Florent. Conventi sopressi I. V. 30 *Arcimenidis de rotundis pyramidibus.* Sie besteht aus elf Sätzen, welche Heiberg im dritten Theile seiner Archimedes-Ausgabe am Ende der Vorrede nach einer von mir gelieferten Vorlage abdrucken liess. In unserem Manuscript hat die Schrift folgende Subscriptio: „*Sicque tiphis noster portum tenet in quem iam dudum uela succingeret. Jamque cum bibulis habet harenis anchora*

archimenides remigii Johannes nauigacionis grates agit summo creatori. Explicit commentarium Johannis de tlñ in demonstraciones Archimenidis. Es ist wirklich nur eine Bearbeitung einiger Sätze aus dem Buche *de sphaera et cylindro.* In der Florentiner Handschrift heisst die Unterschrift „*explicit commentarium Johannis de Thiss in demonstraciones Archimenidis*“. Ob also der Commentator Johannes de tlñ oder de thiss hiess, wäre noch zu erforschen.

23. Blatt 195^a—196^b, Zeile 23: Im Schnorr'schen Kataloge steht für diese und die folgende Abtheilung zusammen der Titel: *Theodosius de diuersitate homocentricorum*, entnommen dem oben erwähnten Inhaltsverzeichniss. Das vorliegende Stück heisst sonst immer „*Theodosius de locis habitabilibus.*“ Darüber steht von Thaw's Hand: „*haec extant etiam conuersa in operibus Georgij Vallae V. T.*“. Beginnt: „*Illis quorum habitacionis loca sub polo sunt septentrionali spere medietas apparens semper eis apparet*“, und schliesst: „*Alio dimidio tempore quo sol preterit signum dies erit.*“

24. Blatt 196^b, Zeile 24 bis 198^b, Zeile 8: Eine Schrift über das Astrolab. Beginnt: „*Tres circulos in astrolapsu descriptos: duos uidelicet solsticiales et equinoctialem continue proporcionales esse necesse est*“ und schliesst: „*et secundum hoc fit artificium laminarum. Et hec capitula ne pretermittat qui uoluit facere astrolabium que compilavimus de figura sectionis*“. Daraus möchte man fast schliessen, dass Campanus der Verfasser gewesen sei.

25. Blatt 198^b, Zeile 9 bis 200^a, Zeile 7: Anweisung, Länge und Breite eines Sternes, den Culminationspunkt und den Aufgangspunkt zu bestimmen. Beginnt: „*Ad scienciam extrahendi elevaciones signorum in orbe recto*“ und schliesst: „*et quod prouenit est nadair gradus occasus intelligas*“.

26. Blatt 200^a, Zeile 8 bis 213^a, Zeile 2: „*liber de datis Magnitudinibus*“ steht neben diesem Stücke in ziemlich gleichzeitiger Hand. Es ist nichts weiter als die Data des Euklides. Beginnt: „*Data magnitudine dicuntur et spacia et linee et anguli quibus possumus equalia assignare*“ und schliesst: „*Datum ergo quod sub* a d *et* e c. *Explicit liber de datis Magnitudinibus.*“

27. Blatt 213^a, Zeile 3—28: „*quadratura circuli*“ mit Hilfe der Monde des Hippokrates. Beginnt: „*Quadratura per lunulas hoc modo est*“ und schliesst: „*hec igitur est quadratura per lunulas.*“

28. Blatt 213^a, Zeile 29 bis 213^b: Drei Sätze über Kreise: 1. *Si ab aliquo circulo abscindantur porciones inequales. maior erit proporcio arcus maioris ad arcum minoris, quam corde longioris ad cordam breviorem.* 2. *Si in circulis sese interius contingentibus plurime linee utrumque circulum secando ducantur, ille linee erunt proporcionales partibus. que ultra minorem circulum in maiorem producuntur.* Die Linien sollen dabei vom Berührungspunkte

gezogen sein. 3. *Si a circulis inequalibus corde equales arcus resecent, erit arcus minoris maior arcu maioris.*

29. Blatt 214ᵃ—219ᵇ, Zeile 38. Nach der Unterschrift *Theodosius de plana sphaera.* Beginnt: „*Quemadmodum ptholomeus et ante eum nonnulli veterum auctoritatis uiri*" und schliesst: „*eum ipsis circulis tropicis et cum circulis meridianis signa distinguentibus. Explicit secunda edicio theodosii de plana spera*". Nach einer Randglosse neben diesem Schlusse, welche beginnt *alia terminacio*, musste die Unterschrift lauten: „*Explicit liber superficiale spere ptholomei correptus a meslen filio dantis gracias quod est admeti.*"

30. Blatt 219ᵇ, Zeile 39 bis 222, Zeile 9: *incipit prima proposicio planisperii*, so steht halb abgeschnitten und dadurch fast unleserlich als Fussnote des Blattes. Beginnt: „*Quotlibet duos circulos equedistantes recto in spera corporea, circulumque declinem cos e regione contingentem in plano collocare*" und schliesst: „*in quo hec nadir in plano datum punctum in spera potencialiter ostendit*".

31. Blatt 222, Zeile 10 bis 224ᵃ, Zeile 19: „*liber quem edidit thebit filius chore de his que indigent exposicione antequam legatur almagesti*", so die Fussnote auf Blatt 222ᵃ. Beginnt: „*Quatuor circuli diei est arculus maior qui describitur super duos polos orbis super quos mouetur ab oriente in occidentem*" und schliesst: „*erunt retrogradi Explicit*".

32. Blatt 224ᵃ, Zeile 20 bis 225ᵇ: „*incipit liber qui dicitur demonstracio jordani de forma spere in plano*", das letzte Wort durch den Buchbinder weggeschnitten. Darunter von Thaw's Hand: „*desiderantur hic protheoria*". Beginnt: „*Spera in quolibet polorum planum contingente in cuius superficie descriptus sit circulus per propositum polum transiens si quotlibet linee ab eodem polo per circumferenciam illius circuli descendant in planum : puncta in quibus planum contingunt : in linea recta sita erunt*" und schliesst: „*In communi igitur seccione ipsius et circuli* poy *hoc est in* o *erit situs illius quod proponebatur. Explicit demonstracio Jordani de forma spere in plano.*" Darunter noch ein Satz, den der Schreiber der Handschrift hinzugefügt zu haben scheint, denn er schliesst mit den Worten: „*et hec est intencio actoris de nouo appositum*".

33. Blatt 226ᵃ—228ᵃ, Zeile 8: „*Incipit quedam arismetica de mathematica*" steht auf dem rechten Rande. Beginnt: „*Proporcio est rei ad rem determinata secundum quantitatem habitudo.*" Mitten im Contexte steht: „*veniendum nunc nobis est ad id quod intendimus occasione enim sumpta ex. Kata tholomei in almagesta positis sex quantitatibus ita ut proporcio duarum constat ex duabus proporcionibus reliquarum* 8 *uolumus demonstrare coniugaciones utiles et modos omnes ex una eorum prouenientes et sunt omnes* 18 *quorum secundum ex primo proueniente pō sequens consequenter poñ.* Es folgen nun die 18 Arten der Proportionen. Die Abhandlung schliesst:

„et ita ex uno posito procreabuntur 18 *alii a supradictis modi ut omnes pariter fiant* 36".

34. Blatt 228ª, Zeile 9 bis 242ᵇ: Das folgende Stück war der Grund, weshalb ich die königl. öffentliche Bibliothek zu Dresden überhaupt um Uebersendung der Handschrift ersuchte. Es enthält dasselbe nämlich ein Exemplar des Buches *de numeris datis* von Jordanus Nemorarius. In diesen Blättern (XXIV. Jahrgang, Supplement, S. 135 bis 166) hat Professor Treutlein in Karlsruhe zuerst nach der Handschrift F. II. 33 der öffentlichen Bibliothek zu Basel diesen Tractat herausgegeben. Ich habe dann im laufenden Jahrgange der Leopoldina einige Berichtigungen folgen lassen. Die vorliegende Handschrift, welche mit jener aus derselben Quelle stammen muss, da sie genau ebenso mitten im Beweise unvollständig abbricht, gestattet aber — sie ist übrigens 30 bis 40 Jahre älter —, wo die Baseler Handschrift fehlerhaft den Dienst versagt, den wahren Wortlaut wiederherzustellen. Auch liefert sie den Beweis, dass die Unterscheidung, welche ich a. a. O. zwischen den Zeichen *est* und *sed* machte, in der Wahrheit begründet ist, da in unserer Handschrift fast an allen Stellen das betreffende *sed* vollständig ausgeschrieben ist. Chasles sagt in den *Comptes rendus*, dass darin der Vorzug Jordans bestände, dass er die Zahlen ohne Substrat der Linien betrachte. Ich kann ihm nur darin beipflichten, und dass also unserer Handschrift Figuren beigegeben sind, auf welche jedoch im Texte nie Bezug genommen wird, halte ich für eine Zugabe des Abschreibers, welcher dadurch die Sache zu ergänzen bemüht war. Thatsächlich stimmen dieselben auch nicht zu den betreffenden Lehrsätzen. Hier einige in dem Treutlein'schen Abdrucke unverständliche Sätze nach beiden Handschriften (F. II. 33 Basil., und *Db.* 86 Dresd.) verbessert und richtig gestellt.

4) *Si numerus datus fuerit in duo diuisus, quorum quadrata pariter accepta sint data, erit utrumque datum modo premisso.*

Si enim g, *scilicet quadrata coniuncta, fuerit notus, erit et* e *notus, qui est duplum unius in alterum: subtractoque* e *de* g *remanebit* h, *quadratum differencie, cuius radix extracta* c *sit nota: erunt omnia data.*

Opus idem. Diuisus quippe sit X in duo, quorum quadrata sint LVIII, quo sublato de C remanebunt XLII, et ipse auferatur de LVIII et remanebunt XVI, cuius radix est IIII, et ipse est differencia porcionum, que fient VII et III, ut prius.

18) *Si uero quadrata eorundem coniuncta per differenciam diuidantur et quod exierit fuerit datum, et eorum quodlibet datum erit.*

Sit datus numerus ab *diuisus in* a *et in* b, *quorum quadrata sint* c, *et differencia eorum* d, *cuius quadratum* e, *et quadratum tocius* f. *Diuiso ergo* c *per* d *exeat* g, *cuius duplum fit* hl, *qui erit datus, et quia quadrata* e *et* f *sunt duplum* c *erit, ut* d *in* hl *faciat* ef. *Sic autem* l *equale* d, *et*

quia l *in se faciat* e, *tunc* l *in* h *faciat* f, *qui est notus: et quia* h l *est notus, erit et* l *per terciam huius et* h *datus, sicque* d *et omnis.*

Verbi gracia diuisus sit X in duo, quorum quadrata diuisa per differenciam reddant XXVI, cuius duplum est LII, huius quadratum $\overline{II}$*DCC et IIII. ab hoc tollatur C quater et remanebunt II*$\overline{C}$*CCIIII, cuius radix est XLVIII; hic detrahatur a LII, et reliqui medietas, que est duo, est differencia porcionum.*

39) *Si a duobus numeris datis duo numeri detrahantur, fueritque detractorum et residuorum proporcio data, non autem sit eadem, que tocius ad totum, erit etiam quodlibet datum.*

Sint numeri dati a, b, c, d, *detracta* a, c. *et quia* a *ad* c *non sicut totum ad totum, non erit* a *ad* c *sicut* b *ad* d. *Sit igitur* a *ad* e *sicut* b *ad* d: *erit ergo* a b *ad* e d *sicut* b *ad* d, *et quia* a b *datum, similiter et* e d, *quare et differencia* c *ad* e, *que sit* g, *et sic igitur* a *ad* c *et ad* e *proporcio data erit, et ad* g: *subtracta enim minori proporcione a maiore remanebit proporcio* a *ad* g, *qui est differencia. Itaque* g *datum, quare et* a, *singula ergo data.*

Verbi gracia sint dati numeri XX et XII, et detractum XX sit duplum detracto XII, et residuum XX sexqualterum residuum XII; sit autem XX duplum ad quiddam, et ipsum est X, cuius differencia ad XII est duo, et quia siquidem est sexqualterum ad totum, et duplum ad detractum est sexcuplum ad reliquum, erit residuum XX sexcuplum ad duo. ergo erit XII, et detractum VIII: detractum vero XII erit IIII, et residuum ipsius erit VIII.

41) *Si duobus numeris dati numeri alternatim addantur et detrahantur et post mutuam addicionem et detraccionem sint semper ad inuicem dati, uterque erit datus.*

Sint numeri a, b, d, e *et dati sint* a *et* d, *itemque dati* c *et* f. *Si ergo* a b c *fuerit datus ad* e, *et* d e f *ad* b, *erunt* a b *et* d e *dati. quia enim* a b c *est datus ad* e, *detractoque ab eo dato numero* a c *et alteri dato addito, qui est* d f, *fit* d e f *ad* b *datus per premissum operacionem.*

Verbi gracia minori detrahatur IIII, et alii additis duobus sit totum maioris duplum residuo alterius, atque minori additis tribus et maiori demptis IIII sit totum residuo sexquitercium. per operacionem ergo premisse totum minoris erit XVI, et maioris residuum XII: maius ergo XVI et minus XII non equales.

Die von **Treutlein** angegebenen Theilungen in 4 Bücher finden durch unsere Handschrift Bestätigung. So reicht Buch 1 bis Propos. 29, Buch 3 beginnt mit Propos. 58, endlich fängt Buch 4 mit der Propos. 81 an. Sämmtliche Anfänge sind durch grössere Anfangsbuchstaben ausgezeichnet. Auf das „*liber datorum Jordanj Nemorarij*“ (so steht von **Thaw**'s Hand auf dem ersten Blatte) werde ich binnen kurzem anderswo zurückkommen.

35. Blatt 243ᵃ—249ᵇ: „*liber jordani de ponderibus*“, dazu von **Thaw**'s Hand: „*hic multo plures ... et proposiciones quàm in editione*

Appianj V. T.", das durch Punkte Angedeutete ist durch den Buchbinder weggeschnitten. Enthält zunächst Alles, was Nr. 21 umfasst, und dann noch Dasjenige, was in der Tartaglia'schen Ausgabe gedruckt ist. Beginnt: „*Omnis ponderosi motum esse ad medium*" und hat ausser den Erklärungen 44 gezählte Sätze. Es schliesst: „*quia motum plus impedit totoque conatu impulsum habebit trahere* b *explicit*".

36. Blatt 250^a—271^b: die Perspectiva Communis des Johannes Peckham. Thaw betitelt das Stück so: „*vulgò perspectiva communis Ioannis Pisani angli edita est et schematibus illustrata Lipsiae anno* 1504 *à M. Andrea Alexandro math profess*". Man sehe darüber meine Abhandlung im Band XIII dieser Zeitschrift, wo ich weitläufig über das Exemplar der Gymnasialbibliothek zu Thorn gehandelt habe. Das Werk zerfällt in drei Bücher, welche jedoch von unserer vorliegenden Handschrift nicht unterschieden werden. Die sonst in den Handschriften und Ausgaben beigefügten Figuren fehlen.

37. Blatt 272^a—274^b, Zeile 9. Von Thaw's Hand betitelt: „*De Insidentibus aquae: scripsit et Archimedes de insidentibus aquae et reperitur Coloniae.*" Darnach muss also zur Zeit Thaw's, d. h. am Ende des XVI. Jahrhunderts, in Köln ein Exemplar jenes jetzt verlorenen Tractats des Archimedes existirt haben. Vielleicht lässt dieser Fingerzeig noch einmal jenes wichtige Buch zum Vorschein kommen. Das hier vorliegende Stück ist nicht mit dem Archimedischen identisch. Es beginnt: „*Quoniam per raritatem* (d. h. Dünnheit) *quorundam corporum composicionem non potuit eorundem per geometriam haberi certa proporcio*" und schliesst: „*patet propositum per premissum*". Die Abhandlung ist sehr interessant und verdiente wohl der Vergessenheit entrissen zu werden. Ohne Figuren.

38. Blatt 274^b, Zeile 10 bis 275^a, Zeile 27: Drei Sätze über specielle Arten von Spiegeln, nämlich: 1) *Preparacio speculi in quo uideas alterius ymaginem et non tuam.* 2) *Preparacio duorum speculorum in quibus uideas formam unam uenientem et recedentem.* 3) *Quomodo fiat speculum in quo cum aspiciens mouerit unam parcium suarum mouebit forma illam eandem partem ut dextra cum dextra.* Ohne Figuren.

39. Blatt 275^a, Zeile 28 bis 278^a. Das letzte Stück der Handschrift: „*liber de speculis comburentibus*" in Cod. Basil. F. II. 33, betitelt: „*de speculis comburentibus vel de seccione Mukesi*", von Schnorr, ich weiss nicht weshalb, dem Archimedes zugeschrieben. Wahrscheinlich gehört es dem *Tideus filius Theodori*, wie ich schon früher in dieser Zeitschrift auseinandersetzte (Band XIX, Seite 95—96). Beginnt: „*De subtiliori parte quod geometre adinuenerunt.*" Wie schon das Wort *Mukesi* zeigt, aus dem Arabischen stammend. Es endigt, wie *Codex Dresd. Db.* 85, welcher dasselbe Werk enthält, zeigt, im vorliegenden Manuscripte unvollständig mit den Worten: „*super quam linee posite sunt protracte ad dyametrum secundum ordinem*". Figuren fehlen. Die *Sectio Mukesi* muss

dem Sinne nach die Parabel sein. Es handelt sich also um parabolische Brennspiegel.

Von den oben angegebenen 39, resp. 38 verschiedenen Stücken habe ich mir die wichtigsten abgeschrieben und beabsichtige dieselben gelegentlich *publici iuris* zu machen. Vor allen die vier Bücher *de triangulis* des Jordanus, welche von hohem Interesse sind, wie alle Stücke, welche diesem hervorragenden Mathematiker angehören. Die Fassung des Fragments *de graui et leui* Euklid's habe ich Herrn Heiberg in Kopenhagen zur Benutzung bei seiner Euklid-Ausgabe zugehen lassen.

Während das obenerwähnte Inhaltsverzeichniss 24 Stücke aufführt, bei Schnorr 26 namentlich erwähnt werden, enthält die Handschrift, wie wir gesehen haben, 38 solcher Stücke. Indem ich hier zum Schluss noch der Direction der öffentlichen Bibliothek zu Dresden für die grosse Liberalität meinen ergebensten Dank sage, mit welcher sie mir die Handschrift, sowie einige andere, von denen ich vielleicht später handeln werde, für längere Zeit leihweise überlassen hat, nehme ich vorläufig von dem geneigten Leser Abschied.

Thorn, 5. October 1882.

Nachschrift vom 2. December 1882.

Einer freundlichen Mittheilung Heiberg's entnehme ich, dass das British Museum ebenfalls eine Handschrift des *liber de uisu* Euklid's mit beiden Uebersetzungen neben einander besitzt. Die Handschrift von Archimedes *de insidentibus aquae*, welche Thaw erwähnt, dürfte wohl lateinisch gewesen sein und mit der des Tartaglia verwandt, da nach neuerlichen Untersuchungen Heiberg's Tartaglia sicherlich keinen griechischen Codex, sondern eine alte lateinische Uebersetzung benutzte. Die Abhandlung *de insidentibus aquae* unserer Handschrift scheint ein integrirender Theil des Buches *de graui et leui* Euklid's zu sein, da die drei letzten Sätze desselben mit den drei letzten Sätzen jenes Fragments genau übereinstimmen.

Die Handschrift *Db.* 85 der Dresdner Bibliothek enthält den *liber de speculis comburentibus* vollständig und mit den betreffenden Figuren, wie mir Herr Hofrath Dr. Förstemann so gütig war mitzutheilen.

Recensionen.

Die Geschichte der Physik in ihren Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte von Dr. FERD. ROSENBERGER. Erster Theil. Geschichte der Physik im Alterthum und im Mittelalter. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1882. 175 S.

Ein „tiefgefühltes Bedürfniss" brauchte durch das vorliegende Buch insofern nicht befriedigt zu werden, als wir Poggendorff's „Geschichte der Physik", ein bei manchen Mängeln doch höchst verdienstliches Werk, seit einigen Jahren besitzen. Immerhin war im Interesse der Studirenden, denen Poggendorff viel zu viel bietet, ein populäres, die Entwickelung der Naturlehre in ihren Grundzügen schilderndes Lehrbuch gewiss erwünscht, und so bringt uns denn das Jahr 1882 gleich zwei literarische Gaben dieser Art, nämlich ausser dem Rosenberger'schen ein denselben Titel führendes Compendium von Professor Heller in Budapest, welches demnächst im Verlage der F. Enke'schen Buchhandlung zu Stuttgart erscheinen wird. Die allgemeine Anlage des Buches von Herrn Rosenberger können wir nur billigen. Die Detailschilderung der den einzelnen geschichtlichen Perioden eigenthümlichen Leistungen wird eingeleitet und abgeschlossen durch kürzere zusammenfassende Abschnitte, in welchen ein Gesammtbild des Zeitraumes gegeben wird; die Orientirung in der Schrift wird durch den gesperrten Druck bemerkenswerther Stellen und durch ein genaues Inhaltsverzeichniss wesentlich erleichtert, die synchronistischen Tafeln, deren Anfertigung dem Verfasser durch Cantor's grosses Geschichtswerk verhältnissmässig bequem gemacht ward, gewähren eine gute Uebersicht über die Hauptmomente. Auch der Styl ist im Ganzen* klar und fliessend, die Darstellung eine leichtfassliche.

Leider jedoch müssen wir eingestehen, dass unsere Anerkennung mit diesen mehr auf die äussere und redactionelle Form sich beziehenden

---

* Allerdings läuft auch hier manche Flüchtigkeit mit unter; so sollte z. B. der folgende Satz (S. 50) nicht vorkommen dürfen: „Merkwürdig erscheint hier, dass unserem philosophisch gebildeten Damianus der Widerspruch zwischen einer momentanen und einer so schnell als möglichen Fortpflanzung des Lichtes nicht auffällt." In diesen Worten liegt unseres Erachtens ein entschiedener Verstoss gegen unsere Sprache.

Bemerkungen so ziemlich zu Ende ist, dass wir über den eigentlichen Inhalt durchaus kein gleich günstiges Urtheil zu fällen vermögen. Eigentliche Studien in den Quellen hat der Verfasser offenbar nicht gemacht; das würde am Ende nicht viel zu sagen haben, wenn er sich dafür bemüht hätte, die vorhandene Literatur über Geschichte der Physik um so gründlicher durchzuarbeiten, und dass dies wenigstens lange nicht genügend sorgfältig geschehen ist, daraus machen wir dem Verfasser einen entschiedenen Vorwurf. In der Vorrede zählt derselbe die Werke auf, denen er in der Hauptsache gefolgt ist; an manche diese Vorlagen hat er sich nur gar zu treu gehalten, namentlich an die für ihre Zeit freilich mustergiltige „Geschichte der inductiven Wissenschaften“ von Whewell, die denn doch heutzutage namentlich in ihren auf das Alterthum sich beziehenden Theilen selbst vollständig veraltet ist. Von Fachzeitschriften scheinen, wenigstens den Citaten zufolge, nur das Journal der orientalischen Gesellschaft Amerikas und Poggendorff's „Annalen“ benützt worden zu sein, wogegen diese Zeitschrift (von einer Ausnahme abgesehen) und Boncompagni's Bullettino, diese unerschöpfliche Fundgrube für die Geschichte der exacten Wissenschaften, dem Verfasser geradezu unbekannt geblieben zu sein scheinen. Des Ferneren ist die oft recht unvollständige Citationsweise zu tadeln; wenn z. B. auf Seite 72 gesagt wird, Cantor gebe in seinen „Vorl. z. Gesch. d. Math.“ an, dass der Chemiker und Mathematiker Geber nicht die nämliche Person seien, warum wird denn nicht auch dazu gesetzt, dass diese Angabe auf Seite 619 zu finden ist? Lieber keine Citate, als solche, die nur den Schein einer thatsächlich gar nicht vorhandenen Genauigkeit erwecken. Dies hängt jedoch damit zusammen, dass der Verfasser die Aufgabe, welche einem Historiker der Wissenschaftsgeschichte heutzutage obliegt, wie wir glauben, zu leicht genommen hat.

Dass dem in der That so sei, haben wir nunmehr im Einzelnen zu begründen, wobei wir jedoch gleich bemerken, dass unsere Aufzählung durchaus keinen Anspruch auf absolute Vollständigkeit erheben will. Unsere erste Bemerkung gilt dem, was über die mechanischen Probleme des Aristoteles gesagt ist. Dieselben sind dem Verfasser offenbar blos aus der nichts weniger als unparteiischen Darstellung Whewell's, nicht aber durch Autopsie bekannt; hätte er Poselger's deutsche Bearbeitung derselben, die ja gegenwärtig in Rühlmann's handlicher Ausgabe Jedermann zugänglich ist, zu Rathe gezogen, so würde er die Ueberzeugung gewonnen haben, dass jene Arbeit, in welcher bewusst von einem Specialfall des Kräfteparallelogrammes Gebrauch gemacht wird, eine in ihrer Zeit treffliche Leistung war. Die zwei Seiten fassende reflectirende Schlussbetrachtung dieses Abschnittes, die ganz vergisst, dass eine experimentelle Methode doch nicht mit einem Schlage und ohne alle Vorstufen entstehen konnte, würde dann vielleicht

weggeblieben sein. S. 31 wird die Katoptrik des Euklid als ein echtes Werk desselben behandelt, während doch schon lange, ehe kürzlich Heiberg den wirklichen Nachweis der Unechtheit erbrachte, die letztere Ansicht in Fachkreisen die allgemein verbreitete war. Der wirklich hervorragendste Experimentator des Alterthums, Heron Alexandrinus, kommt (S. 40) ungleich schlechter weg, als er es verdient; den „Heronsball“, der ihm hier zugeschrieben wird, hat er in Wirklichkeit gar nicht erfunden, wohl aber einen Heliostaten, einen von der Neuzeit wieder hervorgesuchten Apparat zur Hervorbringung theatralischer Geistererscheinungen, eine Lampe mit Selbstregulirung und dergl. mehr — lauter Dinge, die uns im Buche verschwiegen werden und die doch gewiss das überall geäusserte Bedauern, dass es den Alten so ganz und gar an physikalischem Geschick gefehlt habe, erheblich abzuschwächen geeignet sind. Wer den kurzen Abschnitt über Seneca (S. 45) liest und den Dingen sonst ferner steht, der muss wohl oder übel glauben, dass die naturwissenschaftlichen Betrachtungen dieses Philosophen, selbst unter dem Gesichtswinkel ihrer Zeit betrachtet, gar keinen sonderlichen Werth gehabt haben. Und nun vergleiche man damit die zwei schönen Abhandlungen von A. Nehring* (Wolfenbüttel 1873, 1876), in welchen die eminent tief eindringende Forschungsarbeit des römischen Gelehrten auf dem Felde der physikalischen oder dynamischen Geologie Jedermann vor Augen gestellt wird! Wenn (S. 57) mit Recht der mechanischen Abtheilung in des Pappus berühmtem Werke gedacht wird, so hätte doch auch das letztere in der Ausgabe von Hultsch nachgeschlagen werden sollen, und ein Blick auf das erste Blatt würde gelehrt haben, dass der Titel nicht, wie hier angegeben, *μαθηματικαὶ συναγωγαί*, sondern, im Singular, *συναγωγή* war. Die Periode der Kirchenväter ist durch den einzigen Lactantius vertreten, den schlechtesten Repräsentanten der patristischen Naturwissenschaft, den man füglich auftreiben konnte, während doch in dem vom Verfasser gar nicht berücksichtigten Werke Zoeckler's** eine Fülle verwerthbaren Materials zur Hand gewesen wäre. Darf ein Historiker, der doch sonst mit ganz berechtigter Vorliebe den ersten Anfängen experimenteller Methodik nachzuspüren bestrebt ist, den Umstand unerwähnt lassen, dass einer der Väter, Gregor von Nazianz, die Entstehung des Kosmos aus dem Chaos durch einen Versuch erklären zu können denkt?

Das von den Arabern handelnde Capitel ist zweifellos das beste im Buche, da für dasselbe die Forschungen von Khanikoff und Eilhard

---

* Damals Oberlehrer in Wolfenbüttel, jetzt Professor an der landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

** Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, I. Abtheil. Gütersloh 1877.

Wiedemann benützt werden konnten und auch wirklich benützt worden sind. Da jedoch der Verfasser sonst bei jeder Gelegenheit auch astronomische Entdeckungen namhaft macht, so ist Ignorirung der mancherlei Versuche zu rügen, welche von arabischer Seite gemacht wurden, um die Alleinherrschaft der ptolemaeischen Weltanschauung zu beseitigen.* Unverhältnissmässig minderwerthiger ist das Capitel gerathen, welches sich mit den Scholastikern beschäftigt. Es unterliegt ja gar keinem Zweifel, dass diese Männer hervorragende Naturforscher in unserem Sinne weder waren, noch auch sein wollten, allein wenn der Verfasser sich, statt über die verunglückte Naturphilosophie der Scholastiker zu philosophiren, in deren Werken ein wenig umgesehen hätte, so würde er gewiss zu günstigeren Resultaten gelangt sein; möge er sich Werner's ausgezeichnete Monographie über Wilhelm von Conches (Wien 1874) und Fellner's „Albertus Magnus als Botaniker" (Wien 1881) zum Studium empfohlen sein lassen. Die Auslassungen des Nicolaus Cusanus über die Erdbewegung findet der Verfasser „recht dunkel"; der Berichterstatter hat das nicht finden können, wenigstens nicht in dem Grade, dass nicht eine vollkommen zufriedenstellende Interpretation jener Stelle möglich wäre. Auch davon ist keine Rede, dass dem Cusaner die Erfindung des ersten selbstthätigen Seetiefenmessers zu danken ist. Ganz besonders bedauerlich und gar nicht zu entschuldigen ist der S. 110 geleistete Satz: „Kopernicus** war noch ein Zeitgenosse und sogar noch ein directer Schüler des Peurbach." Wer eine Geschichte der Physik schreibt, müsste denn doch wissen, dass Peurbach im Jahre 1461 gestorben, Coppernic dagegen 1473 geboren ist!

Die Mittheilungen über das gegenseitige Verhältniss der beiden Mathematiker Cardanus und Tartaglia (S. 122ff.) entsprechen durchaus nicht den für diesen Theil der Geschichte der Algebra massgebenden Forschungen von Gherardi. Tycho Brahe ist (S. 134) natürlich noch mit dem in der Geschichte Dänemarks unerhörten Adelsprädicate „de" ausgerüstet. Da dem Verfasser vielfach die Einsicht in den geschichtlichen Zusammenhang abgeht, so fällt sein Urtheil häufig ungünstiger

* Vgl. d. Ref. „Studien z. Gesch. d. math. u. phys. Geogr.", 2. Heft, Halle 1877.

** Diese Schreibart des Namens unseres grossen Landsmannes ist völlig antiquirt durch die aufopfernden und leider viel zu wenig gewürdigten Nachforschungen Maximilian Curtze's in Thorn, durch welche zur Evidenz gebracht ist, dass „Coppernicus" geschrieben werden muss. Curtze's Arbeiten scheinen Herrn Rosenberger überhaupt, zum Nachtheile für sein Werk, durchaus unbekannt geblieben zu sein, sonst würde nicht wieder (S. 102) „Vitello, ein sonst unbekannter Mönch" auftreten. Möchte doch endlich in weiteren Kreisen Das Eingang finden, was Curtze's Pfadfindungstalent über Wilhelm von Mörbeke und den Thuringopolonus Witelo — denn so und nicht Vitello schrieb er sich wirklich — zu Tage gefördert hat (Bull. di bibl. e di storia delle scienze mat. e fis., Tomo IV., S. 49ff.)!

aus, als es den Umständen angemessen erscheint. So hat er z. B. (S. 138) den herbsten Tadel für Porta, weil derselbe ein Verfahren angegeben habe, mittelst des Magneten die eheliche Treue einer Frau zu prüfen; hätte er aber gewusst, dass dieses Verfahren bis in das früheste Mittelalter zurückreicht, so würde er es dem neapolitanischen Physiker minder verargen, ein wenn auch unsinniges, so doch durch das Alter geheiligtes Experiment von Neuem aufzutischen. Die gründlichen Specialschriften über den Magnetismus im Alterthum von Henri Martin und Palm sind dem Verfasser eben auch unglücklicherweise entgangen, doch sind wir ihm wenigstens dafür dankbar, dass er nicht auch den alten Petrus Adsigerius hat wieder aufleben lassen, an dessen Existenz Poggendorff (S. 270 seines Geschichtswerkes) unbegreiflicherweise noch festhält. Zum Schlusse sei noch die Behauptung berichtigt, durch sein „Mysterium cosmographicum“ sei Kepler bei den Theologen in Ungnade gefallen (S. 145). Das war er schon viel früher, und dass die Württemberger den jungen Gelehrten ins Ausland ziehen liessen, hatte eben wesentlich seine Ursache in dem begründeten Zweifel an Kepler's Orthodoxie.

Möge es genug sein mit diesen Ausstellungen, welche, wie schon bemerkt, noch wesentlich vermehrt werden könnten. Herr Rosenberger stellt zwei Folgebände seines Werkes in Aussicht, falls das Urtheil über den ersten Theil nicht allzu ungünstig ausfallen sollte. Wir wünschten nicht, dass diese unsere Kritik einen abschreckenden Einfluss auf den Verfasser ausübe, oder, besser gesagt, wir wünschten dies nur dann, wenn derselbe seine Arbeit ganz im gleichen Geiste fortzuführen gedenkt, wie er sie begann. Dass er gute Eigenschaften für seine Aufgabe mitbringt, haben wir oben bereits gerne anerkannt; wenn er also dem zweiten Bande ein paar Jahre gründlicher Detailstudien vorausgehen lässt, so glauben wir dem Gesammtwerke immer noch ein gutes Prognostikon stellen zu dürfen. Und einen solchen Erfolg wünschen wir dem Verfasser aufrichtig, da wir sein redliches Streben wohl würdigen und nur den Mangel an Schulung zu beklagen hatten, der diesmal vielfach so störend hervorgetreten ist. Die Ausstattung ist die bekannte treffliche, der Druck correct; S. 78, Z. 1 v. u. dürfte 680 statt 480 zu lesen sein.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit von August Heller, Professor in Budapest. 1. Band: Von Aristoteles bis Galilei. Stuttgart, Verlag von Ferdinand Enke. 1882. XII. 411 S.

Dieses neue Werk über Geschichte der Naturlehre, von dessen Erscheinen in der vorhergehenden Anzeige als nahe bevorstehend gesprochen wurde, ist dem Rosenberger'schen so rasch nachgefolgt,

dass auch unsere Besprechung sich unmittelbar an die des letzteren anschliessen kann, woraus naturgemäss der Vortheil sich ergiebt, der mit vergleichender Thätigkeit verbunden zu sein pflegt. Sollen wir gleich zu Anfang ein Urtheil darüber abgeben, welcher von beiden Schriftstellern dem Ideal, welches uns bezüglich einer diesen Namen voll und ganz verdienenden Entwickelungsgeschichte der Physik vorschwebt, am meisten sich genähert habe, so kann für uns kein Zweifel obwalten, dass dem Heller'schen Buche dies viel mehr geglückt ist, als seinem Concurrenten, obgleich an Leichtigkeit der Schreibart und Uebersichtlichkeit der Darstellung wieder Rosenberger manche Vorzüge bietet. Herr Heller steht eben, das ist nicht zu verkennen, mit den Thatsachen auf einem weit besseren Fusse, und seine Schrift, obwohl bedeutend umfänglicher, ist wesentlich correcter gehalten. Freilich haben wir auch an ihr mehrfache nicht unerhebliche Ausstellungen zu machen, die wir eingehend zu begründen gedenken, sobald wir erst im Allgemeinen den Gang des Verfassers skizzirt und durch eine Inhaltsübersicht den Leser in den Stand gesetzt haben werden, uns auch bei der Erörterung von Einzelfragen zu folgen.

Einer Einleitung allgemeinen Charakters reihen sich zunächst Betrachtungen an über die ältere Naturphilosophie, wobei Philolaus, Demokrit und die Eleaten besonders berücksichtigt werden. Sehr ausführlich wird die platonische Schule — insbesondere das kosmische System des Meisters — abgehandelt. Dann kommt Aristoteles an die Reihe, dessen Arbeiten, dem Titel des Buches entsprechend, ein beträchtlicher Platz eingeräumt wird. Gleichfalls sehr umfänglich sind die den einzelnen griechischen Mathematikern und Astronomen eingeräumten Abschnitte. In einem „Rückblick“ wird gezeigt, wie sich allmälig systematische Ansichten über den Bau der Welten ausbildeten, wie durch Euklid, Kleomedes u. a. die Anfänge der Optik, durch Pythagoras und Aristoteles die Anfänge einer wissenschaftlichen Akustik entstanden, wie sich auch einzelne empirische Kenntnisse vom magnetischen und elektrischen Verhalten der Körper ausbreiteten, wogegen die Lehre von der Wärme noch vollständig in den Windeln verblieb. Zum Mittelalter sich wendend, geht der Verfasser über die Araber ziemlich rasch, wohl allzurasch hinweg, indem er nur Geber, Alhazen und Albategnius einer etwas genaueren Beachtung würdigt, und beginnt die Reihe der abendländischen Naturforscher mit Rhabanus Maurus. Von den Vertretern der Scholastik werden zwei, Albert der Grosse und Roger Bacon, in besonderen Abschnitten vorgeführt, während der Rest der mittelalterlichen Physikgeschichte — Vitellio, Peckham, Theodorich, Erfindung der Magnetnadel und der Brillen — ziemlich cursorisch abgemacht wird. Recht eingehend ist dagegen wieder die Würdigung, welche Nicolaus Cusanus und Lionardo da Vinci erfahren. So-

dann folgt noch ein kurzer Abschnitt über Maurolycus, mit welchem das zweite Buch abschliesst. Das dritte, von der Neuzeit handelnd, ist fast noch mehr rein biographischen Charakters; Coppernicus, Brahe, Kepler, Porta, Antonio de Dominis, Baco von Verulam werden in grösseren, Ramus, Paracelsus, Cardan, Tartaglia, Telesius, Patrizius, Bruno, Campanella, Benedetti, der Marchese del Monte, Stevin, Scheiner und Fracastor in kleineren Abschnitten bezüglich ihrer Lebensverhältnisse und Leistungen gekennzeichnet. Das lange Schlusscapitel ist, womit wir vollkommen einverstanden sind, ausschliesslich durch Galilei und seine Epoche ausgefüllt, denn diesem Manne verdankt ja doch schliesslich fast allein die Naturwissenschaft die Directiven, deren Befolgung ihr zu so ungeahnten Erfolgen verholfen hat. Eine „Schlussbetrachtung" führt diesen Gedanken, dem wir hier kurz Ausdruck zu verleihen suchten, weiter aus.

Es wird wohl hier schon der richtige Ort sein, die schriftstellerischen Principien, von welchen der Verfasser offenbar ausgegangen ist, und die er auch ganz consequent zur Durchführung gebracht hat, kritisch zu beleuchten. Der Berichterstatter will mit seiner offenen Erklärung nicht zurückhalten, dass er mit diesen Principien nicht durchaus übereinstimmt, und zwar sind es wesentlich zwei, wie ihm scheint, gewichtige Einwürfe, welche man dagegen erheben kann. Erstlich nämlich ist das Heller'sche Werk keine Geschichte der Physik, sondern lediglich eine Geschichte der Physiker. Wir möchten in einem solchen Buche allerdings die biographischen Nachweisungen keineswegs vermissen, wir wollen dieselben auch nicht etwa unter den Strich verwiesen haben, allein, wenn man dieselben einmal in den eigentlichen Text aufnimmt, so wünschen wir denselben doch keine so hervorragende Stellung eingeräumt, wie es hier geschehen ist. Rudolf Wolf in seiner „Geschichte der Astronomie" scheint uns auch nach dieser Seite hin das mustergiltige Beispiel gegeben zu haben. Durch dergleichen an sich wohl interessante, aber mit dem eigentlichen Arbeitsziel doch nur in oberflächlicher Beziehung stehende Notizen wird aber die Gesammtübersicht erheblich erschwert, und hauptsächlich diesem Umstande möchten wir es zuschreiben, dass es gewiss eine schwierige Sache bleibt, lediglich aus der Vorlage, wenn nicht die Feder des Lesers selbst tüchtig nachhilft, ein treues Bild von dem allmäligen Fortgang der einzelnen physikalischen Disciplinen, wie auch von der Erstarkung des inductiven Forschungsgedankens an sich, zu erhalten. Es soll gewiss nicht behauptet werden, dass Poggendorff's posthume Vorlesungen sich von dem hier gerügten Fehler, die Persönlichkeiten gegen die Sache selbst zu sehr in den Vordergrund treten zu lassen, gänzlich frei gehalten hätten, allein dem Zwecke der Aneignung geschichtlichen Wissens scheinen sie uns doch noch immer am besten zu dienen. Das zweite Bedenken, das wir gegen den Plan unseres

Recensionsobjectes geltend zu machen haben, besteht darin, dass unseres Erachtens viel zu viel einer Geschichte der Physik ganz fremde Dinge mit beigezogen wurden, durch deren Ausscheidung das Volumen dieses ersten Bandes beträchtlich herabgedrückt werden konnte. Man könnte mit einigem Rechte von einer „Geschichte der Physik und Astronomie“ sprechen, denn diese letztere wiegt stellenweise in einer Weise vor, dass sie die eigentliche Experimentalphysik und Naturphilosophie gänzlich zurückdrängt. Würde es sich um die allerneueste Zeit handeln, so könnte man sich mit einer solchen Vermischung beider Wissenschaften eher einverstanden erklären, denn die moderne Sternkunde ist im Wesentlichen nichts Anderes, als eine Mechanik des Himmels, allein für die Zeiten, welche uns im vorliegenden Falle beschäftigen, war doch das Verhältniss ein ganz anderes. So behaupten wir geradezu, dass von den neun Seiten, die Herr Heller auf Ptolemäus wendete, sieben ohne Nachtheil hätten fortfallen können, dass der Cusaner viel zu gut weggekommen ist, dass Coppernicus auf 1—2 Seiten genügend gründlich abgehandelt worden wäre, dass endlich Tycho Brahe in einer Geschichte der Physik überhaupt ganz und gar nichts zu thun hat. Denn von seinen chemischen Untersuchungen ist uns leider gar nichts überliefert, und dafür, dass seine Verfeinerung der astronomischen Beobachtungskunst auch auf die experimentelle Technik eine Rückwirkung ausgeübt habe, wird sich schwerlich ein Beweis erbringen lassen. Viel mehr Gewicht als auf Tycho, hätte eine Geschichte der Physik auf die Regeneratoren antiken mathematischen Wissens, auf Peurbach und Regiomontan, zu legen, denen doch nur knapp zwei Seiten gegönnt sind. Mindestens eben so viel Anspruch wie die Astronomie, haben aber in alter und mittlerer Zeit auf indirecte Berücksichtigung Geographie, Anatomie und beschreibende Naturwissenschaft; die Motivirung dieses vielleicht etwas kühn erscheinenden Ausspruches behält sich, da sie hier zu weit führen würde, der Referent für eine andere Gelegenheit vor.

Haben wir so bis jetzt mehr die allgemeinen Fragen berücksichtigt, so wird nunmehr auch etwas in Specialitäten eingegangen werden müssen, und zwar soll in erster Linie der angenehmen Pflicht genügt werden, diejenigen Punkte zu bezeichnen, welche uns als gut gelungen erscheinen und dazu beitragen, dem Buche des Verfassers einen gewissen Vorsprung zu sichern. Man sieht, dass sich der Letztere, ungleich mehr wie Herr Rosenberger, bemüht hat, auch die monographische Literatur auszunützen, und sein Bestreben hat häufig gute Früchte getragen. So ist erfreulich zu sehen, dass betreffs der platonischen Kosmologie die polemischen Schriften von Hocheder und Susemihl Verwendung fanden. Die physikalischen Arbeiten des Aristoteles kennt Herr Heller nicht blos aus dritter Hand, sondern aus eigener Anschauung, was an sich zwar nur natürlich genannt, gewissen anderen Vorkommnissen gegenüber

aber doch betont zu werden verdient. Auch mit dem, was Ktesibius und Heron leisteten, zeigt er sich gut vertraut, und für die Geschichte der Imponderabilien im Alterthum verwerthet er wenigstens Palm's gründliche Compilation, wenn ihm auch die freilich noch werthvolleren Abhandlungen von Henry Martin und Wilhelm Waldmann* entgingen. Die Scholastiker und ihre Eigenart des Denkens und Forschens werden unparteiisch und unter den richtigen historischen Gesichtspunkten beurtheilt; ebenso weiss auch der Verfasser die Verdienste des Cusaners, sowohl die Erfindung des Bathometers, als auch die merkwürdige Theorie der Erdrotation, richtig zu würdigen. Wohlthuend berührt die richtige Schreibart gewisser Eigennamen: Tycho Brahe (nicht de Brahe) und Coppernicus. Endlich ist der Eifer zu loben, mit dem Herr Heller sich bemüht hat, für die biographische Darstellung einzelner Capacitäten, für die er offenbar ein besonders lebhaftes Interesse empfindet, alle zugänglichen Quellen zu erschöpfen. Wir haben hiermit vornehmlich Lionardo, Kepler und Galilei im Auge, und die Schilderung dieser drei hervorragenden Männer ist denn auch recht gut gelungen.**

Diesen Lichtseiten wird nun freilich durch Schattenseiten mancherlei Art die Waage gehalten. Von der Physik der Araber z. B. bekommt man durchaus keine genügende Vorstellung, und für diese Periode bietet Rosenberger ganz unverhältnissmässig mehr Material. Da ferner Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" häufig citirt werden, so sollte man meinen, dass der Verfasser auch deren reichen Inhalt vollständig in sich aufgenommen hätte; allein damit stimmt nur schlecht Das, was über Geminus, Pappus und über die Studien Gerbert's gesagt wird. Die alte Fabel, dass derselbe sich in Cordova aufgehalten habe (S. 161), ist denn doch, sollten wir meinen, durch Cantor endgiltig aus der Welt geschafft worden. Ueber Archimedes, dessen λήμματα (hier — vielleicht nur durch einen Druckfehler — „Lemnata" genannt) der Verfasser nicht richtig aufgefasst zu haben scheint, wird eine ganze Fülle von Literatur angeführt, allein es fehlt in dem Verzeichniss die für die nächsten Jahrzehnte doch gewiss einzig massgebende Generalausgabe von Heiberg. Von einem Commentar des Theon zum Euklid (S. 108) ist den Geschichtschreibern der Mathematik nichts bekannt; nur eine alte Mythe, über deren Entstehung die neuen „literargeschichtlichen Studien" Heiberg's nachzusehen sind, wollte wissen, dass Theon die

* Der Magnetismus in der Heilkunde, Rohlfs' Archiv f. Gesch. d. Med. u. medic. Geographie, 1. Band S. 320 ff.

** Nur wäre es, was den berühmten Maler und Polyhistor betrifft, besser gewesen, wenn der Verfasser neben der Schrift von Grothe, welcher er wohl etwas zu viel Gewicht beigelegt, auch auf einen Aufsatz von M. Cantor Rücksicht genommen hätte, der in Westermann's Monatsheften erschien und die Stellung Lionardo's in der Geschichte der exacten Wissenschaften scharf bestimmt.

von Euklides beweislos hingestellten Sätze nachträglich erst mit Beweisen versehen habe. Theoretische Mechanik hat, nach dem Zeugniss des Plutarch und Anderer, schon Archytas vor Aristoteles betrieben (S. 146). Dass Alhazen und Jbn Haitham, der dem Autor zufolge (S. 168) hundert Jahre nach Ersterem lebte, in Wirklichkeit ein und dieselbe Person waren, sollte heutzutage in Fachkreisen allgemein bekannt sein. Die Ableitung des Wortes „coelum“ von getriebener Arbeit eignet nicht (S. 177) dem Rhabanus Maurus, sondern dem zweifellos besten Kenner der lateinischen Sprache im Alterthum, dem Terentius Varro. Eine der besten Erklärungen Roger Bacon's für physikalische Dinge, warum nämlich der leuchtende Mond als Scheibe und nicht blos als Lichtpunkt erscheint, ist mit Stillschweigen übergangen worden. Dass der Optiker „Vitello“ eigentlich nicht so hiess (S. 206), ist früher bereits bemerkt. Richtig ist, dass Scharpff (S. 222) einige wichtige Schriften Cusa's ins Deutsche übertragen hat, allein gerade die mathematischen und physikalischen befinden sich nicht darunter. Geradezu unbegreiflich ist, dass auch in diesem, nach wissenschaftlichem Ernst strebenden Buche (S. 255) Coppernic zum Schüler des Regiomontanus gemacht wird, der drei Jahre nach Jenes Geburt verstarb und über dessen Todesjahr man durchaus nicht so sehr im Unklaren ist, als der Verfasser (S. 257) anzunehmen geneigt ist. Mit welchem Rechte lässt sich ferner sagen (S. 259), das ptolemaeische Weltsystem habe sich einer fast zweitausendjährigen Herrschaft erfreut, während man im besten Falle 1400 Jahre rechnen kann! Die „Variation“ des Mondes hat nach Sédillot der Araber Abul Wafâ lange vor Brahe (S. 278) aufgefunden. Die euklidische Optik (S. 290) hat doch nicht die Katoptrik, die ja aller Wahrscheinlichkeit nach den Alexandriner gar nicht zum Verfasser hat, als Bestandtheil in sich begriffen. Bei den von Francis Bacon handelnden Schriften fehlt die vielleicht beste, die überhaupt über ihn geschrieben wurde: Emil Wohlwill's geistvolle Abhandlung in den „Constitut. Jahrb.“. Ob Theophrastus Paracelsus (S. 322) wirklich ganz und gar ein Kind seiner Zeit war, scheint uns zweifelhaft; wer Kerschensteiner's schönen Vortrag auf der Salzburger Naturforscherversammlung gehört oder im Druck kennen gelernt hat, wird der Ansicht zuneigen, dass jener merkwürdige Mann doch in recht vielen Dingen über dem geistigen Niveau seiner Zeitgenossen stand. Endlich müssen wir es tadeln, dass wiederum eine „Geschichte der Physik“ nur Ein Mal, ganz im Vorbeigehen (S. 209), den Namen des Mannes nennt, in welchem wir ohne Scheu einer möglichen Zurechtweisung den scharfsinnigsten Naturforscher des XIV. Jahrhunderts erblicken. Wir meinen natürlich Dante Alighieri.

Auch ein paar kleine geographische Sünden haben wir dem Verfasser vorzuhalten. Die Stadt Frauenburg liegt nicht, wie hier (S. 257)

gesagt wird, an der Weichsel, sondern ziemlich weit ab von diesem Flusse am frischen Haff. Die Frage, wo Johann Kepler das Licht der Welt erblickte, betrachtet der Verfasser (S. 281) als noch nicht endgiltig gelöst, allein wenn er auch den — für uns völlig überzeugenden — archivalischen Forschungen Gruner's nicht volle Beweiskraft zuerkennt, so durfte er doch nicht schreiben: „Kepler wurde zu Weil der Stadt bei Magstatt geboren.“ Das ist ja fast, als wollte man sagen: Budapest bei Soroksár. Man wende nicht ein, dies seien ja blos winzige Kleinigkeiten; gerade, weil solche Duodezirrthümer unendlich leicht vermieden werden konnten, muss man auf sie aufmerksam machen.

Wichtiger freilich und bedenklicher ist ein Irrthum, der sich Seite 396 findet. Man erinnert sich wohl, dass wir es Herrn Rosenberger zum Verdienst anrechneten, nicht wieder den mystischen Peter Adsigerius heraufbeschworen zu haben. Unser Schreck wird also erklärlich sein, den wir empfanden, als wir beim Durchlesen des Heller'schen Buches dieses Gespenstes, des Ahasver der Physikgeschichte, wieder ansichtig werden mussten. Das Wiederauftauchen dieses alten Irrthums möge es entschuldigen, wenn nachstehend, im Anschlusse an die treffliche Arbeit des Bahnbrechers Wenckebach, eine kurze Richtigstellung erfolgt. Während des Krieges zwischen Manfred und Karl von Anjou schrieb ein im Heere des Letzteren dienender französischer Ritter, Pierre de Maricourt, einen Brief an seinen Freund Suger, in welchem er diesem seine magnetische Entdeckung mittheilte, und aus dieser „Epistola ad Sygerum“ ward durch eine sonderbare Verketzerung der unselige Ad-Sygerius. Möge man doch endlich an competenter Stelle von diesem so überaus einfachen Thatbestande Act nehmen!

Unsere Besprechung beschliessend, glauben wir dem Verfasser die Versicherung geben zu sollen, dass nicht Tadelsucht uns die Feder geführt hat, sondern dass wir im Interesse seines Werkes und zumal des zu erwartenden zweiten Bandes eine eingehende Kritik ebenso sehr am Platze hielten, wie uns die volle Anerkennung des nicht wenigen Guten als Pflicht erschien. Dass der Verfasser nicht leichtfertig an seine schwere Aufgabe herantrat, geben wir bereitwillig zu; um so mehr würde es uns freuen, wenn er die Bemerkungen, die wir über das Buch zu machen hatten, auch wo sie blos mehr subjectiver Natur waren, bei der Fortsetzung seiner Arbeit zu verwerthen Gelegenheit nehmen möchte. — Die Austattung ist vortrefflich, der Druck sehr correct; doch wünschten wir einem solchen Buche auch Figuren beigegeben.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Carteggio Galileano inedito con note ed appendici per cura di Giuseppe Campori. Modena 1881. Fol. 644 S.

Das Werk, über welches wir hier verhältnissmässig spät uns äussern, verdient nach allen Seiten die grösste Beachtung und das eingehendste Verweilen. Hat doch Prof. Favaro im VIII. Bande der V. Serie der Verhandlungen des sogenannten Istituto veneto einen 20 Seiten starken Bericht über dasselbe veröffentlicht, ohne manche bedeutsame Punkte mehr als nur zu streifen, und so sind wir unsererseits in der Lage, um eine Entschuldigung einzukommen, nicht weil wir zu ausführlich, sondern weil wir, dem angesammelten Druckstoffe Rechnung tragend, zu kurz von den Dingen reden, welche der fast mehr als stattliche Band in sich schliesst.

Es sind nicht weniger als 661 Briefe, welche Marchese Campori theils zum ersten Male vollständig, theils (und zwar zur überwiegend grösseren Anzahl) überhaupt zum ersten Male der Oeffentlichkeit übergeben hat; 459 dieser Briefe sind nach den Originalien abgedruckt, die übrigen nach um das Ende des vorigen Jahrhunderts angefertigten Abschriften, deren Genauigkeit durch Vergleichung mit den in Florenz befindlichen Originalien nachgeprüft werden konnte. Die Briefe stellen allerdings nur die eine Hälfte eines „Briefwechsels Galilei's" dar. Es sind Briefe an ihn gerichtet oder, in sehr geringer Anzahl, auf ihn bezüglich. Die Antwortschreiben Galilei's fehlten in den sechs Bänden, Briefe, die der Hinterlassenschaft des Ritters Tosi-Galilei entstammend, durch Vermittelung des Florentiner Buchhändlers Dotti in die Hände des Marchese Campori gelangten, welcher den 1879 erworbenen Besitz so rasch verarbeitete, dass kaum zwei Jahre später er ihn zum Gemeingut der wissenschaftlichen Welt umschuf. Was aber in dieser zweijährigen Arbeit geleistet wurde, wird auch ohne eigene Einsicht in den Band unser Leser leicht ermessen können, wenn wir erwähnen, dass die wenigsten Briefe ohne Anmerkung geblieben sind, dass der Herausgeber es verstanden hat, fast alle Briefschreiber, worunter auch ziemlich unbedeutende Namen vorkommen, in ihrer Persönlichkeit und ihren Lebensschicksalen festzustellen, wozu das mühsamste Nachschlagen zahlloser Hilfswerke aller Art aus den drei letzten Jahrhunderten erforderlich war.

Mit 59 Briefen ist Sagredo vertreten, der langjährige Freund Galilei's, dem dieser ebenso wie dem anderen Freunde Salviati ein Ehrendenkmal gesetzt hat gleicher Dauer mit dem Ruhme seiner Gespräche über die beiden wichtigsten Weltsysteme, in welchen eben jene Beiden einem Simplicius gegenüber die coppernicanische Hypothese zur Geltung bringen. Man wusste, dass von 1602 bis zu Sagredo's Todesjahr 1620 der regelmässigste briefliche Verkehr zwischen ihm und Galilei stattgefunden, aber Briefe Galilei's an Sagredo waren gar nicht, Briefe Sagredo's an Galilei 26 bekannt. Die letztere Zahl ist jetzt mehr als verdreifacht, während die erstere Lücke nicht ausfüllbar

zu sein scheint. Galilei's Briefe dürften — wann und wie ist freilich durchaus unbekannt — zu Grunde gegangen sein. Der wissenschaftliche Gewinn aus den neu veröffentlichten Briefen Sagredo's ist nicht sonderlich bedeutend. Fast einzig die Versuche Sagredo's an Magneten bilden einen für die Geschichte der Physik interessanten Gegenstand derselben. Um so mehr lernen wir von den persönlichen Beziehungen der beiden Freunde kennen, welche einander, man möchte fast sagen vorzugsweise, unangenehme geschäftliche Aufträge zu geben pflegten. Galilei hatte die Aufgabe für Sagredo Handlungsdiener zu besorgen, mit denen dieser zuerst über alle Maassen zufrieden sich zeigte, bis sie hinterher als nichtsnutzig sich erwiesen; Sagredo dagegen hatte für Galilei eine Schuldforderung bei Cremonini einzutreiben. Das war derselbe Cremonini, der in Ferrara, später in Padua Philosophie lehrte und im Jahre 1611 wegen seiner Vorlesungen mit der Inquisition in eine Verwickelung gerieth, die zu der bekannten von Gherardi veröffentlichten Aufzeichnung vom 17. Mai jenes Jahres führte: „Es ist nachzusehen, ob in dem Processe des Doctor Cesare Cremonini Galilei Professor der Philosophie und Mathematik genannt worden sei.“ Das war derselbe, von welchem in den Jahren 1622 und 1623 ein Buch auf den Index gesetzt wurde, derselbe, welcher 1626 in Rom angeklagt wurde, er behaupte die Sterblichkeit der Seele und die Ewigkeit der Welt. Und dieser Freidenker war in den Banden aristotelischer Physik und ptolemäischer Astronomie so befangen, dass er sich weigerte, durch ein Fernrohr zu sehen, um die sogenannten Galilei'schen Entdeckungen durch Augenschein zu bestätigen oder zu widerlegen. (Vergl. einen Brief von Paolo Gualdo S. 47.) Von diesen eigenthümlichen, dem Charakter der Zeit keineswegs fremdartigen Widersprüchen wusste man. Unbekannt war aber bis zum Abdrucke der Briefe Sagredo's, dass ebenderselbe Cremonini von Galilei Geld geborgt hat, bei dessen Wiedererstattung er sich nicht nur im höchsten Grade saumselig erwies, sondern auch Nichts weniger als ehrenhafter Winkelzüge sich bediente, um wenigstens einen Theil der Schuld in Abrede zu stellen (S. 90, 101, 104, 106, 108, 109, 111, 122, 123, 125, 132, 133).

Ein zweiter Briefsteller, von welchen gleichfalls 59 Briefe in der Sammlung erschienen, ist Fulgenzio Micanzio. Auch er ist den Kennern der Galilei Literatur eine längst befreundete Persönlichkeit. Er war um sieben Jahre jünger als Galilei, als dessen eifriger Anhänger er sich insbesondere seit dem Erscheinen der Gespräche über die Weltsysteme bewährte. Micanzio gehörte zwar selbst einem Orden (dem der Serviten oder der Brüder von Ave Maria) an, aber diese kirchliche Stellung beeinflusste seine wissenschaftliche Parteinahme so wenig, wie die vieler anderer Freunde Galileis, des Benedictiners Benedetto Castelli, des Jesuaten Bonaventura Cavalieri, des

Olivetaners Vincenzo Renieri. Allenfalls konnte Micanzio in dem freien Venedig ungescheuter die Meinungen äussern und bethätigen, die für die Anderen ein mehr oder weniger gefährliches Herzensgeheimniss bildeten. Nur die Gefahr, welche etwa für Galilei in seiner halben Gefangenschaft in der Villa von Arcetri aus dem Erhalten ketzerischer Briefe, aus der Verbindung mit auswärtigen Gelehrten und Buchhändlern erwachsen konnte, war für Micanzio massgebend, und man muss die Geschicklichkeit in der That bewundern, mit welcher es gelang, den umfangreichen Briefwechsel Galilei's nach und von allen Orten durch Mittelpersonen bis in die höchsten Hofkreise von Florenz den Spüraugen der Feinde zu entziehen. Micanzio ist insbesondere der Vermittler des bei Elzevir erfolgten Druckes jener späteren Galilei'schen Gespräche über die Mechanik gewesen. Auch in Venedig hätte eine solche Druckgebung nicht stattfinden können, wenn auch Micanzio sich am 6. Januar 1635 noch mit dieser Hoffnung schmeichelte (S. 427). Wir wissen aus einem durch Alberi veröffentlichten Briefe ebendesselben vom 10. Februar 1635, wie die vielleicht versuchsbalber geäusserte Absicht, die Abhandlung über die schwimmenden Körper neu drucken zu lassen, an dem dortigen Inquisitionsvertreter scheiterte. „Er sagte mir, er habe einen ausdrücklichen Auftrag von Rom, der das nicht gestattete. Ich antwortete, der Auftrag werde sich auf das Werk über das copernicanische System beziehen. Nein, erwiderte er, es ist ein allgemeines Verbot *de editis omnibus et edendis*. Ich sagte: Aber wenn er das Credo oder das Paternoster drucken lassen will?" Diese Briefstelle kennzeichnet Micanzio's scherzhaften, oftmals beissend spöttischen Ton, welcher auch die neuen Briefe zu einem ergötzlichen Lesestoffe gestaltet. Wir können uns nicht versagen, aus einem Briefe vom 6. December 1636 eine Probe mitzutheilen (S. 495). „Einer aus unserem Orden, Bruder Vincentino, gab einem Schneider, seinem Freunde, den Auftrag, ihm zum Zwecke des Terminirens einen Esel zu kaufen. Er kaufte ihn. Wie nun die Zeit des Gebrauches herankam, zeigte sich Herr Esel steingallig und unfähig benutzt zu werden. Der Bruder belangte den Schneider vor den Bischof, oder besser gesagt vor den Weihbischhof, der der Bischof in der Fabel war, einen spassliebenden Mann, und dieser fragte bei der Verhandlung der Sache den Angeklagten, wessen Standes er sei. Ein Schneider, sagte dieser, und der Bruder bekräftigte es. Der Richter verurtheilte den Bruder, den Esel zu behalten, und zwar aus dem Grunde, weil er wissen musste, dass Schneider sich nicht auf Esel verstehen. Die Geschichte ist durchaus wahr; bei Gott, die Nutzanwendung ist leicht."

Wir nennen noch Bonaventura Cavalieri, won welchem 37 Briefe abgedruckt sind, aus welchen sich manche für die Geschichte der Anfänge der Infinitesimalrechnung nicht unwichtige Einzelheiten ergeben.

So gebraucht Cavalieri am 22. März 1622 die Ausdrucksweise: *tutte le linee*, *tutte le superficie* (S. 191), welche auffallender Weise in einem mehr als 12 Jahre späteren Briefe vom 19. December 1634 (S. 422) noch näher erläutert wird: „Ich nenne alle Linien einer ebenen Figur die Durchschnitte mit der Ebene, welche die Figur schneidet und sich von einem Ende zum anderen bewegt, oder von einer Tangente bis zur gegenüberliegenden Tangente.“ Wir nennen diese späte Erläuterung auffallend mit Rücksicht auf den durch eine Briefstelle vom 4. April 1626 (S. 243) bezeugten Umstand, dass Galilei selbst und zwar vor Cavalieri ähnliche Infinitesimaluntersuchungen angestellt haben muss: „Ich schreibe italienisch und gebe Ihnen davon Nachricht, damit Sie, wenn es Ihnen gut dünkt, in Bezug auf Ihre Arbeit über Indivisibilien ebenso verfahren mögen.“ Für Cavalieri's sonstige mathematische Erfindungen entnehmen wir einem Briefe von 8. April 1631 (S. 305), dass Cavalieri sich beim logarithmischen Rechnen des dekadischen Complements (*quale chiamo compimento aritmetico)* bediente, einem Briefe vom 9. September 1631 (S. 313) den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks, einem Briefe vom 12. Februar 1636 (S. 464) den Satz, dass eine Parabel einem Vierecke nur dann umschrieben werden könne, wenn dasselbe keinen einspringenden Winkel besitze und kein Parallelogramm sei.

Wir unterlassen es, die Briefe von Benedetto Castelli, von Vincenzo Renieri, den beiden oben erwähnten Galilei befreundeten Ordensgeistlichen, von den Brüdern Rinuccini und Anderen einer ähnlichen Durchmusterung zu unterbreiten, wiewohl sich denselben Mannigfaches entnehmen liesse. Wir wollen nur noch auf einige Punkte aufmerksam machen, welche die persönlichen Schicksale Galilei's betreffen. Man weiss, dass Galilei im Juni 1616 aus Rom abreiste, nachdem am 26. Februar bereits eine nach verschiedenen Ansichten verschieden verlaufende Warnung ihm ertheilt worden war, zu deren Erläuterung unter allen Umständen das Bellarmino'sche Zeugniss vom 26. Mai dient. Sagredo, welcher wohl mit die Veranlassung gab, dass Galilei sich eben letzteres Zeugniss erbat, dadurch, dass er am 23. April ihm nach Rom die Gerüchte mittheilte, welche in Venedig über gegen ihn verhängte Strafen im Umlauf waren, Sagredo macht noch am 16. Juli des gleichen Jahres dem nach Florenz zurückgekehrten Galilei (S. 102) um so eigenthümlichere, weil ganz ohne Veranlassung eingemischte Anspielungen auf eine Androhung der grossen Excommunication. Fast noch eigenthümlicher sind Anspielungen in einem anderen Briefe Sagredo's vom 28. Juli 1618 (S. 134), man müsse Gott danken, der doch zuletzt die Gerechtigkeit beschütze. Allerdings ist dabei von einem Freunde Galilei's die Rede, dessen Angelegenheiten sich brieflich nicht besprechen lassen, aber die Vermuthung liegt nahe, dieser „Freund“ sei

wohl Galilei selbst, der vielleicht in einem Briefe an Sagredo, dessen Verlust nur um so beklagenswerther erscheint, sich deutlich über die Ereignisse von 1616 ausgesprochen haben mag. Eine letzte Stelle, welche wir namhaft machen möchten, ist einem Briefe Castelli's, über die Schwierigkeiten, welche die Druckgebung der Gespräche über die Weltsysteme bedrohten, vom 16. Februar 1630 (S. 290) entnommen: „Es scheine ein höherer, härterer Widerstand *(più duro e più alto intoppo)* zu überwinden.“ Ist damit etwa an eine abgeneigte Stimmung Urban's VIII. zu denken? Wir halten es nicht für ganz unmöglich und wollen die meist dem Anhang an die uns vorliegende Briefsammlung entstammenden Gründe vorbringen, welche dafür zeugen, dass Galilei's Feinde in der That schon 1630, gleichviel ob mit oder ohne Erfolg, anfingen Urban VIII. zu umgarnen, wenn gleich unsere Beweisstücke sich erst auf eine um ein Vierteljahr spätere Periode beziehen. Am 3. Mai nämlich kam Galilei mit dem druckfertigen Manuscripte seiner Gespräche über die Weltsysteme nach Rom, um das Imprimatur zu erwirken. Im gleichen Monate melden die römischen Nachrichten (Avvisi), eine Art von Zeitungen, die in Abschriften verbreitet an bestimmten Orten gegen Bezahlung von 7 Quadrini oder einer Gazzetta (daher das Wort Gazette = Zeitung) zum Lesen für Jedermann auflagen: Galileo, der berühmte Florentiner Astrolog, sei in Rom eingetroffen; er betreibe den Druck eines Werkes, in welchem viele von den Jesuiten behauptete Lehren bekämpft würden; er habe ausserdem neben anderen politischen und die päpstliche Familie der Barberini berührenden Prophezeiungen den nahe bevorstehenden Tod des Papstes selbst vorausgesagt (S. 594). Man sieht hier die Verleumdung ihre Fäden ziehen, sieht zugleich, von welchem Schlupfwinkel aus diese sich ansetzen. Die Verleumdung war überdies nicht ungeschickt. Urban VIII. war Nichts weniger als beliebt; sein Tod wurde von Vielen gewünscht und demzufolge verkündet. Am 13. Juli 1630 wurde Orazio Morandi, General des Vallombrosanerordens, weil er den Tod des Papstes aus den Sternen gelesen haben sollte, ins Gefängniss geworfen (S. 244, Anmerkung 1) und einem Processe unterworfen, dem am 6. October der plötzliche Tod des Angeklagten ein Ende machte. Morandi stand aber in Beziehungen zu Galilei. Er hat dessen Nativität gestellt, und das nach allen Regeln der sogenannten judiciären Astrologie gefertigte Horoscop hat sich bis auf den heutigen Tag erhalten (S. 585), beiläufig bemerkt ein schlagendes Beweisstück dafür, dass von den drei Geburtsdaten, welche für Galilei angegeben werden, 15., 18., 19. Februar 1564, das erste das richtige ist. Jene Verleumdung also, wenn sie mehr als nur Verleumdung war, musste bei Urban VIII. wirken. Wirkte sie nicht gleich, so bereitete sie doch das Gemüth des reizbaren Mannes so vor, dass spätere gleich unbegründete Einflüsterungen, der Papst sei der in den Gesprächen allgemeinem Ge-

lächter preisgegebene Simplicius, um so leichter Glauben fanden. Dass übrigens Galilei so wenig wie Kepler sich den Zeitforderungen nach astrologischen Weissagungen entziehen konnte, ist durch Professor Favaro festgestellt. Haben, wiederholen wir jetzt, auch schon im Februar 1630 die Feinde Galilei's in Erwartung des ihnen drohenden Werkes, von dessen Vorbereitung man an so vielen Orten wusste, dass sie als öffentliches Geheimniss bezeichnet werden muss, bei Urban Schritte gethan, die in Castelli's Warnung nachklingen? Unsere Leser werden wohl mit uns die Möglichkeit anerkennen.

Wir schliessen hiermit unsere Anzeige, welche nicht entfernt den Anspruch erhebt, der wahrhaft bedeutenden Veröffentlichung des Marchese Campori gerecht zu werden, sondern nur die Aufmerksamkeit auf dieselbe zu lenken beabsichtigt.

Cantor.

Einleitung in die Theorie der binären Formen von F. Faà di Bruno. Mit Unterstützung von Professor M. Nöther deutsch bearbeitet von Dr. Theodor Walter. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1881.

Das Originalwerk des bekannten Verfassers mehrerer geschätzten Lehrbücher erschien 1876 fast gleichzeitig mit der zweiten Auflage des Salmon'schen Werkes über Algebra der linearen Transformationen. Während das letztere auch ternäre u. s. w. Formen in den Kreis seiner Betrachtungen zieht und einen grösseren Abschnitt den Gleichungssystemen widmet, beschäftigt sich das Bruno'sche Buch nur mit den binären Formen, die es allseitig und eingehend behandelt. Die vorliegende deutsche Bearbeitung weicht in Inhalt und Form vielfach von dem Original ab. Es sind neue Partien hinzugekommen, andere zum Theil oder ganz verändert, und überall lehnt die Darstellung nur leicht an die des Originals an. Doch ist der Hauptzweck des Verfassers, die weiteren Kreise der Studirenden für die hochentwickelte Disciplin der modernen Algebra zu interessiren, auch in der deutschen Ausgabe nicht ausser Acht gelassen worden. Die Sprache ist flüssig und dem Stoffe gut angepasst, und wenn man etwas von der Frische und Lebhaftigkeit des Originals, welche den enthusiastischen Mitarbeiter an der vorgetragenen Disciplin kennzeichnet und den trockenen Stoff mit einem gewissen Reiz umkleidet, in der Bearbeitung vermisst, so bietet sie dafür als entschiedenen Vorzug die Zusätze und Neubearbeitungen vieler Partien, die, auf eine grössere Schärfe der Beweisführung abzielend, zum Theil werthvolle neue Beiträge zu den betreffenden Capiteln enthalten und allenthalben die kritische Schärfe und

die concise Ausdrucksweise des auf dem Titel Mitgenannten erkennen lassen.

Das Werk zerfällt in sieben Abschnitte. Der erste sehr umfangreiche handelt von den symmetrischen Functionen. Zu der Literatur über den betreffenden Gegenstand wäre etwa noch ein Schriftchen von Metzler über symmetrische Functionen (Darmstadt, L. Schlapp, 1870) nachzutragen, welches auf eine Controle für Tafeln, wie sie am Ende des Buches (S. 311—314°) angefügt sind, aufmerksam macht, die darin besteht, dass die algebraische Summe aller Coefficienten in einer jeden der Tabellen 2—11 Null sein muss. — Das zweite Capitel des Originals über Resultanten und Discriminanten hat eine vollständige Umarbeitung erfahren, indem in der deutschen Ausgabe die wichtige Untersuchung über die verschiedenen Fälle des Zusammenbestehens zweier algebraischen Gleichungen auf Grund der Methode des grössten gemeinsamen Theilers vorgenommen wird, wodurch das Eingehen auf die Wurzeln der Gleichungen vermieden wird.

Der dritte Abschnitt handelt von den canonischen Gleichungsformen, der vierte von den Invarianten und den partiellen Differentialgleichungen, welchen sie genügen müssen. Dass dieselben zur Definition auch hinreichen, wird abweichend vom Original und in strenger Form bewiesen. Es folgt ein Abriss von Cayley's Untersuchung im zweiten Memoir on quantics über die Anzahl der Invarianten einer gegebenen Form von gegebenem Grade, dann eine Aufzählung der Invarianten der Formen fünfter Ordnung.

Der vierte Abschnitt ist den Covarianten gewidmet, ihren partiellen Differentialgleichungen und der Entscheidung der Frage, inwieweit die letzteren zu ihrer Definition genügen, ferner den Polarenbildungen und verwandten Processen. Die Darstellung der Covarianten in Function der Wurzeln einer gegebenen Form führt auf die Bildung von Covarianten, welche die Rolle der Sturm'schen Reste spielen. Der Paragraph über die Anzahl der Grundformen ist aus Anlass der jüngsten Untersuchungen Sylvester's in dessen American Journal weiter ausgeführt, der über die simultanen Covarianten mehrerer Formen nach den Arbeiten von Clebsch und Gordan neu bearbeitet worden. Den Schluss des fünften Abschnittes bildet die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades mittelst Invariantenbildungen; letztere im Anschluss an Clebsch's Darstellung in dessen „Theorie der binären Formen".

Es folgt ein Abschnitt über associirte Formen und die „typische Darstellung" insbesondere der Formen fünfter Ordnung nach Hermite, woran eine Betrachtung über die Transformirbarkeit zweier Formen in einander geknüpft wird; ferner ein Abschnitt über das Reciprocitätsgesetz von Hermite und Tschirnhausen's Transformation. Neu hinzu-

gekommen ist der Paragraph über die partiellen Differentialgleichungen, denen Resultante und Discriminante genügen. Es wird gezeigt, dass zur völligen Charakterisirung der Resultante ausser denjenigen partiellen Differentialgleichungen, welche ihre Covarianten- und Combinanteneigenschaft feststellen, nur noch eine der von Brioschi für die Resultante angegebenen Differentialgleichungen nöthig ist. Den Schluss des Werkes bildet ein kurzer Abriss der Symbolik, welche Clebsch und Gordan in ihren Arbeiten ausgebildet und mit so grossem Erfolg verwendet haben.

Dass in den Anwendungen die deutsche Ausgabe allenthalben die Formen sechster Ordnung ausser Betracht lässt, wo sie das Original heranzieht, hat wohl seinen Grund in den grossen Rechnungen, die mit einer zuverlässigen Aufzählung des Formensystems verbunden wären, dürfte jedoch von manchem Leser als Lücke empfunden werden. Sollten in einer späteren Auflage die Formen sechster Ordnung Berücksichtigung finden, so sei im Vorbeigehen bemerkt, dass die auf S. 249 des Originals gegebene Covariante sechster Ordnung dritter Grades einer genauen Durchsicht hinsichtlich der Zahlencoefficienten bedarf. — Zu empfehlen wäre alsdann auch ein ausführlicheres Inhaltsverzeichniss des Werkes, oder besser ein alphabetisch geordnetes Sach- und Namenregister, durch welches die bei dem enggeschlossenen Druck schwierige Orientirung im Text unterstützt wird.

Referent kann bei diesem Anlass eine Bemerkung nicht unterdrücken, die ihm der Vergleich von Original und Uebersetzung hinsichtlich der Ausstattung aufgedrängt hat.

Die Buchhandlung von Weltruf, welche die Uebersetzung verlegt hat und die durch Uebernahme von so manchem Verlagswerk mit weit beschränkterem Absatzkreis der deutschen Wissenschaft einen Dienst geleistet hat, wird über den Geschmack des Publicums hinreichend unterrichtet sein, um zu wissen, weshalb sie ihre Werke gerade in der hier vorliegenden Form ausstattet. Dies zugegeben, so gestaltet sich der Vergleich zwischen der Ausstattung des fremdländischen Werkes und des deutschen nicht gerade zu einem Compliment für den deutschen Geschmack. Allerdings beträgt der Preis der Uebersetzung nur etwa zwei Drittel von dem des Originals. Aber in Bezug auf Opulenz und Uebersichtlichkeit des Druckes — wobei die Abschnitte deutlich hervortreten sollen und die Formeln sich klar und wie ein Bild aus dem Satz hervorheben — sowie auch Qualität des Papieres muss Referent dem Original den entschiedenen Vorrang zugestehen. Sollte wirklich die Absatzfähigkeit eines deutschen Verlagswerkes durch eine mässige Erhöhung des ohnedies nicht niederen Kaufpreises zu Gunsten einer eleganteren Ausstattung — sowohl hinsichtlich des Druckes wie der etwa beizugebenden Holzschnittfiguren — wesentlich beeinflusst werden? Eine

Verlagshandlung wie die Teubner'sche könnte den Versuch schon wagen, in diesem Sinne reformirend auf den Geschmack des Publicums einzuwirken.

München, im Juni 1882. A. BRILL.

Modelle von Flächen dritter Ordnung von Dr. CARL RODENBERG, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Darmstadt. Serie VII der in der Verlagshandlung von L. Brill in Darmstadt erschienenen math. Gyps-Modelle.

Durch Herausgabe dieser vollständigen Reihe von Modellen der Flächen dritter Ordnung hat sich Herr Rodenberg alle Geometer zu grossem Danke verpflichtet, weil er ihnen einerseits dadurch ermöglicht hat, sich leicht eine klare Anschauung von allen möglichen Formen einer Fläche dritter Ordnung zu bilden, und weil er hierbei andrerseits die bei Flächen dritter Ordnung schon in allen ihren Ausartungen auftretenden Doppelpunkte von Flächen zum ersten Male vollständig modellirt hat. Um das Erste zu erreichen, musste natürlich zuerst festgesetzt werden, welche Flächen als der Form nach verschieden angesehen werden sollen. Herr R. legt demgemäss folgendes Eintheilungsprincip zu Grunde: „Man fasse alle Flächen zusammen, welche sich durch continuirliche Deformation in einander überführen lassen, ohne dass hierbei das Ueberschreiten einer Singularität oder die Aenderung etwa vorhandener Singularitäten durch höhere hindurch nothwendig werde." In dieser Weise sind die Flächen dritter Ordnung zuerst von Herrn F. Klein und später auch von Herrn R. selbst classificirt worden (Math. Annalen Bd. VI p. 551 f. und Bd. XIV p. 46 f.). Hierbei können unter dieselbe Classe gehörige Formen allerdings noch sehr verschiedene Beziehungen zum Unendlichen haben und demgemäss in ihrem Aussehen noch sehr verschieden sein. Doch können diese Unterabtheilungen durch Collineation aus einander abgeleitet werden. Aber auch in diesem Sinne konnte nicht daran gedacht werden, alle Formen zu modelliren. Herr R. ist vielmehr folgendermassen verfahren. Von Flächen ohne Knotenpunkte ist nur die sogenannte Diagonalfläche mit 27 reellen Linien dargestellt worden, welche schon früher modellirt worden ist (hierbei macht der Referent darauf aufmerksam, dass der Formator bei Bezeichnung der geraden Linien nicht mit der nöthigen Präcision verfahren ist, die Striche über den Zahlen sind vielfach gar nicht zu sehen). Sodann sind in den Modellen 2—6 Flächen mit vier conischen Knotenpunkten dargestellt, welche sich nur durch ihre Beziehung zur unendlich fernen Ebene unterscheiden. Aus diesen fünf Formen, welche der Vorstellungskraft gewissermassen als Handhabe dienen sollen, muss man sich nun alle Formen ohne Knoten dadurch hervorgehend denken, dass man die in den Knoten-

punkten zusammenstossenden conischen Theile der Fläche entweder auflöst oder zusammenzieht, so dass die Fläche in der Nähe des früheren Knotenpunktes entweder die Gestalt eines zweischaligen oder die eines einschaligen Hyperboloids erhält. Durch Reduction der dadurch etwa entstehenden eiförmigen Theile auf einen Punkt erhält man wieder Flächen mit isolirten Knotenpunkten. Ueberall, wo Knotenpunkte waren, entstehen in den Formen ohne dieselben Oeffnungen, und durch Zusammenziehen solcher Oeffnungen erhält man umgekehrt wieder Knotenpunkte. In dieser Weise werden durch Zusammenziehen von drei Oeffnungen aus der Diagonalfläche Flächen mit drei Knotenpunkten abgeleitet, welche aus denen mit vieren nicht unmittelbar abgeleitet werden können; sie sind in den Modellen 7 und 8 dargestellt, welche sich jedoch nur dadurch unterscheiden, dass in dem zweiten der Hohlraum des ersten ausgefüllt ist, und umgekehrt.

In den Modellen 9—19 sind dann die Flächen mit biplanaren und uniplanaren Knotenpunkten dargestellt. Hier haben wir, wie schon erwähnt wurde, zum ersten Male eine Veranschaulichung aller möglichen Doppelpunkte von Flächen, die sich also für biplanare und uniplanare Knotenpunkte, d. h. für solche, deren Osculationskegel in zwei Ebenen resp. eine Doppelebene ausarten, durch die Beziehungen dieser Ebenen zur Fläche unterscheiden. Die Modelle 16—19 von Flächen mit uniplanaren Knotenpunkten dürften von besonderem Interesse sein. In den Modellen 20—23 sind die geradlinigen Flächen dritter Ordnung dargestellt, nämlich in Modell 20 eine Regelfläche, deren Doppelgerade ganz auf ihr liegt, in Modell 21 dagegen eine solche, von deren Doppelgraden nur ein endliches Stück auf der Fläche liegt, dessen Endpunkte also sogenannte Pinch-points sind; in Modell 23 und 24 endlich zwei verschiedene Formen der Cayley'schen Regelfläche dritter Ordnung und dritter Classe. In den Modellen 24^a, 24^b und 25 sind die Hesse'schen Flächen vierter Ordnung von Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten dargestellt und zwar zwei verschiedene Typen derselben; Modell 24^b stellt nur einen in Modell 24^a weniger deutlich sichtbaren, würfelähnlichen Theil derselben noch einmal dar. Modell 26 endlich soll zur Orientirung des in der beigegebenen Abhandlung über das Pentaëder Gesagten dienen. In dieser Abhandlung ist ausführlich die Entstehung der verschiedenen Modelle aus einander erläutert, ausserdem angegeben, wie man sich die nicht modellirten Flächen aus den Modellen entstehend zu denken hat. In § 4 ist ferner ein für die Entstehung der verschiedenen Formen wichtiger Satz über den Zusammenhang der Knotenpunkte der Flächen dritter Ordnung mit denen ihrer Hesse'schen Fläche bewiesen. Der Referent erlaubt sich zum Schlusse noch den Wunsch auszusprechen, dass neben dieser nur für Leser der oben citirten Abhandlungen der Herren Klein und Rodenberg verständlichen und

für diese sehr erwünschten Abhandlung eine kurze, nach den Nummern der Modelle geordnete Erklärung derselben beigegeben werden möchte.

Leipzig, im Mai 1882. F. Schur.

Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome, von A. Donadt. Leipzig bei Barth. Preis: 1 Mk. 60 Pf.

Je höher im Allgemeinen seit den bahnbrechenden Untersuchungen von Riemann und Helmholtz das Interesse an den Forschungen über die Raumlehre in den Kreisen der Mathematiker geworden ist, um so mehr darf jede in dieser Hinsicht neue Erscheinung auf Beachtung und, falls sie als Fortschritt erkannt wird, auf Anerkennung rechnen. Die Referenten gestehen gern, dass sie mit diesen Gedanken an die vorliegende Schrift herangetreten sind.

Dieselbe hat im Ganzen den Umfang von 68 Seiten und zerfällt ungezwungen in vier Theile, die allerdings wohl etwas schärfer hätten äusserlich markirt sein sollen.

Der erste Theil reicht bis S. 21 und giebt eine historische Uebersicht über die betreffenden Untersuchungen, von Legendre und Lagrange ausgegangen bis zu Riemann und Helmholtz. Obgleich diese Einleitung selbstverständlich sachlich nicht Neues bringt, ja nicht einmal unseres Erachtens nach neuen Gesichtspunkten geordnet erscheint, so soll es doch keineswegs getadelt werden, dass der Verfasser, der für einen mathematisch gebildeten Leser schreibt, demselben das historische Material übersichtlich zusammenstellt.

Der zweite Theil reicht bis S. 33 und ist ausschliesslich philosophischen Inhalts. Wenn wir auf eine Besprechung desselben ausdrücklich verzichten, weil sie uns mit der Richtung dieser Zeitschrift nicht vereinbar scheint, so wollen wir doch nicht mit dem Ausspruche zurückhalten, dass wir überhaupt seiten der Philosophie wenig Förderung für die Mathematik erwarten. Doch sollen dem Leser die folgenden Sätze nicht vorenthalten werden, welche den Schluss der bezeichneten Auseinandersetzungen bilden.

„Wir sind durchaus nicht im Stande, wie Erdmann meint, den Raum zu Körpern, Flächen, Linien zu verengen, wir können höchstens Flächen und Linien als Verengungen von Körpern auffassen, denn wir können uns Flächen und Linien nur als Grenzen von Körpern, d. h. an Raumgebilden vorstellen. — Es leuchtet um so mehr ein, dass die so ausgemalte Geometrie die Geometrie unserer Anschauung ist, wenn man sich bemüht, durch Fiction von vierdimensionalen Wesen die Eigenschaften im vierdimensionalen Raume sich anschaulich vorzustellen. Helmholtz sagt: „Anschauungen, die man hat, sich wegdenken, ist leicht, aber Anschauungen, für die man kein Analogon hat, sich sinnlich

vorzustellen, ist sehr schwer.“ Dass dies nicht nur sehr schwer, sondern geradezu unmöglich ist, beweist schon Kant mit den Worten: „Wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urtheilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien, welche unsere Anschauungen einschränken und für uns allgemein giltig sind.“ Völlig rathlos stehe ich daher einer Stelle Erdmann's gegenüber, in der er sagt, dass im vierdimensionalen Raume in jedem Punkte vier auf einander senkrechte Linien construirbar sein müssen.“

Ohne auf diese eine sehr deutliche Sprache redenden Zeilen widerlegend einzugehen, bemerken wir, dass Helmholtz an der angegebenen Stelle von den Anschauungen vierdimensionaler Wesen gar nicht redet, sondern von den Anschauungen, die intelligente Wesen wie wir im sphärischen oder pseudosphärischen Raume haben würden.

Der dritte Theil der Abhandlung, S. 33 bis 61, bringt vorwiegend analytische Entwickelungen und auf diese bezügliche Bemerkungen. Es mag anerkennend hervorgehoben werden, dass Herr D. nicht, wie es sonst wohl üblich ist, der Rechnung vornehm aus dem Wege geht. Er behandelt die Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmaasses, wobei er sich auf den einfachsten Fall, die n-fache Mannigfaltigkeit, welche aus der ebenen $n+1$-fachen Mannigfaltigkeit ausgeschieden ist, beschränkt. Der Verfasser giebt die betreffenden allbekannten Entwickelungen, denen er indess die subjective Priorität vindicirt, da er dieselben ohne Kenntniss der Arbeiten von Kronecker und Beez ausgeführt habe. Wir wollen darüber mit ihm nicht rechten, jedoch mag, um einem immerhin möglichen Missverständnisse vorzubeugen, ausdrücklich bemerkt werden, dass auch da, wo Herr D., wie S. 49, Ausdrücke mit einem „finde ich“ einführt, nur bekannte Darstellungsformen gebracht werden. Neu ist lediglich ein Factor $(-1)^n$, durch welchen S. 43 Beez ausdrücklich corrigirt wird. Doch ist dieser Factor wohl nur durch Uebereilung hineingerathen, da aus den Gleichungen:

$$K = \frac{1}{H^{n+2}} \left| \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right|, \quad i, j = (1, \ldots n),$$

$$\sum_k \frac{\partial A_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial x_k}{d p_j} = D_{ij}$$

doch nur folgen kann:

$$K = \frac{1}{H^{n+2}} \cdot |D_{i,j}|.$$

Ganz unrichtig und irreführend ist die Bemerkung S. 46, „dass der Ausdruck für das Krümmungsmaass im allgemeinen Sinne sich nicht durch die Coefficienten des Linienelementes ausdrücken lasse“. Merkwürdiger Weise wird auch schon S. 48 das Resultat der Arbeit von Lipschitz, Crelle B. 81 S. 230, durch welche jene Behauptung ausdrücklich widerlegt ist, richtig mitgetheilt. Aber auch angenommen, diese

Bemerkung wäre richtig, so würde daraus doch nicht folgen, „dass für Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen die Biegbarkeit ohne Dehnung nicht möglich sei" (S. 46), sondern dass höhere Mannigfaltigkeiten, wenn überhaupt, sich nur unter Veränderung des Krümmungsmaasses deformiren lassen. Die nach dieser verwirrenden Einleitung folgenden Bemerkungen über Deformationsfähigkeit sind im Ganzen richtig; es wird aber jeden mit den einschlägigen Arbeiten vertrauten Leser eigenthümlich berühren, dass S. 49 Herr D. die Entscheidung dieser Frage selbst in die Hand nimmt und erklärt: „Auf Grund dieser Thatsachen muss „ich", Lipschitz gegenüber, Beez Recht geben, wenn er die Deformationsfähigkeit der Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung leugnet." Hätte er etwa die Bemerkungen von A. Voss gelesen, welche derselbe über den fraglichen Gegenstand in den „Math. Annalen" Bd. 16 S. 147 macht, so würde er gesehen haben, dass eine derartige Entscheidung nicht mehr erwartet wurde. Eine genaue und kurze Zusammenstellung des vorhandenen Beweismaterials wäre immerhin eine verdienstliche Arbeit gewesen; aber wem nützt es, wenn Herr D. S. 55 versichert:

„Wie ich es auf der einen Seite für falsch halte, den Untersuchungen von Riemann und Helmholtz jeden mathematischen Werth abzusprechen, wie dies u. A. Dühring und Tobias in schroffer Weise gethan haben, so kann ich ihnen doch auf der andern Seite nicht den hohen Rang einräumen, den Caspari ihnen vindicirt, wenn er sagt, sie hätten die Geometrie Euklid's als die allein seligmachende gestürzt."

Im Schlusstheile der Arbeit giebt der Verfasser S. 65 eine Definition des Raumes in drei Sätzen und leitet dann sechs Axiome „durch Anwendung der logischen Axiome" daraus ab, die aber „nur in unwesentlichen Punkten von den von Wundt gegebenen" abweichen. Zum wirklichen Aufbau der Geometrie sind noch zwei weitere nöthig, die auch ausgesprochen werden. Diesen Aufbau hat Herr D. vorläufig nicht ausgeführt, weshalb wir keine Veranlassung haben, auf diesen Theil näher einzugehen.

K. Schwering. H. Hovestadt.

Goniometrie und ebene Trigonometrie dargestellt von Dr. E. Suchsland, ordentlichem Lehrer am Gymnasium zu Stolp. Stolp i. P. 1881. Verlag von C. Schrader. 32 S. und eine Figurentafel.

In anspruchsloser Kürze tritt uns hier ein recht gutes Lehrbüchelchen gegenüber, welches durch manche Eigenthümlichkeit sich von den landläufigen Trigonometrien unterscheidet. Zunächst definirt der Verfasser die sechs bei einem rechtwinkligen Dreiecke möglichen Seitenquotienten und verwandelt sie, nachdem das Dreieck so in einen Kreis verlegt wurde, dass die Spitze des einen spitzen Winkels im Centrum, die des anderen auf der Peripherie sich befindet, in solche Brüche, deren Nenner

der gleiche ist, nämlich der Halbmesser des Kreises. Im Kreise wächst der Centriwinkel auch über die Grösse eines Rechten hinaus und giebt Anlass, die Definition der Winkelfunctionen zu erweitern, so dass die Functionen der Winkel irgend eines Quadranten auf gleichnamige Functionen, beziehungsweise auf Cofunctionen von spitzen Winkeln zurückgeführt werden. Ist sodann eine Formel, etwa die für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$, für Winkel, welche zusammen den ersten Quadranten nicht überschreiten, geometrisch bewiesen, so dient die erweiterte Definition zur allmäligen Erweiterung des Satzes. Die in dieser Weise streng behandelte Goniometrie führt bis auf Seite 22. An sie schliesst sich die Trigonometrie an, welche nach geometrischer, durch Ziehung der drei Höhen eines Dreiecks vermittelter Ableitung des Sinussatzes die weiteren Folgerungen, als Tangentensatz und dergleichen, nur durch analytische Ableitung vollzieht. Der sonst häufig in den Vordergrund gestellte Cosinussatz tritt nur anhangsweise auf.

CANTOR.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Dr. OSKAR SCHLÖMILCH, Geh. Schulrath im kgl. sächsischen Ministerium des Cultus und öffentlichen Unterrichts. Zweiter Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. III. Aufl. Leipzig 1882, bei B. G. Teubner. VII, 384 S.

Die III. Auflage des ersten Bandes dieses Uebungsbuches, Aufgaben aus der Differentialrechnung enthaltend, ist 1878 erschienen und Band XXIV, hist.-literar. Abthlg. S. 107 angezeigt. Nach vierjähriger Zwischenpause erhalten wir heute die neue Auflage des zweiten Bandes. Aufgaben aus der Integralrechnung zusammenzustellen, ist insofern misslich, als hier die Ausdehnung des Gebietes weit mehr persönlicher Willkür unterworfen ist, als dieses bei der Differentialrechnung der Fall ist. Dort wird man selten zweifelhaft sein können, ob dem Schüler der Differentialrechnung diese oder jene Aufgabe auch wirklich zugänglich ist; ganz anders bei Aufgaben der Integralrechnung. Wie weit gehört die Lehre von den bestimmten Integralen, wie weit die von der Integration der Differentialgleichungen der sogenannten Integralrechnung im engeren Sinne, d. h., deutlicher ausgesprochen, Vorlesungen über Integralrechnung an? Auf diese Frage wird fast jeder Lehrer eine andere Antwort ertheilen, und seine Schüler werden dementsprechend bald Uebungsbeispiele vermissen, bald welche für ihre Kräfte zu schwer finden. Bei unserer Vorlage möchte der letztere Fall häufiger als der erstere eintreten, indem der Verfasser einen ziemlich weit ausgedehnten Lehrgang der Integralrechnung voraussetzt.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. November bis 15. December 1882.

Periodische Schriften.

Publicationen des königl. preuss. geodätischen Instituts. Berlin, Friedberg & Mode.

Das hessische Dreiecksnetz. 12 Mk.

Das rheinische Dreiecksnetz. 3. Heft. Die Netzausgleichung. 11 Mk.

Der Einfluss der Lateralrefraction auf das Messen von Horizontalwinkeln. Von A. Fischer. 5 Mk.

Gradmessungs-Nivellement zwischen Swinemünde und Konstanz; bearbeitet von W. Seibt. 9 Mk.

Absolute Höhen der Festpunkte des Nivellements zwischen Swinemünde und Konstanz. Von W. Seibt. 1 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Abth. II, 86. Bd. 1. Heft. Wien, Gerold. 2 Mk. 40 Pf.

Annales de l'observatoire de Moscou; publiées par Th. Bredichin. Vol. 8 livr. 2. Leipzig, Voss. 6 Mk.

Observations de Pulkova, publiées par O. Struve. Vol. 13. Observations faites au cercle vertical. Leipzig, Voss. 30 Mk.

Reine Mathematik.

C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. 2. Bd., herausgeg. von K. Weierstrass. Berlin, G. Reimer. 17 Mk.

Rehorovsky, W., Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln und der Coefficientencombinationen vom Gewichte 11 und 12. Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Escherich, G. v., Ueber die Gemeinsamkeit partikulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Kantor, S., Ueber die allgemeinsten Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformation. Wien, Gerold. 2 Mk.

Henrici, J., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Leipzig, Teubner. 80 Pf.

Peschka, G., Darstellende und projective Geometrie. 1. Bd. Wien, Gerold. 18 Mk.

REUSCHLE, C., Die Deck-Elemente. Ein Beitrag zur descriptiven Geometrie. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 40 Pf.

SCHEFFLER, H., Die magischen Figuren. Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthum stammenden Problems. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Die preussische Landestriangulation. Polarcoordinaten, geographische Coordinaten und Höhen sämmtlicher trigonometrisch bestimmten Punkte. 5. Thl. Von 32° bis 34° Länge und von 53° Breite bis zur Ostsee. Berlin, Mittler. 15 Mk.

Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. 1. Abth. Die Grossenhainer Grundlinie; bearbeitet von C. BRUHNS und A. NAGEL. Berlin, Friedberg & Mode. 10 Mk.

Handbuch der nautischen Instrumente; herausgeg. vom hydrographischen Amt der kaiserl. Admiralität. Berlin, Mittler. 12 Mk.

KAJABA, J., Beitrag zur Theorie der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Polarplanimeter. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

LORBER, F., Beitrag zur Bestimmung der Constanten des Polarplanimeters. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

OPPOLZER, TH. v., Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 1. Bd. 2. Aufl. Leipzig, Engelmann. 40 Mk.

HAEUSSLER, J. W., Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie, insbesondere die mathematische Behandlung der von der Wärme geleisteten inneren Arbeiten. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

DORN, E., Beobachtungen der Erdtemperatur in verschiedenen Tiefen des botan. Gartens zu Königsberg i. Pr. Januar bis December 1878. Königsberg, Koch. 60 Pf.

MAXWELL, J. C., Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte Uebersetzung von B. WEINSTEIN. 1. Bd. Berlin, Springer. 12 Mk.

ZAHN, W. v., Untersuchungen über Contactelektricität. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

SCHELLEN, H., Der elektromagnetische Telegraph in den Hauptstadien seiner Entwickelung. 6. Aufl., bearb. v. J. KAREIS. 1. u. 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

FARADAY, M., Experimental researches in electricity. 3 Vols. Fascimile reprinted. London, Quaritch. 48 Sh.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ein Beitrag zur Lebensgeschichte des Magister Joannes de Praga.

Von

JOSEF TEIGE

in Prag.

Anlass zu dieser Arbeit hat Herr Joh. Müller durch Veröffentlichen folgenden Schreibens im „Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit“, Jahrg. 26 S. 1—2 gegeben, welches ich nach meiner eigenen Copie vervollständige. Es lautet:

„*Aeneas Sylvius Poeta Joanni Scindel singulari Astronomo viroque probatissimo.*

Reversus nunc ad Caesarem insignis miles Procopius de Rabenstein, tui meique amantissimus, retulit, quod mihi summae voluptati fuit, me tibi dilectum esse, measque literas, quas saepe ad amicos scribo, tuo judicio admodum commendari. Utrumque apud me mirum est, quid enim in me est quod a te Viro laudatissimo dilibi debeat? quid nissum epistolae meae in se habent, quod laude dignum videatur? Nihil ego unquam erga te boni operatus sum. Mores mei communes sunt, vivo ut vulgus hominum, nulla singularitas in me est, nulla praestantio, nulla virtus, quae non aliis communis sit. Epistolae meae planae sunt, apertum stilum habent, currenti calamo pictae sunt. Nihil his comissum est, quod in sermone vulgari non cadat. Non est in illis ornatus, non lepos, non gravitas. Nudae sunt et solum animi mei indices. Cur ergo me colas vel illas magnifacias, no seïo, nisi quod homines sunt quidam tanta bonitate praedicti, ut omnia commendent. Econtra vero quoque malitia tanta quorundam est, ut omnia quae vident quaeque audiunt, vituperent. Tu inter primos numerari vis et sapis certe, qui laudando potius quam vituperando vis excedere. Verum tua laus, 'quam mihi adscribis, etsi meritum excedit meum, mihi tamen jucunda est. Quis enim non potius indignam laudem quam indignum vituperium ferat? At quia laus ea demum dulcis est, quae a laudato viro procedit: magno me munere donatum arbitror, dum tuis me verbis extolli audio: sumus enim omnes cupidi laudis et ut Cicero dicit: optimus quisque cupiditate gloriae tangitur. Leniculus ille Demosthenes etiam susurro mulierculae aquam

ferentis oblectari se dicebat, dum audiret, se transeunde: Hic est ille Demosthenes qui et Senatum et Theatrum suae orationis vi moderatur. Oblector et ego, dum me tuis verbis commendari percipio, quamvis non sum is quem tu judicas. Plerique hoc vituperant vellentque potius centemni quam laudari. verum ego has laudes tuas non adjactantiam, quia mihi sum conscius. sed ad incitamenta virtutum recipio. daturus operam, ut talis sim. qualem me praedicas, ne fama, quam de me vulgo praetes. omnino sit irrita. Plura in hanc senteliam dicere possem, sed absit hoc loco disputatio, facessant argumenta. Agamus invicem, ut amicorum est. Nunquam ego te vidi neque tu me. uti arbitror, vidisti, sed tua fama facit, ut te unice observem, nam saeculi nostri praecipium decus conseris, qui et siderum cursus et futuras tempestates et pestes et steriles et fertiles annos unicus praedicere noris. Hincte amo, colo, observo, sumque tuus, nam virtus homini est, ut et quos nunquam vidimus amare non faciat. Hinc veteres illo Fabios, Scipiones, Fabricios caeterosque virtute praestantes, qui multis ante nos saeculis ritam exuerunt, etiam mortuos diligimus. Sicut fundatoris nostrae fidei vel apostolus vel martyres singulari devotione et affectu veneramur. Virtus namque sui natura amabilis est, vitium vero odibile. Tu ergo, vir praestantissime. jure a me amaris, qui tua singulari ac praestanti virtute nostrum ornas saeculum. Me, cur tu diligas, non scio, ut tamen diligere non cesses oro et observo, magnifacio namque tuum amorem et ornari me tua dilectione non ambigo. Persevera igitur, nam etsi non sum quem veris. is tamen sum, qui diligentes me reciproce diligo, totisque viribus amo.

Vale M.CCCCXLI."

Aus diesem Briefe geht wohl hervor, dass Joannes Scindel (Ssindelius, Syndelius, eigentlich aber Schindel) ein vornehmer Mathematiker seiner Zeit war, und haben wir dennoch nur einige oft lückenhafte Biographien, wie Dr. Kalina von Jättenstein's „Nachrichten über böhmische Schriftsteller und Gelehrte“ (Prag 1848) in den „Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften“, Palacký's in der „Zeitschrift des böhmischen Museum“ 1829 (böhmisch), Prochaska, „*De secularibus artium liberalium*“ u. s. w. Darum will ich in diesen Zeilen die hochverdiente Aufmerksamkeit auf diesen Gelehrten lenken und einige Beiträge zu seinem Leben liefern.

Weder die Zeit der Geburt, noch die Familie, aus der unser Schindel entstammte, sind bekannt. Nur das steht fest, dass er zu Königgrätz geboren wurde. Wir kennen mehrere Familien dieses Namens, z. B. Schindel von Eberhartz, eine mährische patrizische Familie, welche in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts in Prag erscheint, aber im XVIII. Jahrhundert erlosch; im Bunzlauer Kreise wird zum Jahre 1383 ein Wscheslaw Schindel von Nudwogenitz genannt und im „*Liber decanorum universitatis Pragensis*“ begegnen wir einem Baccalaurius Joannes Sindel de Swydenicz (zum Jahre 1386). Auch in dem der Stadt König-

grätz naben Schlesien kommen Schindel vor, welche der Schlacht mit Tartaren im Jahre 1241 beigewohnt haben, und im Jahre 1342 wird Hainz Schindel Assessor bei der gehaltenen Ritterrecht zu Schweidnitz genannt. Als sein Geburtsjahr setzt man 1370 oder 1375. Er studirte auf der Prager Universität, wo er *sub decanatu Joannis de Monsterberg* (1395) Baccalaurius wurde und *sub decanatu Danieli de Praga magister in artibus* (1399) und schon in demselben Jahre hielt er bereits Vorlesungen als Licentiat. (Monumenta hist. univers. Pragensis tom I. ad h. a.) Im Jahre 1406 erscheint er als Director der St. Niclas-Schule, aber schon im nächstfolgenden Jahre bis 1409 war er in Wien, wo er Vorlesungen über Mathematik und Astronomie hielt. (Vergl. Aschbach, Geschichte der Wiener Universität.) Ueber sein segensreiches Wirken sagt der Wiener Astronom und Leibarzt des Kaisers Maximilian I., Georg Tanstetter, in dem seiner Ausgabe „Tabulae ecclipsium Georgii Peuerbachii“ (1514) beigefügten Katalog der Wiener Mathematiker zum Jahre 1406: „*Mathematicum Gymnasii Viennensis, qui vania jucunda quidem in Astronomia elaboravit.*“ (Vergl. auch A. Kästner, Gesch. d. Mathematik Bd. I, und F. v. Zach, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Gotha, Bd. XVIII u. XIX.) Nach Prag zurückgekehrt, wurde er 1410 (von Georg bis Galli) zum Rector der Universität erwählt. Unter seinem Rectorate wurde beschlossen, die vom Erzbischof Zbyněk verlangte Verbrennung der Wiklef'schen Bücher nicht zu bewilligen. Von dieser Zeit an wirkte er fortwährend an der Prager Hochschule als *lector ordinarius*, wie dies eine von König Wenzel IV. ausgeschriebene allgemeine Steuer *(berna regalis)* beweist, gemäss welcher die Stadt Czaslau angewiesen wird, jährlich 49 Schock an den Mag. Joan Schindel, „*doctor et lector ordinarius Universitatis studii Pragensis*“, zu entrichten (Materialien zur Gesch. u. Statistik von Böhmen, ed. Riegger, IV p. 829; vergl. auch Thom. Mitis *in farrag. prim. p.* 143.) Als Blanchius, der gelehrte Astronom Italiens, „*tabulae motuum coelestium*“ an Kaiser Friedrich III. übersandte, schrieb er unter Anderem: „*Qua in re doctorum hominum correctioni et praecipue Joannis Pragensis, viri accutissimi judicio, me ipsum submitto*“. Es ist zweifellos, dass Joannes Pragensis mit unserem Schindel identisch ist, aber dieses Fehlen des Familiennamens bereitet uns grosse Schwierigkeiten im Erzählen der weiteren Geschicke. Es erscheinen nämlich in den Jahren 1440—1480 mehrere Joannes Pragensis, Joannes de Praga u. s. w. Nur das können wir bestimmt sagen, dass unser Mathematiker mit einem Priester dieses Namens, welcher in den Jahren 1420—1436 Domherr der Metropolitankirche und nach dieser Zeit der Wischegrader Collegialkirche war, verschieden ist. (Hammerschmidt, Gloria et majestas ecclesiae. Wissebradensis, *p.* 582 u. 583.) Der fleissige Sammler B. Balbin sagt, dass er auch ein Arzt und Geschichtschreiber war, was wir

ein anderes Mal erzählen wollen. Nach demselben Historiker hat er dem grossen Collegium 200 Handschriften geschenkt. Er starb um das Jahr 1450 (Dr. Sazima, Tentamen historiae medicinae. Vergl. Kalina v. Jättenstein, Nachrichten, wo das Jahr 1444 gesetzt wird.)

Recensionen.

Die Einheit der Naturkräfte und die Deutung ihrer gemeinsamen Formel. Von O. Schmitz-Dumont. Berlin, Duncker's Verlag (C. Heymans). 1881. IV u. 168 S. gr. 8°.

„Der allgemeine Vernunftinstinkt des Forschers verfolgt ein ideelles Ziel, und das heisst: möglichst wenige letzte Ursachen, wo möglich nur eine einzige" — so sagt der Verfasser gleich im ersten Abschnitte seines Buches, und indem er seinerseits diesem „ideellen Ziele" nach Kräften zustrebt, findet er es „naheliegend, nachzusehen, ob jene vielen Ursachen nicht Modificationen einer einzigen sind, und diese einzige (Ursache) nicht etwa in einer neuen phantastischen Construction zu vermuthen, sondern in der einfachsten und allgemeinsten Wirkungsweise, welche wir bis dahin beobachteten".

Die Zahl der Ursachen-Forscher ist heutzutage grösser als jemals; aber wenn man untersuchen will, was dieselben eigentlich meinen, wenn sie von „Ursachen" reden, so kommen manchmal sehr wunderliche Dinge, unklare, schwankende, widerspruchsvolle Begriffe zum Vorschein. Schäle der Leser aus obigem Text sich einmal den einfachen nackten Satz heraus, so hat er folgende Wortverbindung vor sich: Ich vermuthe die einzige Ursache (aller Naturerscheinungen) nicht etwa in einer Construction, sondern in einer Wirkungsweise — und nun mag er seinen „Vernunftinstinkt" anstrengen, um herauszufinden, was Herr Schmitz-Dumont sich hier wohl unter einer „Ursache" eigentlich gedacht haben mag.

Beim Aufsuchen obiger „einfachsten und allgemeinsten Wirkungsweise" gelangt der Verf. zu derjenigen Wechselwirkung, welche dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional ist, und entscheidet sich bezüglich der „Wahl, ob wir diese Kraft in anziehender oder abstossender Weise wirkend annehmen wollen, ganz entschieden für die Abstossung. Denn: „Hierzu führt schon die einfache Betrachtung, dass bei Anziehung allein, wie gross auch die ursprüngliche kinetische Energie der Materie sein möge, schliesslich alle Körper sich in einen

einzigen Klumpen zusammenballen müssten, womit nicht allein ein Ende der Welt prophezeit würde, was bei der grenzlosen Dauer verflossener Zeiten schon längst hätte erreicht werden müssen, sondern auch ein Widerspruch gegen das Princip von der Erhaltung der Kraft gesetzt ist."

Wir überlassen es dem Leser, über die Wucht und Tragweite dieser Behauptungen, denen der Verf. keinen besondern Beweis beigefügt hat, sich selbst ein Urtheil zu bilden, und möchten nur im Vorübergehen auf die Art und Weise aufmerksam machen, wie hier die „grenzlosen" Grössen verwerthet werden. — Obschon nun „sich der gewöhnlichen Vorstellungsweise die Meinung aufdrängt, es müssten (bei Aufstellung der Hypothese einer allgemeinen abstossenden Kraft als einzigen Urkraft) sich die Körper im Raume zerstreuen, die ganze Welt auseinanderfliegen," so hält dies, wie gesagt, den Verf. keineswegs ab, seine ganze Theorie auf diese eine Hypothese aufzubauen, und er formulirt dieselbe folgendermassen: „Es giebt nichts Anderes, als Kraftcentra von gleicher Intensität in verschiedenen Zuständen der Bewegung, welche abstossend, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung auf einander wirken." Hierbei erwähnt der Verf. auch jener „bekannten und sehr berechtigten Bedenken", aus welchen gewisse Physiker „die Idee einer fernewirkenden Kraft als unbegreiflich und unzulässig überhaupt abweisen", und vertröstet die Leser auf einen spätern Abschnitt seines Buches, in welchem dargethan werden soll, dass die von ihm benutzte fernwirkende Kraft eigentlich gar keine „Kraft in dem mit Recht angefochtenen Sinne" ist. Dasselbe Verfahren, einen Begriff vorläufig bei der Betrachtung zu Grunde zu legen, mit dem Vorbehalt, denselben später zu eliminiren, weil er nämlich „ein Nest von Widersprüchen und zugleich ganz unnöthig" sei, befolgt der Verf. auch bezüglich des „körperlichen Domicils der Kräfte". Er meint, „es könne einstweilen keinen Schaden verursachen, wenn wir der Kraft einen materiellen Aufenthaltsort gönnen"; derselbe besteht in „untheilbaren materiellen Körperchen", welche allesammt „Kugeln von gleicher Grösse sind". Diese Kugeln nun stellen die „Aetherelemente" vor, und weil sie „nach den gegebenen einfachsten Bestimmungen ebenso wirken, als wenn ihre ganze Kraft im Centrum des Kugelelementes concentrirt wäre, so werden sie schlechtweg Kraftpunkte genannt".

Nun aber fährt der Verf. fort: „Vorerst ist klar, dass zwei solche (also kugelförmige) Kraftpunkte nie zur Berührung gelangen können, weil dort ihre abstossende Kraft ∞ wird; ihre Constanz als Element ist also gesichert." Dies muss dem Leser nicht wenig auffallen; denn falls es wirklich wahr ist, was man soeben von den Kugelmittelpunkten gelesen hat, so ist gerade die Berührung ein Hinderniss des Unendlich-

werdens, weil sie „die Kraft von der Form $-\frac{1}{r^2}$", welche für abnehmendes r stetig zunimmt, augenscheinlich nöthigt, bei dem Werthe $\frac{1}{(2\varrho)^2}$ (wobei ϱ den Radius jener Kugeln bedeutet) stehen zu bleiben, und sie demnach verhindert, ins Unendliche weiter zu wachsen.

Im II. Capitel theilt der Verf. den Raum in würfelförmige Kästchen ein, setzt Kraftpunkte auf alle Würfelecken, ferner noch je einen in das Centrum der Würfel und untersucht nun die Wirkung des so arrangirten Aethers „auf je eines seiner verschobenen Elemente". Zur Vereinfachung der Rechnung construirt er sich zunächst ein Quadrat mit vier festen Kraftpunkten und stellt einen fünften, beweglichen in die Mitte. Dann verschiebt er letzteren senkrecht zu einer Quadratseite um die Strecke x und behauptet: „Die Wirkung der vier Punkte auf den um x verschobenen ist

$$\varphi_m - \varphi_\mu = \frac{1}{1+(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{2-x} - \frac{1}{1+(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{2+x}\text{“}.$$

Hierauf rechnet er für eine Reihe von Werthen der Grösse x die Werthe dieser Function aus, stellt letztere zu einer Curve zusammen, bestimmt den Nullpunkt derselben und glaubt damit „eine hinreichende Uebersicht der Bewegung eines Punktes zwischen vier quadratisch gelegenen" gegeben und dargethan zu haben, dass derselbe „eine sehr stabile Lage" besitze, weil er nämlich „stets nach dem Centrum zurückgetrieben werde, so lange er nicht über die Nulllinie verschoben worden sei".

Hiergegen ist Dreierlei zu erinnern. Erstens kann nämlich von einer „hinreichenden Uebersicht" über die Bewegung des betreffenden Punktes doch kaum die Rede sein, wenn weiter nichts als der Verlauf derjenigen Function, welche den Werth der beschleunigenden Kraft angiebt, und zwar nur für einen ganz singulären Fall, untersucht worden ist.

Zweitens ruht der Beweis der Stabilität auf höchst bedenklichen Voraussetzungen, nämlich einerseits auf der Annahme, dass die vier Ecken in den Raum unverrückbar festgeheftet sind, andererseits dass der verschobene Punkt die Nulllinie wirklich nicht überschreitet. Damit ist die Stabilität ja in die ganze Betrachtung hineinhypostasirt.

Drittens überzeugt jeder Mathematiker sich leicht, dass die obige Gleichung überhaupt falsch ist. — Ueber diesen seltsamen Fehler, der meines Wissens schon zweimal, nämlich von Lasswitz in den „Göttingischen gelehrten Anzeigen" und von Wernicke in der „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie" gerügt worden ist, sagt der Verf. selbst in einem nachträglich durch die Verlagshandlung versandten Blatte: die eigentlich an die betreffende Stelle des Buches hingehörige Gleichung sei irrthümlich ausgeblieben, und die dort sich vorfindende sei

„aus einem Mittel für verschiedene Schnitte annähernd gebildet worden“. — Hiermit ist dieselbe der mathematischen Controle natürlich entzogen.

Aber mag es sich nun auch mit der Fundirung jener Gleichung verhalten wie es will: eine Rechnung, die auf der Annahme beruht, dass gewisse regelmässig gruppirte Punkte in den Raum unbeweglich fest gezaubert seien, hört jedenfalls auf, eine genügende Basis zu bilden, sobald man auf jenen Zauber verzichtet, den Atomen ihre Beweglichkeit zurückgiebt und sie blos ihrer eigenen abstossenden Eigenschaft überlässt.

Der Verf. wendet sich in einem weitern Abschnitte seines Buches dem „Körperatom“ zu und stellt sich demselben folgendermassen gegenüber: „Da nach unserer Hypothese nur Kraftpunkte in verschiedenen Bewegungszuständen existiren, so steht uns nicht die bisher übliche bequeme Methode zu Gebote, aus harten, untheilbaren Körperchen Materie zu construiren oder willkürlich sogenannte Dynamidensysteme aufzubauen, welche Körperatome genannt werden und zu deren Constanz verschiedene neue Kräftesorten nothwendig wären. Wenn aus unseren Kraftpunkten ohne Zuhilfenahme neuer Kräfte keine constanten Gebilde construirbar sind, so taugt unsere Hypothese Nichts; diese Construction ist aber möglich.“ — Und nun kommt ein Beweis hierfür, den ich als Probe der Art, wie der Verf. „construirt“, mittheilen will.

„Hat ein Punkt des Aethers eine hinreichend grosse kinetische Energie A, um aus der Gleichgewichtslage die Nulllinie seiner nächsten Nachbarn zu überschreiten, so wird er auf seiner Bahn auch die Nulllinie jeder anderen Nachbarn überschreiten, sofern deren geometrische Lagerung dieselbe bleibt. Denn von der durchbrochenen Nulllinie bis zum Gleichgewichtspunkte der nächsten Zelle (!) erhält er wieder die ganze kinetische Energie, welche er von dem vorigen Gleichgewichtspunkte bis zur Nulllinie verloren hatte. (Ein Beweis hierfür „ohne Zuhilfenahme neuer Kräftesorten“, d. h. unter Voraussetzung beweglicher „Zell“-Ecken, wird gar nicht versucht.) In einem homolog gebauten (fest?) Aether kann ein Punkt, dem ein solches Bewegungsmoment ertheilt wird oder der es ursprünglich besitzt, nie zu einem Ruhezustande gelangen.“

Auf dieser Basis wird nun der Uebergang oder vielmehr -Sprung von einem bewegten Kraftpunkte zu einer ganzen Gruppe solcher Punkte und damit zum Körperatom vollzogen. Dies geschieht, wie folgt: „Besitzt eine Gruppe solcher zunächst liegender Punkte das A entsprechende Bewegungsmoment, und wird diese Gruppe durch eine Kraft in ein und derselben Lage zusammengehalten, so dass eine Zerstreuung der Kraftpunkte im Aether verhindert wird, so wird diese Gruppe allen ähnlichen gegenüber die Erscheinungen der harten, stossenden, greifbaren Materie zeigen, welche sich im Aether wie in einem leeren Raume bewegt.“ — Hier weiss man nicht: denkt der Verf. sich die „Gruppe“

etwa als eine einzelne Reihe von Punkten, die nach- und hintereinander dieselben „Zellen" mitten durchschreiten? oder sind die Punkte auch nebeneinander gruppirt und dann so geordnet, dass sie alle genau durch die Mitten benachbarter Zellen hindurchpassiren? — Sollte dabei eine Zell-Ecke, die von allen vier Seiten zugleich durch die abstossende Kraft von vier benachbarten Punkten der „Gruppe" in einer und derselben Richtung vorwärts getrieben wird, nicht doch etwa derartig in Motion kommen, dass das schöne „tesserale" Gefüge erheblich in Gefahr geriethe, zumal da hinter den ersten vier Kraftelementen der „Gruppe" leicht vier andere und immer wieder vier andere heranrücken könnten, die das von jenen begonnene Zerstörungswerk fördern und zuletzt die wundervolle Ordnung des „homolog gebildeten Aethers" in unheilbare Verwirrung bringen möchten? Und wie erst, wenn die Gruppenpunkte nicht gerade die Mitten der „Zellen" passiren? oder wenn die Richtung ihrer Bewegung den tesseralen Axen nicht parallel ist? — In solchen Fällen lässt die vom Verf. vorausgeschickte Rechnung uns ganz und gar im Stich.

Nun war vorhin für die Giltigkeit der Schlussfolgerung noch ausdrücklich die Bedingung angegeben, dass die betreffende „Gruppe durch eine Kraft in ein und derselben Lage zusammengehalten werde". Mit Bezug hierauf fährt der Verf. fort: „Es soll nun gezeigt werden, dass gewisse Strukturen und Bewegungen solcher Gruppen alle diese Eigenschaften der widerstandsfähigen ponderablen Materie aufweisen können, ohne dass ihren Elementen eine andere Kraft zugesprochen wird, als die Kraft $-\frac{1}{r^2}$. Infolge des Gesetzes $-\frac{1}{r^2}$ kann ein Kraftpunkt mit beliebig grosser kinetischer Energie eine Reihe solcher nicht durchbrechen, wenn der Winkel seiner Bewegungsrichtung mit der Richtung jener Reihe hinreichend klein ist, sondern er wird von jener Reihe dem Reflexionsgesetz entsprechend zurückgestossen. (Ein Beweis steht nicht da. Verf. beruft sich auch nicht auf einen schon dagewesenen oder etwa noch zu erwartenden Beweis für diese Behauptung.) Eine im Aether rotirende Kreisebene (!) von Kraftpunkten wird deshalb einen stabilen Complex bilden, wenn ihr Durchmesser bei einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit hinreichend gross und die Potentialenergie ihrer Kraftpunkte, vermehrt um ihre Drehungsenergie (!), gleich ist der Potentialenergie einer gleichgrossen Fläche des äussern Aethers; mit einem Worte, wenn die rotirende Kreisfläche eine gewisse Anzahl weniger Kraftpunkte aufweist, als eine gleich grosse Fläche des umgebenden Aethers."

In dieser Entwickelung documentirt sich eine klaffende Gedankenlücke. Wie kommen wir von der einfachen Gruppe zu einer „rotirenden" Gruppe? Wie gelangt ein Kraftpunkt überhaupt in die Lage, um irgend ein Centrum zu rotiren? Bis dahin ist doch nur von einer Vorwärts-

bewegung in gerader Linie und von einer (problematischen) „Zurückstossung nach dem Reflexionsgesetz“ die Rede gewesen: auf welche Basis hin soll denn der Leser nun die Bewegung eines Kraftpunktes in geschlossener Curve als Consequenz der Kraft $-\frac{1}{r^2}$ annehmen? Und erst: Wie kommt eine Gruppe von Kraftpunkten dazu, um ein gemeinschaftliches Centrum zu kreisen und auf diese Weise jenes sonderbare Gebilde darzustellen, was der Verf. „rotirende Kreisfläche“ nennt? Wie kommt ein Kraftpunkt dazu, „Drehungsenergie“ zu haben, wenn er mit keinem andern Punkte, mit keiner Axe durch ein festes Band zusammenhängt? — Ja, man könnte die ganze Rotationsthese an der einzigen schwachen Wurzel, mit welcher der Verf. sie durch ein „deshalb“ verbunden hat, antasten und fragen: Warum muss ein Punkt, wenn er von einer gewissen „Reihe“ wegen Kleinheit des Einfallswinkels „reflectirt“ worden und nachher an eine zweite Reihe kommt, dort jedesmal unter einem Winkel aufprallen, der zum Eindringen auch wieder zu klein ist? Und die aufeinander folgenden Bahnstücke, müssen die — im Innern des tesseral zelligen oder sonstwie „homolog gebauten Aethers“ — auch stets in einer und derselben Ebene liegen, wie das die „rotirende Kreisfläche“ doch Beides voraussetzt? Gründe! — Aber selbst wenn Alles das auch in schönster Ordnung wäre, so fehlt immer noch jede Basis für die „Drehungsenergie“, und gerade diese bildet den Kern- und Angelpunkt, ohne welchen die ganze Atomtheorie des Verf. in ein reines Nichts zerfällt. Denn die „Stabilität des Atoms“ beruht wesentlich auf der Voraussetzung, dass die „verminderte Potentialenergie an jedem Orte ersetzt werde durch Drehungsenergie“.

Von seiner „rotirenden Kreisfläche“ ab schreitet der Verf. nun rasch vorwärts. „Denken wir uns nun eine Kugel von Kraftpunkten und ertheilen derselben eine stets rascher werdende Rotation um einen ihrer Durchmesser... Denken wir uns dagegen eine Gruppe von Kraftpunkten in Ringform mit kreisförmigem Querschnitt und einer Rotation in dem Querschnitt... Ein solches Ringatom könnte ausser seiner Rotation im eben besprochenen Querschnitt auch noch eine solche in der dazu senkrechten Ebene in der Axe A des Ringes haben“ etc. — Und so construirt der Verf. ruhig weiter und baut auf seine Atomtheorie noch sieben weitere physikalische Capital auf, welche folgende Ueberschriften tragen: Bewegung der Körper im Aether, Gravitation, Cohäsion, Licht, Wärme, Elektricität, Magnetismus. Es würde zu weit führen, wollten wir den Inhalt derselben auch nur flüchtig hier durchgehen; wir müssen die Leser, welche Interesse daran haben, die Schlüsse des Verf. kennen zu lernen, auf das Original verweisen. Wesentlich kam es uns hier darauf an, das Fundament der ganzen Theorie zu prüfen, und in dieser Beziehung geht unser Urtheil dahin, dass der Verf. sich die Grundlage seiner phy-

sikalischen Entwickelungen, die Körperatome nämlich, durchaus nicht auf rechtskräftige Art und Weise erworben hat, dass es ihm nicht gelungen ist, dieselben aus seiner Fundamentalhypothese heraus zu deduciren, ja, wir vermögen kaum den ernstlichen Versuch einer solchen Deduction zu erblicken. Auf die Stipulation eines Systems unbeweglich im Raume festgehaltener Kraftpunkte folgt eine Gleichung von uncontrolirbarer Herkunft, und darauf eine numerische und graphische Darstellung von aufeinander folgenden Werthen der beschleunigenden Kraft für die Bewegung eines einzelnen mobilen Punktes, der in gerader Linie und in einer ganz speciellen Richtung fortschreitet. Wie diese geringfügige mechanische Entwickelung schon als eine genügende Basis angesehen werden könne für rotirende Bewegung, kreisende Punktgruppen, Ringatome etc., und dazu noch in einem Aether von lauter freien Elementarbestandtheilen, ist nicht abzusehen. — Vorhin haben wir schon des Verfassers Satz citirt: „Wenn aus unseren Kraftpunkten ohne Zuhilfenahme neuer Kräfte keine constanten Gebilde construirbar sind, so taugt unsere Hypothese nichts; diese Construction ist aber möglich.“ Ueber die Möglichkeit soll hier nicht gestritten werden; sofern der Leser aber den Beweis derselben durch eine vom Verf. wirklich geleistete Construction erwartet hat, sieht er sich getäuscht.

Das ganze Interesse an einem solchen Beweise beruht übrigens wesentlich auf der Annahme, dass der Verf. sein oben schon erwähntes Versprechen, im zweiten Abschnitte des Buches den Leser über die Natur der von ihm benutzten Kraft zu beruhigen, halten werde. Dieser zweite Abschnitt führt den Titel: „Buch B. Erkenntnisstheoretische Deutung des Gesetzes $-\frac{1}{r^2}$.“ Das Buch B nun enthält vier Capitel und einen „Rückblick“. In dem vierten dieser Capitel, welches überschrieben ist: „Die arithmetische Form des physikalischen Causalbegriffs“, findet sich folgende Deduction des fraglichen Wirkungsgesetzes:

„Wie ausgeführt, beobachten wir direct nur Veränderungen; alles Andere ist Folgerung aus solchen Veränderungen. Betrachten wir die einfachst mögliche Veränderung, diejenige, welche stattfinden kann zwischen zwei Punktelementen. Alles, was bei solchen veränderlich, ist ihre Entfernung; denn sie selbst sind unveränderlich der Constanzdefinition zufolge. Es giebt in diesem Systeme weiter nichts, als die beiden Punktelemente a und b und ihre Entfernung r. Von Richtungen kann erst die Rede sein, wenn mehr als zwei Elemente da sind; so lange das System auf a, b beschränkt bleibt, ist nur Distanz, keine Richtung dieser Distanz vorhanden.

Wenn nun a, b zu den Zeiten $t_{,}, t_{,,}, t_{,,,}, \ldots$ die Entfernungen $r_{,}, r_{,,}, r_{,,,}, \ldots$ haben, so sind die Verhältnisse $\frac{r_{,}}{r_{,,}}, \frac{r_{,}}{r_{,,,}}$ ein Maass

der Veränderung (!), welche das System erlitten hat. Setzen wir daher r als veränderliche Grösse, d. h. als Symbol der veränderlichen Entfernung überhaupt, und 1 als Distanzeinheit, so ist $\frac{1}{r}$ der arithmetische Allgemeinausdruck für alle Veränderungen des Systems.

Fragen wir jetzt: Welches ist das Gesetz, nach welchem die gegenseitige Bewegung der beiden Punkte a, b stattfinden muss, damit $\frac{1}{r}$ der allgemeingiltige Ausdruck der Veränderung, des Maasses der Veränderung, welche in dem System vorgegangen ist, sein könne?

So ist die Antwort: Das durch die derivirte Function von $\frac{1}{r}$, also durch $-\frac{1}{r^2}$ dargestellte Gesetz. ...

... Das Bedürfniss causaler Verbindung der Erscheinungen fordert von uns, die wahrgenommenen Veränderungen als Wirkungen von Ursachen zu betrachten. Die Ursache der obigen Wirkung $\frac{1}{r}$ muss in die beiden Punkte a, b verlegt werden, weil es ja nichts anderes Constantes in jenem System giebt. Das Gesetz, nach welchem jene Ursache wirkt, ist gegeben durch $-\frac{1}{r^2}$. Wir sagen demnach, jene Punkte wirken aufeinander mit einer Ursache (Kraft), welche abnimmt umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung. Das Causalgesetz erscheint also in der Maske einer fernewirkenden Kraft. Ein jedes andere hiervon verschiedene Gesetz $\pm\frac{1}{r^n}$ wäre aber nicht das Causalgesetz, sondern die Hypothese einer unerklärlicherweise in die Ferne wirkenden todten Masse." ...

Mancher Leser denkt bei den letzten Worten vielleicht, es sei bezüglich des Glaubens an Fernewirkung der Exponent der Grösse r doch eine ganz gleichgiltige Ziffer; ob diese Wirkung dem Quadrat oder dem Cubus der Entfernung umgekehrt proportional sei, komme doch gar nicht in Betracht, wenn die Frage allgemein dahin gehe: ist sie eine Fernewirkung oder ist sie keine? — Dieser Gedanke wird durch das Wort „Maske" einigermassen nahe gelegt. Allein der Verf. hat schon im zweiten Capitel des „Buches B" mit den fernewirkenden Kräften in folgender Weise Frieden geschlossen:

„Hiermit sind wir bei den verschmähten fernewirkenden Kräften als letzten Ursachen wieder angelangt. Als Resultat ergiebt sich: Stoss und Fernewirkung haben gleichviel Unbegreifliches und durchaus nichts Selbstverständliches. Bei der mathematischen Behandlung der Phänomene ist es aber stets nothwendig, fernewirkende Kräfte anzunehmen, werde dies

nun offen zugestanden, oder durch den Körperelementen beigelegte Eigenschaften, oder durch nicht motivirte Combination von Formeln, die inhaltlich dasselbe apodiktisch erfordern, ausgeführt."

Ueber die Behauptung, dass „Stoss und Fernewirkung gleichviel Unbegreifliches haben", mit dem Verf. zu streiten, ist hier der Ort nicht. Wir wollen daher von dieser Frage einmal gänzlich absehen und dafür die vorhin mitgetheilte Ableitung des Repulsionsgesetzes $-\frac{1}{r^2}$ etwas näher ins Auge fassen.

Die „wahrgenommenen Veränderungen" sind zu betrachten als die „Wirkungen von Ursachen". Wer letztere abschätzen will, muss also die Veränderungen messen. Wenn nun aber zwei Punkte a und b in zwei verschiedenen Zeitpunkten die Entfernungen $r_{,}$ und $r_{,,}$ haben, so ist „das Verhältniss $\frac{r_{,}}{r_{,,}}$ ein Maass der Veränderung, welche das System erlitten hat."

Was ist das denn eigentlich, was hier „Maass der Veränderung" heisst? — Nehmen wir ein Beispiel. Zwei Punkte sind in diesem Augenblicke 1 Meter, morgen 10 Meter von einander entfernt. Das „Maass der Veränderung" ist $\frac{1}{10}$. — Uebermorgen sind sie 20 Meter von einander entfernt. Das „Maass der Veränderung" ist daher auf $\frac{1}{20}$ gesunken. Wären in diesen zwei Tagen die beiden Punkte ruhig an ihrem Anfangsorte geblieben, hätte sich keiner von der Stelle gerührt, so wäre das „Maass der Veränderung" zwanzigmal so gross wie vorhin, nämlich gleich 1 gewesen! — Wer versteht das?

Und wie soll man's erst verstehen, wenn man drei Seiten früher vom Verf. aufgefordert worden ist, zu „bedenken, dass die Bewegung, speciell die gleichförmige Bewegung, gar keine Ursachen zu haben brauche!" — Wie stimmt denn in diesem Falle mit der gleich Null gesetzten Ursache das vorhin statuirte veränderliche Maass der Wirkung überein?

So naheliegend diese Fragen erscheinen, so vergeblich ist es, in dem vorliegenden Buche sich nach einer Antwort umzusehen. Herr Schmitz-Dumont schreibt seine Sätze über den Bruch $\frac{r_{,}}{r_{,,}}$ und über „den arithmetischen Allgemeinausdruck $\frac{1}{r}$ für alle Veränderungen des Systems" ganz ohne Erklärung, ohne Angabe von Gründen* ruhig hin

* Wohl beruft sich der Verf. auf einen Abschnitt seines Buches: „Mathematische Elemente der Erkenntnisstheorie", aber gar nicht zur Aufklärung der hier zunächstliegenden Frage: wieso der Bruch $\frac{r_{,}}{r_{,,}}$ berechtigt oder auch nur befähigt ist, als „Maass der Veränderung" hingestellt zu werden, son-

und baut darauf seine ganze Theorie auf, gerade als ob nicht der Schatten einer Unklarheit oder eines Zweifels darüber schwebte. —

Auf das „Buch B" folgt nun noch ein „Buch C. Die zeitlich räumliche Ordnung", welches fünf Capitel enthält mit den Ueberschriften: I. Die Zeit, der Bildner des Raumes. II. Definitionen. (Empfindung, Vorstellung, Denken, Wahrnehmung, Begriff.) III. Die Ordnungsreihen der logischen Synthese. IV. Unvollkommenheiten analytischer Symbolik. V. Das Congruenzen-Axiom.

Ueber den philosophisch-mathematischen Inhalt dieser Abtheilung eine Uebersicht zu geben, ist nicht möglich, ohne die für gegenwärtiges Referat gesteckten Grenzen allzuweit zu überschreiten. Wir müssen daher den sich dafür interessirenden Leser auf das Original verweisen und wollen hier nur aus dem letzten Abschnitte des Buches, welcher den Titel: „Schlussresultate" führt, einige charakteristische Sätze mittheilen.

„... Die reine Materie ist weiter nichts, als die Forderung — und die logische Möglichkeit, diese Forderung zu erfüllen —, dass jene Eigenschaften des Körpers, nach bestimmtem Maass, einer bestimmten mathematischen Function entsprechend, zusammengefasst werden sollen und können.

Von dem Golde sagen wir, dass es gelb $= a$, von dieser specifischen Dichte $= b$, dehnbar $= c$, schmelzbar bei dieser Temperatur $= d$, etc. sei.

Das Gold ist deshalb eine bestimmte Vereinigung dieser Eigenschaften, also Gold $= f(a, b, c, d, \ldots)$, worin f eine bestimmte Art und Weise bedeutet, in welcher diese a, b, c, ... zu einem Ganzen vereinigt gedacht werden. Wenn diese Eigenschaften a, b, c, ... zurückgeführt sind auf Bewegungen von Punktatomen, dann bedeutet f nicht mehr eine bestimmte Function von vielen möglichen, sondern Function überhaupt, Abhängigkeit der einen Bewegung von jeder andern; dann ist die intellectuelle Arbeit, symbolisch durch $f(\ )$ bezeichnet, die reine mit der gemeinsamen Urkraft $-\frac{1}{r^2}$ wirkende Materie. (Also: die reine Materie ist — Arbeit! Dieses *genus proximum* ist bemerkenswerth, nicht minder wie auch die beiden obigen: die reine Materie ist eine gewisse „Forderung" und eine gewisse „logische Möglichkeit".) Ebenso wie dieses Symbol nichtssagend ist, so lange seine Klammer kein a, b, ... enthält, ebenso ist die reine Materie ein Beziehungsbegriff ohne jeden realen Inhalt; der aber eine Realität bilden hilft, sobald Sachen (!) da sind, die aufeinander bezogen werden können.

---

dern nur mit Rücksicht auf denjenigen weiteren Gedanken, der von der Function $\frac{1}{r}$ zu ihrer Derivirten $-\frac{1}{r^2}$ hinüberführt.

Diejenigen, welche Kraft und Stoff unterscheiden, können die logische Berechtigung hierzu gleichfalls an dem Symbol $f(\ )$ finden. Die von der Materie losgelöste Kraft ist das f, der von der Kraft gereinigte, also jetzt urreine Stoff ist die Klammer ( )." —

Sehr merkwürdig ist auch noch der Schluss des Buches, in welchem der Verf. sich anschickt, seine eigene Person, die Substanz seines eigenen Ich, vor unseren Augen aufzulösen und zu verflüchtigen, ihre räumlich-zeitliche Continuität in Frage zu stellen und über die Grenzen seines Daseins Zweifel zu verbreiten. Das geschieht folgendermassen:

„In dem vorhin gebrauchten Ausdrucke: Der Geist schafft den Körper — bezeichneten wir die Summe bewusster Zustände mit dem Worte ‚Geist'. Das ist zu unterscheiden von dem üblichen Begriffe ‚Geister'. Ebenso wenig, wie beseelten Monaden im Leibnitz'schen Sinne, ist hier empfindenden Atomen, welche zuweilen für ein System des Monismus ausgegeben werden, das Wort geredet worden; ebenso wenig stabilen Persönlichkeiten als Geistern oder Gespenstern im mittelalterlichen Sinne. Von solchen stabilen Persönlichkeiten weiss unsere Analyse nichts; im Gegentheil, es würde derselben eher entsprechen, auch das lebendige Individuum in eine Unzahl einander folgender Ich aufzulösen, von denen ein jedes nur einem einzigen Momente in dem Leben eines Menschen entspricht. Das Ich ist vorab nur ein geometrischer Begriff, zum Zwecke, um die verschiedenen Zustände des Bewusstseins auf ein einheitliches Subject zu beziehen; und deshalb von derselben Relativität als metaphysischer Begriff, wie die Individualität der Dinge. Wollte man aus diesem Ich ohne weitere Einschränkung eine stabile Substanz machen, so wäre dem zu widersprechen; denn jenes Ich ist eine ebenso flüchtige Erscheinung, wie ein Einzelgedanke, eine Einzelempfindung. Wir sind gewohnt, eine Reihe solcher Ich, Brennpunkte, welche ein jeder für sich ein vollständiges Gemälde enthalten, wenn wir sie in uns selbst als Erinnerungen, oder ausser uns als eine räumlich-zeitliche Continuität verfolgen zu können glauben, Persönlichkeiten zu nennen. Aber diese Continuität ist häufig eine sehr anfechtbare. Die in der Erinnerung uns vorschwebende hat häufig ganz andere Endpunkte, als die von dem Standesamt zunächst für den Leib trotz aller seiner physischen Veränderungen registrirte; und wer kann wissen, was andere Organismen — wenn es deren giebt (!) — für Meinungen über diese unsere Continuität als Person haben, ob sie uns nicht ganz andere Grenzen zusprechen. ... Hiermit soll keine weitere verborgene Weisheit angedeutet, sondern nur zu Gemüthe geführt werden, dass alle apodiktischen Behauptungen auf diesem Gebiete höchstens Verstandesbeschränkungen der Sprecher anzeigen.

Unsere Aufgabe schliesst hier, denn wir stehen mit den letzten Sätzen schon vor den Problemen der Individuation aus dem allgemein Realen, und der Auflösung der Individuen — Problemen, welche ausserhalb des Rahmens unserer Untersuchung liegen; ja ausserhalb desselben liegt schon die Vorfrage, ob diese Gegenstände überhaupt neben der poetischen auch eine wissenschaftliche Behandlung zulassen."

Auch des Referenten Aufgabe schliesst hier. Ueber die philosophischen Ansichten des Verf. enthalten wir uns, ein Urtheil abzugeben, weil wir auf die Motivirung desselben hier nicht in genügender Weise eingehen können. Möge der Leser, wenn er sich durch vorstehenden Schluss der „Schlussresultate" angelockt fühlt, im Original selbst Belehrung suchen und dann seinerseits entscheiden, inwiefern es eine „poetische oder wissenschaftliche Behandlung" oder vielleicht etwas Drittes ist, was der Verfasser den von ihm besprochenen Fragen angedeihen lässt. Ueber den physikalischen Inhalt des Buches aber haben wir unsere Meinung oben schon in genügender Weise ausgesprochen. Das Streben des Verf. mag vom besten Willen beseelt sein; aber wer eine physikalische Theorie aufbaut, muss mit äusserster Vorsicht zu Werke gehen, und wer dieselbe der wissenschaftlichen Welt plausibel machen will, der muss, unter sorgfältiger Vermeidung aller Gedankensprünge, sich möglichster Schärfe und Klarheit in der Darstellung befleissen. Vorsicht im Aufbau der Schlüsse und Klarheit der Darstellung; das sind aber gerade die Eigenschaften, welche dem vorliegenden Buche am meisten fehlen.

Dr. C. Isenkrahe.

Helmert, **Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie.** Einleitung und I. Theil: Die mathematischen Theorien. Leipzig 1880, Teubner. XII und 631 S. 8°.

Die Aufgabe, die Gestalt der Erde zu bestimmen, wäre einer einfachen Lösung fähig, wenn die Erde nicht mit Luft umgeben wäre, welche die Lichtstrahlen in einer nicht genau anzugebenden Weise von ihrer geradlinigen Bahn ablenken würde. Infolge dieser Refractionswirkung muss man zur Bestimmung der Erdgestalt zu einer Combination von geodätischen, astronomischen und physikalischen Methoden seine Zuflucht nehmen, die in ihrer Gesammtheit aber auch nur eine näherungsweise Kenntniss der Form der Erde liefern. Der Verfasser des vorliegenden Werkes hat die dankenswerthe Aufgabe unternommen, diese Theorien im Zusammenhange vorzuführen, und giebt uns in dem ersten, bis jetzt allein erschienenen Bande zunächst die geodätischen Methoden mit ihrer mathematischen Begründung. Die Messungsresultate, die der Anwendung dieser Methode zu Grunde liegen, sind: geographische Längen und Brei-

ten, die Längen einzelner — im Verhältniss kurzer — Linien, der Basen, und endlich die Horizontalwinkel zwischen den Beobachtungsstationen. Dieses Material reicht offenbar nicht aus zur Bestimmung der wahren, physischen Erdoberfläche mit ihren unregelmässigen Formen, und deswegen sucht man es zunächst anzuwenden, um die Gestalt des Geoids zu finden, d. h. derjenigen Niveaufläche der Erdattraction, von welcher die Oberfläche der ruhenden Meere einen Theil bildet. Ob es überhaupt möglich ist, aus Messungen, die den geodätischen ähnlich sind (falls sie in genügender Menge vorhanden wären), die Gestalt des Geoids zu finden, untersucht der Verf., nach dem Vorgange von Christoffel, und findet, dass die Frage zu bejahen ist unter den Voraussetzungen, die wir bei der Erde machen dürfen. Vorerst — d. h. bis die Messungen viel dichter als jetzt die Erde umspannen — kann man aber die gedachten Methoden nicht anwenden, sondern muss eine Annäherung suchen, indem man von der Annahme ausgeht, dass das Geoid im Grossen und Ganzen nicht viel von einer Kugel, und noch weniger von einem Rotationsellipsoid sich unterscheidet. Man vergleicht die Messungen mit einer Referenzfläche, als welche man bei kleineren Gebieten eine Kugel, bei grösseren ein Rotationsellipsoid wählt, dessen Dimensionen gegeben sind (aus praktischen Gründen wird man die Bessel'schen vorziehen) und dessen Axe der Erdaxe parallel ist. Man denkt sich die Referenzfläche so gelegt, dass ihr geodätischer Bogen zwischen den Fusspunkten derjenigen Normalen, welche durch die Endpunkte der Basis gehen, die gemessene Länge der Basis bat. Auf diese Referenzfläche werden dann die Punkte der Erdoberfläche durch Normalen (der Referenzfläche) projicirt; die Abweichungen dieser projicirenden Normalen von den Lothlinien der Erdorte bilden die Lothabweichungen. Für jeden Erdort sind dann aus den Messungen fünf Unbekannte zu bestimmen, nämlich: Länge und Breite der projicirenden Normale, Höhe über dem Referenzellipsoid und zwei Bestimmungsstücke der Lothabweichung. Diese Grössen werden aus den Gleichungen gefunden, welche die beobachteten Daten durch die Unbekannten ausdrücken. Die Auflösung erfordert die Einführung von Näherungswerthen und die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, und ist eine mühevolle Arbeit. Wie dieselbe anzuordnen ist, bei verschiedenen Annahmen über den Umfang und die Reichhaltigkeit des vorliegenden Beobachtungsmaterials und dessen Genauigkeit, wird im 11. u. 12. Cap. des Buches gelehrt, und zwar ohne und mit Rücksicht auf die Lothabweichungen. Wenn für gehörig viele Punkte die Lothabweichungen bestimmt sind, so kann man empirisch eine Fläche finden, welche alle Lothlinien senkrecht schneidet, und diese als eine Annäherung an eine Niveaufläche der Schwere betrachten. Helmert bezeichnet sie als Sphäroid und giebt zwei Beispiele für seine Bestimmung.

Wenn eine Reihe von Messungsgebieten vorliegen, so kann man endlich ein Referenzellipsoid bestimmen, welches allen Messungen sich möglichst genau anschliesst und das dann am meisten den Namen Erdellipsoid verdient. Wie diese Bestimmung zu machen sei, ist im 13. Capitel gelehrt.

Um nun die vorgenannten Aufgaben lösen zu können, muss man im Stande sein, den Zusammenhang zwischen den beobachteten Grössen und den in das Problem eingehenden Unbekannten anzugeben; die Herstellung der Gleichungen, welche die gesuchten Beziehungen ergeben, bildet den Inhalt der Capitel 1—10, während die vorausgeschickte, aus drei Capiteln bestehende Einleitung Begriff und Gegenstand der höheren Geodäsie, historische Entwickelung der Kenntnisse von der Erdoberfläche und mathematische Entwickelungen, die in den Anwendungen viel gebraucht werden, behandelt. Die erwähnten Gleichungen zwischen den Coordinaten und den gemessenen Grössen gestalten sich verschieden, je nachdem man eine Kugel oder ein Ellipsoid als Referenzfläche zu Grunde legt. Für die Kugel werden im 2. und 3. Capitel zuerst die Formeln der sphärischen Trigonometrie entwickelt, welche die strenge Lösung der gestellten Aufgabe ergeben; da aber die vorkommenden Dreiecke kleine Seiten haben, können die Lösungen in Reihen entwickelt werden, oder man kann die Berechnung der sphärischen Dreiecke auf die von ebenen reduciren. Auch kann es unter Umständen von Vortheil sein, mit Sehnen und Horizontalwinkeln statt mit dem Legendre'schen Satze oder der Additamentenmethode zu rechnen; denn wenn auch rein mathematisch betrachtet alle Methoden zu den gleichen Endwerthen führen müssen, so unterscheiden sie sich doch praktisch, wegen der mangelhaften Genauigkeit der zu Grunde gelegten Daten und wegen der beim Rechnen unvermeidlichen Vernachlässigungen, in der Beziehung von einander, dass die eine eine grössere Mühe zur Erreichung einer gegebenen Genauigkeit verlangt, als die andere. Deshalb werden in den genannten beiden Capiteln die verschiedenen Methoden entwickelt und mit einander verglichen.

Die Sehne und der Vertikalschnitt, d. h. Normalschnitt auf dem Ellipsoid bilden den Gegenstand des vierten Capitels, in dem die Aufgaben der Geodäsie mit einer ellipsoidischen Referenzfläche, zunächst mit Benutzung der bezeichneten Elemente, durchgeführt werden. Es zeigt sich, dass die auf Sehnen und Horizontalwinkel gegründeten Formeln im Ganzen bequem und scharf sind und, unter Umständen, sich praktisch gut verwenden lassen. Obgleich somit, vom rein mathematischen Standpunkte aus, kein Grund vorläge, die geodätische Linie in die Geodäsie einzuführen, wie dies Gauss und Bessel gethan haben, so ergiebt doch die Untersuchung der Formeln, welche die Geodäsie mit der geodätischen Linie liefert, dass sie in praktischer Hinsicht vortheil-

haft ist und in dieser Beziehung auch von keinem andern der vorgeschlagenen Hilfsmittel übertroffen wird. Nachdem im 5. Capitel die Formeln, die sich auf die einzelne geodätische Linie beziehen, streng und mit Hilfe von Reihen abgeleitet sind, wird im 6. Capitel die von Christoffel zuerst eingeführte reducirte Länge einer geodätischen Linie definirt und werden mit ihrer Hilfe die wichtigen Differentialformeln angegeben für die Aenderungen der Länge und der Azimuthe einer geodätischen Linie, deren Endpunkte sich verschieben. Auch der Zusammenhang zwischen Länge und den geodätischen Azimuthen einer solchen Linie einerseits und den geographischen Coordinaten ihrer Endpunkte andererseits wird in diesem Capitel aufgestellt. Das 7. Capitel ist dem Laufe der geodätischen Linie und ihrem Verhältnisse zu den gegenseitigen Vertikalschnitten der Endpunkte gewidmet, und das 8. giebt dann die Formeln für die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke. Die Entwickelung folgt hier dem von Christoffel eingeschlagenen Gange, indem zuerst die Differentialgleichungen zwischen Seiten- und Winkeländerungen entwickelt und diese dann durch Reihen integrirt werden. Man findet dabei, wie sich ein solches Dreieck auf ein sphärisches oder ein ebenes reduciren lässt, und dass ein Dreieck von noch messbaren Dimensionen auf der Erde immer als auf einer Kugel von passendem Radius liegend angesehen werden kann. Statt nun die Punkte des Ellipsoids durch geographische Coordinaten (Länge und Breite) zu bestimmen, kann man auch mit geodätischen Linien auf der Fläche Coordinatensysteme bilden, und zwar Polarcoordinatensysteme oder rechtwinklige. Das erstere hat früher schon Verwendung gefunden, die dem zweiten entsprechenden Formeln werden im 9. Capitel abgeleitet. Dieselben lassen sich für Distanzen von ein paar hundert Kilometer auf wenige Glieder reduciren und bei Gebieten, die sich höchstens um hundert Kilometer beiderseits von einem Meridian entfernen, durch eine Rechnung in der Ebene, mit nachträglichen kleinen Correctionen, ersetzen (Cap. 10).

Das ganze Buch ist in der Beziehung elementar gehalten, dass nirgend von Variationsrechnung und elliptischen Functionen Gebrauch gemacht ist. Die vorkommenden Formeln sind stets durch Berechnung extremer Beispiele und eventuell Vergleichung mit scharfen Rechnungen auf ihre Genauigkeit geprüft, so dass man in allen Fällen der Praxis sich darauf verlassen kann, hinreichend genaue Resultate zu finden. Die Reichhaltigkeit des Inhalts lässt die obige kurze Uebersicht erkennen. Diese Eigenschaften: Vollständigkeit im Inhalt bei Einfachheit und Strenge in der Form machen das Buch zu einem unentbehrlichen Handbuch der Geodäsie für Jeden, der sich mit dieser Wissenschaft befassen will.

Möge der Herr Verfasser den zweiten Band, der die mechanisch-physikalischen Theorien bringen wird, dem ersten folgen zu lassen bald die Musse finden.

J. Lüroth.

Die Terrain-Aufnahme mit der tachymetrischen Kippregel von Tichý und Starke. Für das Selbst-Studium bearbeitet von ANTON SCHELL, k. k. Professor. Mit 20 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien 1881, L. W. Seidel & Sohn. 8⁰. 48 S. und 3 Zahlentabellen.

In einer früheren Schrift, über welche in dieser Zeitschrift, Bd. 27 S. 15, berichtet wurde, hat der Verfasser ein Tachymeter mit theodolithartigem Untergestelle beschrieben. Wesentlich dasselbe Instrument, mit Weglassung des Horizontalkreises, ist statt auf einen Dreifuss auf eine Säule gestellt worden und so die in vorliegender Schrift beschriebene Kippregel entstanden. Der Messtisch mit allem Zubehör ist veraltet und sollte ausser Gebrauch kommen; diese Meinung theilt der Berichterstatter mit den berufensten Fachleuten. Demgemäss erscheint ihm die Einführung einer neuen Kippregel, namentlich wenn diese die Zugaben von Stechnadeln, Parallelschiebern, Maassstab hat, wenn die Befestigung der Tragsäule am Lineale nicht einfach ist, das Fernrohr eine verwickelte Einrichtung hat und umständliche Theilungen vorkommen, wie im vorliegenden Falle, nicht als ein nützlicher Fortschritt, sondern als ein nicht wünschenswerther und nicht lobenswerther Rückfall. Die Ausstellungen, welche an dem (theodolithartigen) Tachymeter von Tichý und Starke gemacht wurden, gelten auch für die Kippregel und neue Bedenken kommen hinzu, da die Anpassung der Vorrichtung zur Kippregel weitere Complicationen bedingt hat. Was hinsichtlich mangelnder Schärfe der Darstellung über die erste Schrift gesagt wurde, ist für diese neuere nur zu wiederholen. Der Verfasser hat im 3. Hefte des 27. Bandes dieser Zeitschrift eine Antikritik veröffentlicht, durch welche meines Erachtens keineswegs eine Entkräftung meines Tadels bewirkt wird, sondern im Gegentheil eine Bekräftigung meiner Ausstellungen, sowohl des in der Antikritik mit Stillschweigen Uebergangenen, als des darin Besprochenen. Was dort aus dem Rahmen sachlicher Besprechung tritt, lässt mich gänzlich kühl, hat für Andere also noch weniger Interesse und bleibt unbeantwortet. Als ich Nachricht von der Antikritik erhielt, zunächst ohne etwas über ihren Inhalt zu erfahren, erwartete ich die Aufdeckung eines Versehens, dessen ich mich schuldig gemacht habe. Diese blieb aber aus und deshalb benütze ich die Gelegenheit, mich selbst zu berichtigen.

Ich sagte, der anallatische Punkt einer Linsenzusammenstellung falle (wie bei einer Linse) in den vordern Brennpunkt der äquivalenten Linse, diese an ihren wahren Ort gedacht, d. h. so gestellt, dass die mit ihr erhaltenen Bilder nach Grösse und Lage übereinstimmen mit jenen, welche mit der Linsenzusammenstellung selbst erhalten werden. Der anallatische Punkt der Zusammenstellung zweier Linsen von den Brennweiten f_1 und f_2 und dem Abstande d liegt aber in Wirklichkeit

um $\frac{d^2}{f_1+f_2-d}$ hinter dem vordern Brennpunkte der an ihrem richtigen Orte stehenden äquivalenten Linse.

Einige der von mir an den Tichý-Starke'schen Apparaten gemachten Ausstellungen macht Herr Schell eigentlich selbst, sucht sie aber rhetorisch abzuschwächen. S. 3 wird die Vermehrung der kostspieligen Feldarbeit zugegeben, dann aber geredet: „Der ökonomische Nachtheil .... wird jedoch zum grössten Theil dadurch compensirt, dass ... der grösste Theil der Hausarbeit gänzlich entfällt" u. s. w. Und gleich darauf, S. 4, heisst es: „Die nach Tichý's Vorgang erforderliche zweite Ablesung am Vertikalkreise und die damit im Zusammenhange stehende Ablesung der Höhe an der Latte ist allerdings mit einem kleinen Zeitverluste verbunden, der aber kaum in Betracht kommt, wenn die Operationen nur einigermassen mit Geschick und Verständniss ausgeführt werden." Folgt noch eine Tröstung für den ökonomischen Nachtheil. Derlei erinnert an gewisse Badschriften, in denen bewiesen werden muss, dass das betreffende Wasser für alle möglichen Schäden gut ist, Durchfall heilt und Hühneraugen, Schwindsucht und Kurzsichtigkeit, Hämorrhoiden, Lähmung, Steinleiden, Unfruchtbarkeit, Fettsucht und Gehirnerweichung. Wer nicht gerade Badearzt desselben Kurorts ist, denkt anders über die Wirkungen jenes Wassers, gerade so wie ich über die Tichý-Starke'schen Tachymeter-Instrumente eine andere Ansicht habe, als Herr Schell.

Bohn.

Die synthetische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für den Schulgebrauch und Selbstunterricht von Dr. Julius Wenck, Director der herzogl. Baugewerb- und Gewerbschule zu Gotha. — Leipzig und Heidelberg, bei Winter. 4 Mk.

In keinem Buche, welches zugleich für den Schulgebrauch und den Selbstunterricht geschrieben ist, wird die Darstellung beiden Zwecken gleichmässig gerecht werden können; während der Schulgebrauch eine knappere Form verlangt, erheischt der Selbstunterricht umständliche Breite. Das vorliegende Werk scheint mehr dem letzten Zwecke zu dienen. Für den Schulgebrauch dürfte es sich aber nicht eignen, da es wohl kaum eine Schule geben wird, welche Zeit hätte, in der gebotenen Form die Schüler in die synthetische Geometrie einzuführen. Vor Allem ist die Reihenfolge der einzelnen Abschnitte bedenklich. Es werden nämlich zuerst die allgemeinen Principien der projectiven Geometrie ausführlich dargelegt, ohne im Folgenden rechte Verwerthung zu finden. So behandeln die ersten Abschnitte auf 164 Seiten die Punktreihen, Strahlenbüschel und die projectiven Verwandtschaften, und werden nur

auf ungefähr 30 Seiten durch die Theorie des vollständigen Vierecks und Vierseits und die Transversalentheorie des Dreiecks unterbrochen. Die letztere führt zu den Sätzen des **Menelaus** und **Ceva** und kann füglich in einer synthetischen Darstellung der Planimetrie entbehrt werden, da diese Sätze sich der planimetrischen Anschauung entziehen und bei geometrischen Untersuchungen, die sich auf projective Eigenschaften stützen, wohl kaum gebraucht werden.

Ohne Benutzung der vorher entwickelten projectiven Beziehungen werden dann in bekannter Form die harmonischen Eigenschaften des Kreises abgeleitet. Man findet den Satz: Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so wird jeder Durchmesser des einen von der Peripherie des andern harmonisch getheilt, aber nicht seine Verallgemeinerung für den Fall, dass der Durchmesser des einen Kreises von dem andern nicht geschnitten wird, eine Verallgemeinerung, welche für die Theorie der Potenzlinie und der gemeinschaftlichen Secanten der Kreise von fundamentaler Bedeutung ist. Die Lehre von der Potenzlinie und den Aehnlichkeitspunkten wird gegeben, doch fehlen die schönen gegenseitigen Beziehungen, welche der Potenzkreis vermittelt, und die Anwendungen auf das Berühren und Schneiden der Kreise unter gegebenen Winkeln. Die Kegelschnitte erscheinen als collineare Curven des Kreises und daher gelten die projectiven Eigenschaften der Kreise auch für Kegelschnitte; die Fundamentalconstructionen der letzteren aus fünf Punkten und Tangenten sind durch projective Gebilde ausgeführt; früher schon war mit Hilfe von congruenten projectiven Strahlenbüscheln eine Construction von beliebig vielen Punkten des durch drei Punkte bestimmten Kreises gegeben, eine Construction, deren Zweck bei der einfachen organischen Construction des Kreises nicht recht ersichtlich ist.

Es fehlt der Nachweis, dass jede durch projective Gebilde erzeugte Curve zweiter Ordnung als collineare Curve des Kreises betrachtet werden kann.

Die Brennpunkte erscheinen als Doppelpunkte der Involutionen, in welchen die Axen durch conjugirte Normalstrahlen geschnitten werden; aus dieser Construction der Brennpunkte ergeben sich unmittelbar einige Haupteigenschaften; die Leitlinie wird als Polare des Brennpunktes definirt, doch wird die Hauptbeziehung zwischen Brennpunkt und Leitlinie nicht angegeben, dass das Verhältniss der Abstände eines Kegelschnittpunktes von einer Leitlinie und ihrem Brennpunkte constant ist, während der specielle Fall dieses Satzes für die Parabel bewiesen wird.

Die Darstellung der behandelten Abschnitte ist klar und eingehend und deshalb kann das Buch Demjenigen, der ohne Lehrer sich mit den Grundzügen der synthetischen Geometrie vertraut machen will, von gutem Nutzen sein. Für den Schulgebrauch kann es nicht empfohlen werden.

Milinowski.

Vorlesungen über neuere Geometrie von Dr. MORITZ PASCH, Professor an der Universität zu Giessen. Leipzig bei Teubner.

Die „Vorlesungen über neuere Geometrie" fassen die Geometrie als eine Wissenschaft auf, welche, durch gewisse Naturbeobachtungen hervor gerufen, aus den unmittelbar beobachteten Gesetzen einfacher Erscheinungen ohne jede Zuthat und auf rein deductivem Wege die Gesetze complicirterer Erscheinungen zu gewinnen sucht, und erhalten, indem sie sich von vorn herein auf den empirischen Kern beschränken, der Geometrie den Charakter der Naturwissenschaft.

Auf die Euklidische „elementare" Geometrie, elementar „wegen der gleichförmigen Einfachheit ihres Verfahrens", stützen sich die analytische und die neuere Geometrie. Die analytische Geometrie ist dem Stoffe nach eine Fortsetzung, der Methode nach ein Gegensatz zu den Elementen; die neuere Geometrie benutzt wie die elementare im Wesentlichen dieselben Mittel der Forschung, ist aber im Gepräge wesentlich von ihr unterschieden. Während die elementare Geometrie die Begriffe möglichst eng begrenzt, den vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitenden Entwickelungsgang einschlägt und deshalb nicht zu allgemeinen Principien gelangt, geht die neuere Geometrie von weiten Begriffen aus und überträgt die allgemeinen und umfassenden Grundgesetze auf die einzelnen Fälle. Diese neuen Gesichtspunkte der neueren synthetischen Geometrie hat die analytische Geometrie sich zu eigen gemacht; die elementare Geometrie dagegen ist von ihnen noch wenig beeinflusst. Die erweiterten modern-geometrischen Begriffe auch in den Elementen zu verwenden, ist die Aufgabe des vorliegenden Werkes, das aus diesem Grunde schon, vor Allem den Lehrern der Mathematik, zu empfehlen wäre, wenn nicht auch die Neuheit der Darstellung demselben grösseres wissenschaftliches Interesse verleihen würde. Es setzt keine Kenntnisse voraus, welche erst in der Geometrie erworben zu werden pflegen, leitet uns bis an die ersten Anfänge zurück und strebt überall nach Klarheit der Begriffe und Reinheit der Entwickelung.

Der „Punkt" wird als Körper aufgefasst, dessen Theilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt; auf der begrenzten „Linie" ist es erfahrungsmässig unmöglich, verschiedene Wege zwischen denselben Punkten zurückzulegen.

Die Begriffe der geraden Strecke und der Ebene sind durch Erfahrung bekannt; sie sind Grundbegriffe und können nicht definirt werden. An den geraden Strecken und ihren Punkten werden durch unmittelbare Beobachtung einfache Eigenschaften wahrgenommen; diese unmittelbaren Wahrnehmungen, aus denen auf deductivem Wege andere Eigenschaften abgeleitet werden, sind die Grundsätze. Sie sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so dass

man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht.

Sind A und B zwei Punkte einer geraden Strecke, so lässt sich zwischen ihnen ein dritter Punkt C wählen; wird hierauf der Punkt C_1 zwischen A und C, der Punkt C_2 zwischen A und C_1 u. s. f. eingeschaltet, so kann man immer mehr in die Nähe des Punktes A gelangen und muss dann schliesslich auf weitere Einschaltungen verzichten; es lässt sich vielmehr, wie unmittelbar aus der Definition des Punktes folgt, eine Strecke angeben, auf welcher einzelne Punkte nicht mehr von einander unterschieden werden können, die also bei der Messung vernachlässigt werden kann. Dasselbe gilt natürlich von jeder kleineren Strecke. Hierdurch wird innerhalb der Beobachtungsgrenzen der Begriff der Irrationalität aufgehoben und die Geometrie in einfachster Weise zur erfolgreichen Anwendung in den Naturwissenschaften und im praktischen Leben befähigt, da diese Anwendung darauf beruht, dass die geometrischen Begriffe den empirischen Objecten genau entsprechen.

Der Begriff Punkt oder eigentlicher Punkt, wie er bis dahin benutzt ist, erfährt eine Erweiterung; als uneigentliche Punkte erscheinen die ideellen, nicht beobachtungsfähigen Durchschnitte von Geraden, wie z. B. in der Euklidischen Geometrie die unendlich fernen Punkte. In gleicher Art wird der ideelle Durchschnitt zweier Ebenen eine uneigentliche Gerade genannt und es werden die bisher für eigentliche Punkte und Gerade gewonnenen Resultate auch für die uneigentlichen als giltig nachgewiesen, namentlich auch, dass drei uneigentliche Punkte eine Ebene bestimmen, welche uneigentliche Ebene genannt wird. Sind also ABC drei uneigentliche Punkte und liegt ein vierter Punkt D in der Ebene ABC, so heisst das: die uneigentlichen Geraden AB und CD schneiden sich.

Darauf werden die harmonischen und projectiven Eigenschaften der Figuren untersucht, Perspectivität, Collineation, Reciprocität in Betracht gezogen. Die Lehre von der Congruenz wird bis zur Aufstellung der absoluten Polarsysteme fortgeführt, in denen jeder Geraden einer Ebene und jeder Ebene der Durchschnittspunkt ihrer Senkrechten als absoluter Pol entspricht. Der Zusammenhang zwischen Congruenz und Projectivität wird durch das harmonische Gebilde vermittelt.

Ist B die Mitte der Strecke AC, so ist der ihm zugeordnete harmonische Punkt B_1 ein uneigentlicher Punkt; B und B_1 heissen „verknüpfte" Punkte.

Wenn zwei congruente Punktreihen auf einer Geraden liegen, so haben sie entweder einen eigentlichen Doppelpunkt B oder nicht; im ersten Falle heissen sie „invers congruent" und haben noch den dem Punkte B verknüpften Punkt B_1 zum uneigentlichen Doppelpunkte; im andern Falle heissen sie „direct congruent". Sind die Strecken AB und BC der Geraden g einander gleich und ist B_1 der dem Punkte

B zugeordnete harmonische Punkt in der Reihe $ACBB_1$, so bilden die Paare BB_1 eine Involution, die „absolute Involution" der Geraden g. Diese ist entweder parabolisch oder hyperbolisch oder elliptisch. Im ersten Falle hat sie einen uneigentlichen Doppelpunkt, den „absoluten Punkt" der Geraden, und führt zur Euklidischen Geometrie; im zweiten Falle hat sie zwei uneigentliche Doppelpunkte und führt zur Gauss'schen, im dritten Falle endlich zur Riemann'schen Geometrie.

Entsprechen sich in congruenten Systemen zwei Punkte A und B selbst, so entsprechen sich alle Punkte ihrer Verbindungslinie f selbst und irgend zwei entsprechende Punkte C und D können durch Drehung um f vertauscht werden. Wird f von CD in E geschnitten, so ist $CE = DE$, und sind $CDEF$ harmonisch, so ist F ein uneigentlicher sich selbst entsprechender Punkt der beiden Systeme und zwar der einzige noch mögliche; er heisst der absolute Pol von f.

Zu jeder Geraden gehört also ein absoluter Pol; liegen zwei Gerade so, dass jede durch den absoluten Pol der andern geht, so sind sie „senkrecht".

Alle einem Punkte S verknüpften Punkte einer Ebene liegen in einer uneigentlichen Geraden, der „absoluten Polare" von S.

Sind in dem so hergestellten absoluten Polarsysteme R und S eigentliche Punkte einer Ebene η, r und s ihre absoluten Polaren, so ist rs der absolute Pol von RS.

Macht man nun die Annahme, dass r und s zusammenfallen, so schneidet r die Gerade RS in ihrem absoluten Punkte und man gelangt zur Euklidischen Geometrie; die Gerade r heisst die „absolute Gerade" der Ebene. Die Paare conjugirter Strahlen der circularen Involution in R und S schneiden die absolute Gerade r in derselben Involution, der „absoluten Involution" der Ebene.

In analoger Art gelangt man zum absoluten Polarsystem im Raume.

Jetzt lässt sich nachweisen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks in der Euklidischen Geometrie gleich 180°, in der Gauss'schen kleiner, in der Riemann'schen grösser als 180° ist. Der Versuch entscheidet für die Euklidische Geometrie.

Die letzten Paragraphen beschäftigen sich mit der Verbindung der geometrischen Zahlenbegriffe, also namentlich mit der Messung, und enthalten die Theorie der Doppelverhältnisse und die Methode der Coordinaten. Erst die analytische Untersuchung giebt dem Begriffe des Punktes diejenigen Merkmale, welche man sonst von vornherein mit dem sogenannten „mathematischen" Punkte zu verbinden pflegt.

Jedem, der sich mit den fundamentalen Principien der Geometrie beschäftigt, bietet das vorliegende Werk eine Fülle von Anregungen, die Grundsätze und Methoden der neueren Geometrie auf die elementare zu übertragen, und ist sein Studium auf's Wärmste anzurathen.

Milinowski.

Leitfaden für den geometrischen Unterricht, zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearbeitet von Dr. R. HEGER. Erster Theil, Planimetrie. Breslau 1882, Eduard Trewendt.

Je grösser die Anzahl der Mitstreiter und je trefflicher ihre Leistungen sind, um so strenger pflegen die Zuschauer und Preisrichter zu sein. Es kann daher nicht befremden, dass dieser Grundsatz auch auf die Bearbeitung eines „Leitfadens", welcher durch die Elemente der Geometrie hindurchführt, Anwendung findet und der Massstab der Beurtheilung auch hier in den letzten Decennien sich sehr verändert hat. Neben die Hauptfrage: „Ist das Geleistete brauchbar?" tritt unausweichbar die Nebenfrage: „Wodurch übertrifft dieser Verfasser seine Vor- und Mitkämpfer?" Zur Sache!

Die Parallelentheorie wird auf das Axiom gebaut: „Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden eine und nur eine nicht schneidende Gerade." Es folgen Sätze über Lage eines Kreises zum Punkte und zur Geraden, dann die Sätze über die gegenseitige Lage zweier Kreise. Die letzteren füllen mehr als drei Seiten; und wenn Referent auch nicht glaubt, dass dieselben für Anfänger zu schwer seien, so hält er doch eine andere Behandlung für kürzer, interessanter und fruchtbarer. Auf S. 17 leitet der Verfasser einen Satz zu zwei verschiedenen Figuren (31) ab, wobei $AB - AE$ in der einen einen positiven, in der andern einen negativen Werth hat. Ich würde diese Kleinigkeit nicht erwähnen, wenn sie mir nicht mit einer gewissen Liebhaberei des Verfassers im Zusammenhang zu stehen schiene.

Auf S. 22—40 werden die Congruenzsätze, die Lehre vom Parallelogramm und Aufgaben behandelt, welche sich um die Mittelsenkrechte (oder, wie der Verfasser sagt, die Normalhalbirende einer Strecke) gruppiren. Die merkwürdigen Punkte mit Ausnahme des Schwerpunktes schliessen sich an. Diese Partie ist nicht schlechter als in anderen Lehrbüchern behandelt.

Gleiches gilt im Ganzen von den folgenden Abschnitten, in denen bis S. 48 die Lehre von den Linien und Winkeln am Kreise, bis S. 56 die Lehre von der Flächengleichheit, den Pythagoras einschliesslich, behandelt wird. Warum an dieser Stelle der Begriff Projection nicht eingeführt, sondern von Hypotenusenabschnitten die Rede ist, weiss ich nicht.

Auf S. 59 begegnen wir „Flächenregeln", die sonderbar genug aussehen. Man urtheile selbst:

$$\text{Seite eines Quadrats} = \sqrt{\text{Fläche}}.$$

$$\text{Höhe eines Dreiecks} = \frac{\text{doppelte Fläche}}{\text{Basis}}.$$

Ebenso wenig Sympathie flösst uns S. 61 die Gleichung ein:

$$\text{Normale} = \sqrt{(\text{ein Hypotenusenabschnitt}) \times (\text{andr. Abschn.})}$$

S. 62 wird die Heronische Dreiecksflächenformel algebraisch abgeleitet, — ich ziehe die geometrische Herleitung vor; wenigstens sollte sie in einem Lehrbuche der Planimetrie angedeutet sein.

Der folgende § 8 führt die Ueberschrift: „Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.“ Wir finden in demselben u. A. den „Transversalstab“, die harmonischen Punkte und Strahlen am Dreieck und Viereck, die Sätze des Menelaus und Ceva nebst Umkehrungen, dann in § 9 die Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke. In anderen Lehrbüchern habe ich dieselben Materien in grösserer Einfachheit, ohne beschwerlichen Rechnungsballast und freilich auch in anderer Ordnung dargestellt gefunden. Als Fehler möchte die Abwesenheit ausreichenden Uebungsmaterials für den Schüler hervorgehoben werden. Dasselbe stellt sich erst in den mittleren Partien von § 9 ein; doch hat es mir scheinen wollen, als habe der Verfasser mit einer gewissen Vorliebe „Rechnungsaufgaben“ behandelt. Selbst einigermassen echt constructive Aufgaben erscheinen in einem gewissen algebraischen Schimmer. So zählte ich in der Aufgabe: „einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Punkte enthält und von einer Geraden eine Strecke JJ_1 von gegebener Länge abschneidet“, mit Leichtigkeit 25 Gleichungen!

In § 10 folgt die Lehre von dem Kreisbüschel. Auch hier zeigt sich die Vorliebe des Verfassers für rechnerische Behandlung. Die Ausbeute an dargebotenem Uebungsmaterial ist gering. Dagegen hebt sich § 12, wo die Theorie der Kreisverwandtschaft nicht ohne Geschick auf das Tactionsproblem angewandt wird, vortheilhaft ab.

Den Schluss bildet die Berechnung von π, die durch nicht ungeschickte Näherungsmethoden geliefert wird.

Das Buch mag im Ganzen brauchbar sein; von anderen zahlreichen Schriften gleicher Art unterscheidet es sich durch die Liebhaberei für rechnerische Ausführungen und Mangel an Uebungsmaterial nicht zu seinem Vortheil.

Coesfeld, im Juli 1882. K. Schwering.

Sammlung von stereometrischen Aufgaben in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Gymnasien und Realschulen von F. X. Steck. Kempten, J. Kösel. 1881.

Das Buch ist besonders zur Repetition des vollen Umfanges der elementaren Mathematik bestimmt; doch ist dies wohl, wie auch in der Vorrede zugegeben wird, vorzugsweise von den rechnerischen Disciplinen zu verstehen. Die geometrische Anschauung wenigstens kommt bei einer geringen Zahl von Aufgaben in ernstlichen Betracht.

Wenn in einem Uebungsbuche recht viele Aufgaben vorkommen, welche im engen Anschluss an Verhältnisse der sinnlichen Anschauung

des Schülers stehen, so wirkt das anregend auf seine Lernbegier; er sieht, dass die Mathematik doch ihren „Nutzen" hat. Wenn andererseits Aufgaben gestellt werden, welche ein wirkliches mathematisches Interesse darbieten, so pflegen dieselben bei richtigem Vortrag auch den Durchschnittsschüler zu fesseln, da die Bewältigung sachlicher, nicht gemachter Schwierigkeiten die Arbeitskraft steigert und die Arbeitsfreudigkeit erhöht. Man darf wohl aussprechen, dass die neueren Lehrbücher in dieser Rücksicht einen erfreulichen Fortschritt gegen früher im Allgemeinen darbieten.

Nun giebt es aber noch eine dritte Art Aufgaben, bei denen weder der eine, noch der andere Gesichtspunkt obwaltet; der Schüler erstens muss sofort den Eindruck haben, dass ihm so etwas nie praktisch vorkommen werde, und die eigentliche zu überwindende Schwierigkeit ist zweitens für den Mathematiker eine lediglich unerfreuliche Sache. Leider mögen solche Aufgaben nicht immer zu vermeiden sein; die in der Stereometrie vorkommenden Formeln müssen an Beispielen geübt werden, und da mögen diese Uebungen oft vom wissenschaftlichen Standpunkte wie ein ziel- und zweckloses Herumwühlen in dem rechnerischen Material erscheinen.

In dem uns vorliegenden Buche haben wir nun in den Aufgaben, welche wir zur ersten oder zweiten Kategorie rechnen würden, die also praktisch oder theoretisch interessant sein möchten, eine recht karge Ausbeute gefunden.

Häufiger sind Aufgaben wie 37, S. 24: Der aus dem Boden hervorstehende Theil eines Kilometersteines ist ein Cylinder, der Theil im Boden ein Würfel, dessen Kante dem Durchmesser des Cylinders gleich ist, die Gesammtoberfläche (!) und Höhe ist gegeben, ferner das specifische Gewicht, gesucht wird das absolute. — Solche Aufgaben sind unzweifelhaft nicht in die ersten der obigen beiden Kategorien einzureihen.

S. 23 Aufg. 34 finden wir die Aufgabe: Die Summe der Seitenflächen eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen Grundkanten a, b, c sind, ist n-mal so gross als die Grundfläche. Wie gross ist Oberfläche und Inhalt des dem Prisma umschriebenen Cylinders?

Diese Aufgabe hat einer naheliegenden Beziehung zum Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises wegen wohl eine geometrisch interessante Seite; doch wird darauf nicht, auch nicht in der Auflösung hingewiesen. An letzterer Stelle ist es sogar beim ersten Zusehen zweifelhaft, ob das Wurzelzeichen blos dem Zähler oder auch dem Nenner gelten soll.

Als grober Fehler fällt S. 13 die Angabe des Inhalts eines regelmässigen Dreiecks mit der Kante a zu $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$ auf; doch scheint nach der richtigen Formel gerechnet zu sein. Freilich stimmt das Resultat

beim ersten Beispiel doch nicht, woran ein anderer Druckfehler schuld sein wird.

Falsch ist ferner die Formel 20 S. 51, wonach $sin\frac{\alpha}{2}$ an Stelle von $cos\frac{\alpha}{2}$ gesetzt ist. Hier wird nun auch nach der falschen Formel munter gerechnet und der Verfasser wundert sich nicht, dass er ein Dreieck mit den Seiten 25, 28, 17 als stumpfwinkliges erhält und der stumpfe Winkel gar der nicht grössten Seite 25 recht behaglich gegenüberliegt.

Es pflegt sich eben bitter zu rächen, wenn man die geometrische Anschauung vernachlässigt und sich in den gedankenlosen Calcul stürzt.

Die Anzahl der Aufgaben beträgt nach meiner Zählung ungefähr 500, die Seitenzahl 127.

Es ist unangenehm, dass im Druck das Meter bezeichnende m nicht von dem sonstigen *m* unterschieden ist.

Druck und Papier sind wenig erfreulich.

K. Schwering.

Lehrbuch der Elementargeometrie von J. Henrici, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. Zweiter Theil: Perspectivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Grössen. Pensum der Secunda (nebst weiteren Ausführungen für Prima). Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem Kärtchen. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1882. VIII, 242 S.

Wir haben S. 139 des vorigen Bandes über den ersten Theil dieses neuen Schulbuches berichtet. Wir können dem heute uns vorliegenden zweiten Theile in gewiss nicht minderem Grade die Eigenthümlichkeit des Ganges, die Strenge der Beweise, die mit dieser Strenge verbundene Eleganz nachrühmen. Die sämmtlichen Vorzüge entspringen einer einzigen Quelle. Die Verfasser haben fortwährend das Bestreben im Auge, nicht vom Einzelnen zum Allgemeinen, sondern vom Allgemeinen zum Einzelnen überzugehen. Was der Referent über Pasch's Vorlesungen über neuere Geometrie als für jenes Werk bezeichnend, als für jeden Leser beherzigenswerth hervorhob, das haben die Herren Henrici und Treutlein aus sich heraus gleichfalls als wesentliche Erneuerung des geometrischen Lehrganges erkannt, und ist gleichwohl ihr Gang von dem des ebengenannten Buches verschieden, so zeigt uns diese Verschiedenheit nur, dass dem gleichen Endziele auf mehr als einem Wege zugestrebt werden kann. Ueber die Schulfähigkeit, wenn wir uns dieses Wortes bedienen dürfen, muss wieder die Erfahrung das Urtheil sprechen. Nur eine Bemerkung dürfen wir uns erlauben: dass ein Urtheil gegen das

Buch noch lange nicht begründet ist, wenn insbesondere ältere und dadurch dem neuen Wachsthum der gesammten Mathematik einigermassen fremd gegenüberstehende Lehrer Nichts mit demselben zu leisten vermöchten. Sind sie doch dem Buche gegenüber in entschieden ungünstigerer Lage, als die Secundaner und Primaner, welche sie zu unterrichten haben. Diese wissen noch nicht, was sie erlernen sollen, und erlernen es, nach welcher Methode man auch verfahre, mit annähernd gleicher Mühe. Der ältere, neuen Lernens nachgerade entwöhnte Lehrer wird sich genöthigt finden, nicht blos neue Begriffe in sich aufzunehmen, sondern auch alte zu verabschieden, und Nichts lernt sich schwerer, als das Vergessen.

Cantor.

Ueber graphische Rectification von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Von Chr. Nehls, Wasserbau-Director. Hamburg 1882, Verlag von Paul Jenichen. 37 S. und 2 Figurentafeln.

Die Näherungsverfahren zur Erlangung einer auf der Berührungslinie an einen Endpunkt eines Kreisbogens aufgetragenen, dem Kreisbogen selbst an Länge gleichen Strecke, welche der Verfasser schildert, sind verschiedener Art. Erstlich trägt er eine kleine Strecke mittels des Zirkels auf dem Bogen herum und ebenso oft auf der genannten Berührungslinie. Der Bogen wird dabei als geradliniges Polygon aufgefasst, dessen Länge also zu klein gefunden, und zwar, wenn l die wirkliche Länge, s die Bogensehne, r den Halbmesser bedeutet, etwa als $l\left(1-\frac{1}{24}\frac{s^2}{r^2}\right)$, vorausgesetzt, dass l nicht grösser als $\frac{9}{4}\frac{r^2}{s^2}$ ist.

Eine zweite Methode ist folgende. An den Kreisbogen AB werde in A die Berührungslinie gelegt und auf ihr $AL=l$ aufgetragen. Durch L und B gehen Kreisbogen, deren Mittelpunkte auf der Halbirungssenkrechten der BL liegen, z. B. in D, dem Durchschnittspunkte dieser Halbirungssenkrechten mit der AL. Kennt man daher D, so hat man von hier aus nur $DL=DB$ aufzutragen, um den Punkt L, also die Länge AL zu erhalten. Ein Näherungswerth von AD ist aber $r.tg\frac{\varphi}{2}$, wo φ den Winkel BAL bedeutet, den die Bogensehne s mit der oft erwähnten Berührungslinie AL bildet. Ein anderer Mittelpunkt eines durch L und B gehenden Kreisbogens, der also gleichfalls L leicht finden lässt, ist C, der Durchschnittspunkt der Halbirungssenkrechten der BL mit der verlängerten Sehne BA. Für die Auffindung dieses C sind zwei Näherungswerthe entwickelt: $AC=r.sin\,\varphi$ und $AC=r.sin\frac{\varphi}{2}$.

Ein drittes Verfahren endlich benutzt die Spirale, deren Gleichung in Polarcoordinaten $\varrho = l.\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ lautet. Diese Betrachtung ist übrigens, wie der Verfasser selbst angiebt, einer von Herrn Scheffler bereits veröffentlichten nahe verwandt. Eine gedrängte Beschreibung des Verfahrens dürfte sich nicht so leicht liefern lassen, wie in den beiden erörterten Fällen. Unsere kurze Notiz wird übrigens schon genügen, auf die Abhandlung aufmerksam zu machen, welche viel Interessantes enthält. Die Richtigkeit des Druckes lässt leider Manches zu wünschen übrig, insbesondere treten die Buchstaben u und n wiederholt in bedenklicher Weise für einander ein.

Cantor.

Transporteur und Massstab zum Gebrauch beim Unterricht in Planimetrie und Trigonometrie, herausgegeben von Professor Dr. Mauritius. 4. Aufl. Coburg 1882, J. G. Riemann'sche Hofbuchhandlung.

Zum Preise von 75 Pfennigen bietet die Verlagshandlung dem Käufer einen rechten Winkel, dessen Schenkel als Massstäbe abgetheilt sind, einen Transporteur, auf dessen Rückseite ein Transversalmassstab aufgezeichnet ist, beide aus Pappe deutlich und verhältnissmässig fest hergestellt. Dazu kommt eine kleine kreisrunde durchsichtige Transporteurscheibe mit Gradtheilung, eine Gebrauchsanweisung auf 7 Druckseiten, endlich auf der Innenseite des Umschlages eine beträchtliche Anzahl wichtiger Constanten und Formeln für den Unterricht in Geometrie, Physik und Chemie. Wir glauben diese ebenso wohlfeilen, als zweckmässigen kleinen Apparate Lehrern und Schülern empfehlen zu dürfen.

Cantor.

Dei principali metodi in geometria e in ispecial modo del metodo analitico. Prelezione al corso di geometria analitica letta il giorno 10 Dicembre 1881 dal Dr. Giuseppe Veronese professore straordinario nella R. Università di Padova. Verona e Padova 1882. 32 S.

Der Verfasser, welcher noch in jungen Jahren stehend den Lehrstuhl bestiegen hat, der durch den Tod von Bellavitis verwaist war, begann seine Vorlesungen über analytische Geometrie mit einer Einleitungsrede, welche durch den Druck veröffentlicht vor uns liegt. Es ist eine übersichtliche Schilderung der wesentlichsten geometrischen Methoden der älteren und neueren Zeit, die auf die Studirenden wohl anregend gewirkt haben mag. Wer über die ersten Studiensemester hinaus ist, wird kaum Neues in dem Schriftchen finden, weder neue Thatsachen,

noch neue Anschauungen. Wunder nehmen muss, dass bei dem Bestreben, den Erfindern der verschiedenen Methoden gerecht zu werden, welches in erfreulicher Weise das Ganze durchzieht, der Name Hesse's auch nicht ein einziges Mal genannt ist.

CANTOR.

Elemente der darstellenden Geometrie für Realgymnasien und Ober-Realschulen von AUGUST SCHMIDT, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Wiesbaden. Die orthogonale Projection. Nebst eingeheftetem Atlas von 8 Tafeln mit 108 Figuren. Wiesbaden 1882, bei J. F. Bergmann. XIII, 229 S.

Das Realgymnasium zu Wiesbaden war die Stätte, von welcher aus oftmals namhafte Mathematiker ihre Wirksamkeit übten. An ihm lehrte J. H. T. Müller. In seinen Programmen veröffentlichte Herr Unverzagt seine ersten Abhandlungen. Dort brachte E. Hildenbrand die darstellende Geometrie zum Range eines regelmässig behandelten Unterrichtsstoffes. Herr Schmidt, früher Schüler der gleichen Anstalt, als deren Lehrer er jetzt thätig ist, hat der Aufgabe sich unterzogen, die Anfänge der darstellenden Geometrie der Hauptsache nach in der durch Hildenbrand eingeführten Vortragsweise einer grösseren Oeffentlichkeit zu übergeben. Er liefert uns damit ein Bild von dem, was wenigstens den Schülern eines Realgymnasiums seit fast 20 Jahren mit Erfolg geboten worden ist, und was, ohne die Streitfrage, ob, was an einem Orte möglich ist, aller Orten geschehen kann, endgiltig beantworten zu wollen, jedem Lehrer von Interesse sein wird. Zu den Eigenthümlichkeiten, welche das Buch auszeichnen, gehört neben einer streng durchgeführten einheitlichen Bezeichnung, die das Lesen, also auch das Lernen ungemein erleichtert, namentlich auch die Art, wie die Lage einer begrenzten Strecke und die eines ebenen Vielecks im Raume bestimmt wird. Im ersteren Falle (S. 69) bedient sich Herr Schmidt mit Erfolg der Coordinaten des Mittelpunktes der Strecke, im zweiten Falle (S. 90 und 94) der sogenannten Hauptgeraden des Vielecks, worunter die Senkrechte aus einem gegebenen Punkte der Vielecksebene auf die Spur dieser Ebene in einer der Bildebenen verstanden ist. Wir möchten ferner auf einen insbesondere für den künftigen Mineralogen sehr nützlichen Abschnitt über eine Anzahl von Krystallformen (S. 128—147) hinweisen. Von den Kegelschnitten ist an verschiedenen Orten die Rede. In der Projectionslehre erscheint die Ellipse (S. 75) als Projection eines Kreises, und der Schüler lernt bei dieser Gelegenheit die Haupteigenschaften der Ellipse aus denen des projicirten Kreises ableiten. Wir möchten dabei bemerken, dass hier die Entwickelungen auf S. 84 der Ergänzung bedürfen, indem zu zeigen ist — was leicht geschehen kann —, dass bei den vor-

genommenen Wurzelausziehungen die Vorzeichen gerade so zu wählen sind, wie es geschehen ist. Später treten die Kegelschnitte als solche bei der Betrachtung des durch eine Ebene geschnittenen Kreiskegels auf (S. 152—155). Die Ellipse entsteht, wenn die Schnittebene keiner Seitenlinie des Kegels parallel ist; die Hyperbel, Parabel, wenn die Schnittebene zwei Seitenlinien, einer Seitenlinie parallel ist. Auch hier sind wieder Folgerungen auf Eigenschaften der entstehenden Curven gezogen, so dass der Schüler, welcher das gleiche Lehrpensum später mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie behandelt findet, die Kenntniss vieler der zu beweisenden Sätze und auch die der drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten schon mitbringt. Den Durchdringungsaufgaben ist (S. 202 flgg.) ein letzter Abschnitt des Buches gewidmet. Die beigegebenen Figuren sind in einer die Verlagshandlung ehrenden Weise hergestellt.

CANTOR.

Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, für den Unterricht an technischen Anstalten bearbeitet von HANS STAUDACHER, Professor für Mathematik und Physik am königl. Realgymnasium Speier. München 1882, Schulbücherverlag von R. Oldenbourg. VIII, 169 S. mit 19 Figuren im Texte.

Das Wort „Algebraische Analysis" ist von bekannter Dehnsamkeit. Bücher wie Vorlesungen, welche unter diesem Namen angekündigt werden, unterscheiden sich von einander derart, dass Keines dem Andern als Massstab dienen kann, Jedes vielmehr für sich beurtheilt werden muss, ob es neben der elementaren Reihentheorie, welche allerdings niemals fehlt und insofern als Hauptstoff bezeichnet werden darf, noch anderweitige interessante Capitel behandelt, und ob die Behandlungsweise unter Festhaltung des elementaren Charakters darnach angethan ist, den Schüler frühzeitig an diejenigen Forderungen der Strenge zu gewöhnen, welche das kennzeichnende Merkmal der heutigen Mathematik bilden. Herrn Staudacher's neues Buch, entstanden aus Vorträgen an den beiden oberen Classen des Realgymnasiums zu Speier, kann als Beleg unserer Behauptung dienen, zumal wenn man es mit Gӧtting's Einleitung in die Analysis (s. Bd. XXVI dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abthlg. S. 71—73) vergleichen wollte. Kaum eine entfernte Aehnlichkeit zeigen Beider Werke, und doch besitzt jedes von beiden Vorzüge, die es empfehlen. Dem heute uns vorliegenden Bande können wir insbesondere nachrühmen, dass es der Fassungskraft von Gymnasialschülern, wenn auch der obersten Jahresabtheilungen, namentlich am Anfange vollauf Rechnung trägt und nur ganz allmälig eine etwas schwerer verständliche Behandlungsweise eintreten lässt. Diesem Umstande sind wohl die glücklichen Ergebnisse zuzuschreiben, welche der Verfasser, wie seine

Vorrede uns mittheilt, bisher mit diesem Lehrgange erzielt hat, Ergebnisse, die wir mittels des Beispieles einzelner Schüler, welche aus Speier nach Heidelberg zum Studium der Mathematik kamen, mit Vergnügen bestätigen können. Ferner dürfen wir als unsere Vorlage vortheilhaft auszeichnend einige Untersuchungen erwähnen, die sonst übergangen zu werden pflegen. Sie bilden einen Theil des 3. und das ganze 13. Capitel. Dort ist wenigstens der Anfang einer Lehre von den endlichen Differenzen und Summen gegeben, hier am Ende des ganzen Bandes die Grundlage einer Lehre von den recurrenten Reihen. Der Theorie der Gleichungen, welche freilich meistens mit einigen ihrer Fundamentalsätze in die algebraische Analysis eingezogen wird, sind drei volle Capitel gewidmet: 7. Allgemeine Sätze über die höheren Gleichungen, 8. Auflösungen numerischer Gleichungen beliebigen Grades, 9. Allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades mit einem Anhang über Zerlegung einer rationalen Bruchfunction in Partialbrüche. Dass die Lehre von den complexen Zahlen auf Grundlage ihrer geometrischen Versinnlichung genügend berücksichtigt ist, dass Reihen mit complexen Hauptgrössen auf ihre Convergenz geprüft werden, ist glücklicherweise meistens selbstverständlich in gegenwärtig veröffentlichten Büchern. Erwähnenswerth ist, dass Herr Staudacher bei der Betrachtung der complexen Reihen den Begriff des Convergenzkreises einführt, mit welchem der Gymnasialschüler sonst wohl nur selten bekannt wird. Sollen wir auch auf einige Gegenstände hinweisen, die in diesem Buche übergangen sind, während sie in anderen Werken über algebraische Analysis vorkommen, so nennen wir neben den Kettenbrüchen, welche dem bayerischen Unterrichtsprogramme, das sie nicht enthält, zu Liebe ausgeschlossen wurden, auch die Lehre von den Productenfolgen und von den mit diesen nahe zusammenhängenden Bernoulli'schen Zahlen. Von den einzelnen Entwickelungen beabsichtigen wir nicht zu reden. Wir begnügen uns mit der allgemeinen Bemerkung, dass der sachkundige Leser vielfach Gelegenheit hat, kleinere oder grössere Abweichungen von der gewöhnlich betretenen Strasse zu bemerken, auf denen er meistens mit Vergnügen dem Verfasser folgen wird.

Cantor.

Einleitung in die Differential- und Integralrechnung von Dr. Moritz Pasch, Professor an der Universität zu Giessen. Verlag von B. G. Teubner. Leipzig 1882. 188 S.

Der Verfasser, dessen Bestreben dahin gerichtet ist, die einleitenden Begriffe der Infinitesimalrechnung fester zu bestimmen, als die meisten Werke für Anfänger es zu thun pflegen, geht in Anschluss an Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872), von der

Zahlenstrecke aus, d. h. von einer Anzahl positiver ganzer und gebrochener Zahlen, welche die wesentliche Eigenschaft besitzen, dass zu jeder Strecke A und zu jeder gegebenen Zahl ε eine Zahl x gefunden werden kann, welche selbst noch zu A gehört, während die Zahl $x+\varepsilon$ nicht mehr zur Strecke gehört, sie auch nicht begrenzt. Eine Zahl heisst nämlich Grenze einer Strecke, welche alsdann selbst rational genannt wird, wenn es unter den von der Strecke ausgeschlossenen Zahlen eine kleinste giebt, welche eben die Grenze ist; giebt es keine solche kleinste von der Strecke ausgeschlossene Zahl, so nennt man die Strecke irrational. Mit Zahlenstrecken kann unter Aufstellung genügender Definitionen auch gerechnet werden, und insbesondere kann jede Zahlenstrecke als n^{te} Potenz einer andern aufgefasst werden, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Die nächste Erweiterung ist sodann die zur Potenz einer Zahlenstrecke für einen selbst als Zahlenstrecke gegebenen Exponenten. Das Rechnen mit rationalen Zahlen bleibt als besonderer Fall in dem Streckenrechnen enthalten, da ja jede rationale Zahl als Grenze einer rationalen Strecke aufgefasst werden kann. Wird nun wieder statt Strecke Zahl gesagt, während die Begriffsbestimmung dieses letzteren Wortes sich gegen früher wesentlich verändert hat, so kann das Unendlichgrosse wie das Unendlichkleine, eine nach oben, beziehungsweise nach unten unbegrenzte Gruppe von Zahlen, eingeführt werden, während auch negative Zahlen den positiven an die Seite treten. Complexe Zahlen hat der Verfasser grundsätzlich von seinen Betrachtungen ausgeschlossen. Bei jeder Aufgabe treten Zahlengrössen auf, die innerhalb der Aufgabe ihren Werth behalten, verändern. Das sind die Constanten oder Parameter und die Variabeln der Aufgabe. Letztere, in gegenseitige Abhängigkeit gebracht, führen zur Function einer oder mehrerer Variabeln, zur Auswerthung der Function bei verschiedenen Annahmen für das Argument (dabei tritt S. 31 der Druckfehler auf, dass Z. 23 wiederholt f statt g steht), zur geometrischen Darstellung von Functionen. Es ist dabei gestattet, derartige Abschnitte der entstehenden Plancurve zu wählen, innerhalb deren zu jeder Abscisse nur eine einzige Ordinate gehört, d. h. eine eindeutige Function versinnlicht ist. Die Plancurve einer nicht geometrisch, sondern analytisch definirten Function herzustellen, gelingt nur annäherungsweise, wenn auch mit Einhaltung beliebiger Genauigkeit, und diese Ueberlegung leitet von selbst zum Begriffe des Grenzwerthes einer Function. Auch die Continuität der Function nebst ihren Unterbrechungen kommt jetzt zur Sprache und lässt Sätze ableiten, welche noch mehr als das Bisherige von dem abweichen, was Anfängern sonst geboten zu werden pflegt. So der Weierstrass'sche Satz: Ist die Function y stetig in dem ganzen Intervall mit Einschluss der Grenzen, und kann sie der Zahl γ beliebig nahe kommen, so erreicht sie den Werth γ mindestens für einen Werth

von x; so auch der Satz von der gleichmässigen Stetigkeit unter Anwendung dieses von Heine eingeführten Wortes. Zu jeder Function einer Variabeln kann die inverse Function gesucht werden. Nimmt die Function in dem ganzen Intervalle, in welchem sie betrachtet wird, jeden Werth einmal und nur einmal an, so theilt die inverse Function mit ihr die Eigenschaften der Stetigkeit, der Eindeutigkeit, des fortwährenden Ab- oder Zunehmens. Tritt aber innerhalb der Function ein bestimmter Werth mehr als einmal auf, ohne dass die Function constant ist, so zeigt sich die inverse Function mehrdeutig, und innerhalb der Function erscheinen extreme-Werthe, Maxima und Minima. Die algebraische Function wird sodann besprochen und gezeigt, dass dieselbe, nur wenn sie gebrochen ist, unendlich oder unbestimmt werden kann. Vielleicht hätte der Verfasser bei dem (S. 65) angeführten Beispiele der bei $r=1$, $s=1$ unbestimmt werdenden Function zweier Variabeln $\frac{r-s}{r^2-s}$ gut gethan, zu zeigen, wie die Werthe 1 und $\frac{1}{2}$ erscheinen, je nachdem man zuerst $r=1$, dann $s=1$, oder zuerst $s=1$, dann $r=1$ setzt. Nachdem ein starkes Drittel des Buches vollendet ist, erscheint das Differential und der Differentialquotient, über dessen Existenzfrage der Verfasser sich allerdings etwas bequem mit den Worten hinweghilft: „Man hat bemerkt, dass bei denjenigen Functionen, denen man weitaus am meisten begegnet und von denen der Functionsbegriff ursprünglich entnommen ist, der Differenzquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ einem Grenzwerthe zustrebt, wenn h sich dem Grenzwerthe Null nähert. Ein solches Verhalten setzen wir bei der Function $y=f(x)$ an der festgehaltenen Stelle x voraus und bezeichnen den Grenzwerth des Differenzquotienten mit y'." Die Betrachtung von y' als Ableitung führt, nachdem die Differentiation algebraischer Functionen gelehrt worden ist, zur Stammfunction y mit ihrer Constanten; als Unterschied zweier Stammfunctionen, und zum Beweise des Satzes $f(x+h)-f(x)=h.f'(x+\Theta h)$. Auch den Beziehungen zwischen Differentialquotient und Berührungslinien an Plancurven, vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten, Spitzen und Wendepunkten ist ein Paragraph gewidmet. Das bestimmte Integral erscheint darauf als Werth, den diejenige Stammfunction zur Ableitung y, welche bei $x=a$ verschwindet, unter der Voraussetzung $x=b$ annimmt; es entwickelt sich, unter Voraussetzung eines im ganzen Intervalle endlichen y, als Grenzwerth einer Reihensumme. Bei dieser Definition geht allmälig der Ursprung als Stammfunction einer Ableitung fast verloren, und die Integralfunction als solche kann mit ihren Eigenschaften untersucht werden. Der Rückweg zur Stammfunction führt zum unbestimmten Integral, zur Kenntniss von Exponentialfunction und Logarithmus; die Betrachtung der

Integralfunction verbindet sich mit der Lösung der geometrischen Probleme der Quadratur und der Rectification, die, auf den Kreis bezogen, trigonometrische Functionen und deren Inverse entstehen lassen. Von S. 134 an tritt im letzten, kleinsten Drittel des Buches die Untersuchung an Functionen mehrerer Variabeln näher heran. Allerdings ist nur in einem einzigen Paragraphen von partiellen Ableitungen, sowie von Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter für den Fall, dass solche gestattet ist, die Rede, in einem weiteren Paragraphen von unentwickelten Functionen. Die noch übrigen Paragraphen (S. 150—188) haben es mit unendlichen Reihen und deren Benutzbarkeit zu thun.

Wir haben uns damit begnügt, eine kaum mehr als blosse Ueberschriften enthaltende Uebersicht des in mehrfachen Beziehungen beachtenswerthen Buches zu geben. Wir vermuthen, es werde gleich uns der akademische Lehrer, welcher Infinitesimalrechnung zu lesen hat, mit Interesse diese und jene Entwickelung sich aneignen, sei es für Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, sei es, wie uns wahrscheinlicher deucht, für Vorlesungen über eine wissenschaftlich gehaltene Elementararithmetik und über algebraische Analysis, weil im eigentlichen College über Differential- und Integralrechnung der massenweise vorhandene Lehrstoff es unmöglich macht, so lange bei der Einleitung zu verweilen. Auch unseren Schülern möchten wir das Buch nicht während eines solchen Collegs in die Hände wünschen, um so lieber aber während der darauf folgenden Ferienzeit.

CANTOR.

Die Arithmetik und Algebra, für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von KARL KOPPE, Professor. 12. Auflage, bearbeitet von Dr. W. DAHL, Oberlehrer am Realgymnasium zu Braunschweig. Essen 1882, bei G. D. Bädeker. 254 S.

Der Herausgeber sagt uns in seiner Vorrede, der Anfänger bringe für umständliche theoretische Erörterungen weder Interesse, noch Verständniss mit; ihm genüge es, das allgemeine Gesetz auf dem Wege der Induction aus den seinem Anschauungskreise angehörenden Ziffernbeispielen abgeleitet zu haben, und daher dürfe, müsse der Anfangsunterricht in der Arithmetik auf allgemein geführte Beweise verzichten. Man kann die Frage, ob das, was dem Anfänger genügt, auch für den Anfänger genüge, unterdrücken, man kann, der Erfahrung des Schulmannes sich unterordnend, für den allerersten Unterricht eine Art der Erwerbung einer gewissen Summe von Kenntnissen dulden, welche mit dem landläufig gewordenen Ausdrucke „billig und schlecht“ bezeichnet werden darf; aber kann man so weit gehen, darein zu willigen, dass das in der

Hand des Schülers befindliche Lehrbuch (wie die Vorrede weiter sagt) sich einem solchen rasch vorwärts schreitenden Unterricht anpassen, dass auch hier alles Entbehrliche wegfallen müsse? Wer für die Bejahung sich zu entscheiden im Stande ist, wird der neuen Auflage des Koppe-schen Lehrbuches vielleicht noch befreundeter sich erweisen, als den früheren, denn der Rothstift ist von dem Bearbeiter kräftig gehandhabt worden. Wer aber, gleich dem Referenten, nur ein lautes Nein! auszusprechen vermag, wird vielmehr vor dem Gebrauche des Buches namentlich zum Selbstunterricht warnen können. Einen rühmlichen Gegensatz gegen die sonstige Anlage bilden, wie wir unparteiischer Weise hervorheben wollen, die §§ 159a, 159b, 160a, 160b, 161, in welchen von der Einführung fremder Gleichungswurzeln gründlicher gehandelt wird, als es sonst in Elementarwerken der Fall zu sein pflegt.

CANTOR.

Die Anfangsgründe der Determinanten in Theorie und Anwendung. Zur Selbstbelehrung leichtfasslich bearbeitet von Dr. H. KAISER in Dieburg. Wiesbaden, Verlag von J. F. Bergmann. 1882. VII, 41 S.

Eine, wie aus der Seitenzahl zu entnehmen ist, kurz gefasste Zusammenstellung der nothwendigsten Determinanteneigenschaften bis zum Multiplicationstheoreme und der Entstehung der adjungirten Determinanten einschliesslich. Zwei weitere Abschnitte lehren die Auflösung von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, sowie die Bildung der Resultante homogener Gleichungen und einige wenige Anwendungen auf Geometrie, insbesondere die Darstellung der Gleichungen von Geraden, von Ebenen und von Kegelschnitten, welche durch so viel Punkte hindurchgehen, als zur Bestimmung des betreffenden Raumgebildes erforderlich sind. Auf besondere Strenge macht das kleine Büchelchen keinen Anspruch, es setzt vielmehr mitunter als selbstverständlich voraus, was in grösseren Werken besonders bewiesen zu werden pflegt. Eigentlich Unrichtiges ist uns dagegen nicht aufgestossen.

CANTOR.

Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker und Kartographen. Ein Beitrag zur Gelehrten-Geschichte des XVI. Jahrhunderts von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. Separatabdruck aus den Abhandlungen der königl. böhm. Gesellsch. der Wissensch. VI. Folge 11. Band. (Mathem.-naturwissensch. Classe Nr. 4.) Prag 1882. 136 S. 4°.

Peter Bienewitz, genannt Apianus (1495—1552) und dessen Sohn Philipp (1531—1589) sind zwei Persönlichkeiten, deren wissenschaftliche Lebensgeschichte wohl im Stande ist, ein höheres Interesse in Anspruch zu nehmen. Gehört doch der Vater, dessen Leben in ein-

facher, ruhiger Weise verlief, zu den fruchtbarsten Schriftstellern seiner Zeit, dessen Werke noch heute den Leser manche wichtige Stelle erkennen lassen; und sind doch die Schicksale des Sohnes, von dessen Gelehrtenthätigkeit fast ausschliesslich eine grosse Specialkarte von Bayern in 24 Blättern auf uns gekommen ist, so spannend und mit der Geschichte der kirchlichen Unduldsamkeit von Katholiken und Protestanten des XVI. Jahrhunderts so eng verquickt, dass auch der Nichtmathematiker die Zeit nicht für verloren achten mag, welche er darauf verwendet, sich mit Philipp's Erlebnissen zu befreunden. Herr Günther hat beiden Männern eine genaue Würdigung zukommen lassen, indem er die uns vorliegende grössere Abhandlung der Oeffentlichkeit übergab. Persönlich sympathisirt er offenbar weit mehr für Philipp, als für Peter Apian, eine Vorliebe, welche er auch seine Leser theilen lässt. Für den eigentlichen Fachmann, den Mathematiker, wird gleichwohl Peter Apianus die bedeutendere und wichtigere Persönlichkeit bleiben, von dessen Arbeiten er Kenntniss zu nehmen wünscht. Es ist zu bedauern, dass Herr Günther seine Referate in dieser Beziehung nicht durch Figuren unterstützt hat, deren Mangel z. B. S. 31—32 sehr störend wirkt, wo (vielleicht durch Ausfallen einzelner Wörter beim Drucke?) die Deutlichkeit Einiges zu wünschen übrig lässt.

Cantor.

Bemerkung zu S. 5 dieses Jahrganges.

* Herr Provinzialschulrath Dr. Kruse zu Danzig macht mich darauf aufmerksam, dass ich auf S. 5 meiner Abhandlung über eine Handschrift der königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden in der 2. und 3. Zeile des Beweises der Formel des Heron dem Manuscript folgend fälschlich *k* statt *r* habe setzen lassen. Der Fehler ist um so verzeihlicher, als *k* und *r* zwei gleiche Grössen bedeuten. Es muss heissen „*et ad* bc r“ und „*quod continet* tsr“, und bitte ich, so verbessern zu wollen.

Thorn. M. Curtze.

Bibliographie

vom 16. December 1882 bis 31. Januar 1883.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayer. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1882, Heft 5. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Cl. II. Abth. 86. Bd. 2. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. KLEIN u. A. MAYER. 21. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet v. J. A. GRUNERT, fortgesetzt von R. HOPPE. 69. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Acta mathematica; Zeitschrift, herausgeg. v. G. MITTAG-LEFFLER. 1. Bd. 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. pro compl. 12 Mk.

Annalen der Physik und Chemie (begründet v. POGGENDORFF), herausgegeben v. G. WIEDEMANN. Jahrg. 1882, Nr. 13. (2. Decemberheft.) Leipzig, Barth. 4 Mk. 80 Pf.

——, Jahrg. 1883, 1. Heft. Ebendas. pro compl. 31 Mk.

Repertorium der Physik, herausgegeben v. F. EXNER. 19. Bd. 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 24 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von A. KRÜGER. 104. Bd. (24 Nrn.), Nr. 2473. Hamburg, Mauke S. pro compl. 15 Mk.

Elektrotechnische Zeitschrift, redig. v. E. ZETZSCHE u. A. SLABY. 4. Jahrg. 1883 (12 Hefte). Heft 1. Berlin, Springer. pro compl. 20 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. 32. Jahrg. 1. Heft, Januar bis Juni 1882. Herausgegeben v. K. FRICKE. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

HAMILTON, W., Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. GLAN. 1. Bandes 3. Thl. Leipzig, Barth. 8 Mk.

HERTTER, F., Zeichnende Geometrie f. planimetr. Repetit. 1. u. 2. Abtheilg. Stuttgart, Metzler. 4 Mk. 50 Pf.

LUKE, A., Sammlung trigonometrischer Aufgaben nebst Anleitung zur Lösung derselben. 1. Heft: Goniometrische Aufgaben. Halle, Schmidt. 2 Mk. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Vogler, Ch. A., Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

Oppolzer, Th. v., Beitrag zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Lehmann, P., Tafeln zur Berechnung der Mondphasen, der Sonnen- und Mondfinsternisse. Berlin, Verl. d. statist. Bureaus. 3 Mk.

Oppolzer, Th. v., Note über eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsterniss. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

Scheiner, J., Untersuchungen über den Lichtwechsel Algol's nach den Mannheimer Beobachtungen von Prof. Schönfeld. Bonn, Behrendt. 1 Mk.

Rive, L. de la, Etude sur les projections des angles sphériques qui déterminent le lieu des plans sur lesquels la projection d'un angle est constante. Basel, Georg. 3 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Tromholt, S., Ueber die vom Monde abhängige Periode des Nordlichts. Christiania, Dybwad. 1 Mk. 50 Pf.

Lenz, R., Ueber das galvanische Leitungsvermögen alkoholischer Lösungen. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 70 Pf.

Soret, L. et E. Sarasin, Sur la polarisation rotatoire du Quarz. Basel, Georg. 2 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln.

Von

Prof. Dr. H. WEISSENBORN.

Ueber denselben Gegenstand ist in der Zeitschr. f. Math u. Phys. von Schlömilch, Cantor und Kahl, Jahrg. XXVI, 1881, hist.-lit. Abth. S. 121—126 eine lesenswerthe Abhandlung von Heilermann erschienen. Jedoch sind hier einige Gedanken nicht so ausgeführt, wie sie es wohl verdienten, und Folgerungen, welche sich ergeben, nicht gezogen. Beides zu thun ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.

Herr H. verallgemeinert in seiner genannten Schrift einen von Theon Smyrnaeus überlieferten, in Cantor's Geschichte der Mathematik S. 369 erwähnten Satz über Seiten- und Durchmesserzahlen. Sind nämlich S, D und a beliebige positive Zahlen, S und D ganz oder unecht gebrochen, a ganz, echt oder unecht gebrochen, und bildet man weitere Zahlenpaare $S_1, D_1;\ S_2, D_2;\ \ldots\ S_n, D_n$ nach folgendem Bildungsgesetze:

$$S_1 = S + D, \quad D_1 = aS + D,$$
$$S_2 = S_1 + D_1, \quad D_2 = aS_1 + D_1,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

allgemein

$$1)\qquad S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = aS_{n-1} + D_{n-1},$$

so ist

$$aS_n^2 = aS_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + aD_{n-1}^2,$$
$$D_n^2 = a^2S_{n-1}^2 + 2aS_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}^2,$$

folglich

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)(D_{n-1}^2 - aS_{n-1}^2).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung findet man leicht

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^n.(D^2 - aS^2)$$

und durch Division mit S_n^2

$$2)\qquad \frac{D_n^2}{S_n^2} = a + (1-a)^n \cdot \frac{D^2 - aS^2}{S_n^2}.$$

Herr H. bemerkt hierzu: „Wenn hier die Zahlen a, D, S kleine Werthe haben, so wird das zweite Glied rechts mit wachsendem Zeiger n wegen

des zunehmenden Divisors S_n^2 immer kleiner. Daher wird durch diese Gleichung die beliebige Zahl a in das Quadrat $\frac{D_n^2}{S_n^2}$ verwandelt oder $\frac{D_n}{S_n}$ als Näherungswerth von $\sqrt{a}$ gefunden. Wenn dazu $a > 1$ ist, so haben diese Werthe auch noch die wichtige Eigenschaft, dass sie abwechselnd zu gross und zu klein sind, also die gesuchte Grösse a in immer engere Grenzen einschliessen.“ Untersuchen wir zunächst die hier angeführten Verhältnisse etwas genauer.

Die Gleichung 2) lautet also:

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a + (1-a)^n \cdot \frac{D^2 - aS^2}{S_n^2}.$$

Ist nun I. $a > 1$, $D^2 - aS^2 > 0$, so ist $1-a$ negativ, $(1-a)^n$ also positiv oder negativ, je nachdem n eine gerade Zahl $2m$ oder eine ungerade $2m+1$ ist; $D^2 - aS^2$ ist constant und S_n wächst mit zunehmendem n, der Werth B des Bruches $\frac{D^2 - aS^2}{S_n^2}$ wird daher immer kleiner. Es ist also

$$\frac{D_{2m}^2}{S_{2m}^2} = a + B, \quad \frac{D_{2m+1}^2}{S_{2m+1}^2} = a - B,$$

folglich

$$3) \qquad \frac{D_{2m}}{S_{2m}} > \sqrt{a} > \frac{D_{2m+1}}{S_{2m+1}}.$$

Ist II. $a > 1$, $D^2 - aS^2 = 0$, so ist offenbar für jedes n

$$\frac{D_n}{S_n} = \sqrt{a}.$$

Ist III. $a > 1$, $D^2 - aS^2 < 0$, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, wie im Falle I.

$$4) \qquad \frac{D_{2m+1}}{S_{2m+1}} > \sqrt{a} > \frac{D_{2m}}{S_{2m}}.$$

Ist IV. $a = 1$, so ist für jeden Werth von n

$$\frac{D_n}{S_n} = \sqrt{a}.$$

Ist V. $a < 1$, $D^2 - aS^2 > 0$, so ist $1-a$ positiv, also für jedes n

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a + B,$$

mithin

$$5) \qquad \frac{D_n}{S_n} > \sqrt{a}.$$

Ist VI. $a < 1$, $D^2 - aS^2 = 0$, so ist wieder für jedes n

$$\frac{D_n}{S_n} = \sqrt{a}.$$

Ist VII. $a < 1$, $D^2 - aS^2 < 0$, so ist $(1-a)^n \cdot \frac{D^2 - aS^2}{S_n^2}$ stets negativ, also für jedes n

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a - B,$$

mithin

6) $$\frac{D_n}{S_n} < \sqrt{a}.$$

Wie man sieht, bieten insbesondere die Regeln 3), 4), 5), 6) das ausgiebigste Mittel, aus einer Zahl näherungsweise die Quadratwurzel zu ziehen, nach Bedürfniss oder Wunsch. Will man abwechselnd zu grosse und zu kleine Werthe, so dass der wahre in immer engere Grenzen eingeschlossen wird, so wird man sich der Formeln 3) oder 4) bedienen, je nachdem man mit einem zu kleinen oder zu grossen Näherungswerthe zu beginnen beabsichtigt. So erhält man aus 3):

für $S = 1$, $D = 2$, $a = 2$ als Werthe von $\sqrt{2}$ nach einander

7) 1. $\frac{4}{3}$, 2. $\frac{10}{7}$, 3. $\frac{24}{17}$, 4. $\frac{58}{41}$, 5. $\frac{140}{99}$, 6. $\frac{338}{239}$, 7. $\frac{816}{577}$, 8. $\frac{1970}{1393}$, 9. $\frac{4756}{3363}$, 10. $\frac{11482}{8119}$, 11. $\frac{27720}{19601}$, 12. $\frac{66922}{47321}$;

für $S = 1$, $D = 2$, $a = 3$ als Werthe von $\sqrt{3}$

8) 1. $\frac{5}{3}$, 2. $\frac{7}{4}$, 3. $\frac{19}{11}$, 4. $\frac{26}{15}$, 5. $\frac{71}{41}$, 6. $\frac{97}{56}$, 7. $\frac{265}{153}$, 8. $\frac{362}{209}$, 9. $\frac{989}{571}$, 10. $\frac{1351}{780}$, 11. $\frac{3691}{2131}$, 12. $\frac{10089}{5829}$,

in welchen sich die Werthe geradzahliger Ordnung von der oberen, die ungeradzahliger Ordnung von der unteren Grenze her den Grössen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ nähern.

Aus 4) ergeben sich:

für $S = 1$, $D = 1$, $a = 2$ als Werthe von $\sqrt{2}$ nach einander

9) 1. $\frac{3}{2}$, 2. $\frac{7}{5}$, 3. $\frac{17}{12}$, 4. $\frac{41}{29}$, 5. $\frac{99}{70}$, 6. $\frac{239}{169}$, 7. $\frac{577}{408}$, 8. $\frac{1393}{985}$, 9. $\frac{3363}{2378}$, 10. $\frac{8119}{5741}$, 11. $\frac{19601}{13860}$, 12. $\frac{47321}{33461}$;

für $S = 1$, $D = 1$, $a = 3$ als Werthe von $\sqrt{3}$

10) 1. 2, 2. $\frac{5}{3}$, 3. $\frac{7}{4}$, 4. $\frac{19}{11}$, 5. $\frac{26}{15}$, 6. $\frac{71}{41}$, 7. $\frac{97}{56}$, 8. $\frac{265}{153}$, 9. $\frac{362}{209}$, 10. $\frac{989}{780}$, 11. $\frac{1351}{780}$, 12. $\frac{3691}{2131}$,

in welchen sich die Werthe ungeradzahliger Ordnung von der oberen, die geradzahliger Ordnung von der unteren Grenze her den Grössen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ nähern.

Wünscht man Werthe zu haben, welche von der oberen Grenze nach $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ convergiren, so setze man für a die reciproken Zahlen $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$, und man erhält nach 6):

für $S = 2$, $D = 1$, $a = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ grösser als

$$\frac{2}{3},\ \frac{7}{10},\ \frac{12}{17},\ \frac{41}{58},\ \frac{70}{99},\ \frac{239}{338};$$

$$\text{für } S=2,\ D=1,\ a=\tfrac{1}{3}\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ grösser als}$$

$$\tfrac{5}{9},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{19}{33},\ \tfrac{15}{26},\ \tfrac{71}{123},\ \tfrac{56}{97},$$

also umgekehrt

11) 1. $\frac{3}{2}$, 2. $\frac{10}{7}$, 3. $\frac{17}{12}$, 4. $\frac{58}{41}$, 5. $\frac{99}{70}$, 6. $\frac{338}{239}$, sämmtlich $>\sqrt{2}$;

12) 1. $\frac{9}{5}$, 2. $\frac{7}{4}$, 3. $\frac{33}{19}$, 4. $\frac{26}{15}$, 5. $\frac{123}{71}$, 6. $\frac{97}{56}$, sämmtlich $>\sqrt{2}$.

Wünscht man Werthe zu haben, welche von der unteren Grenze nach $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ convergiren, so setze man wieder für a die reciproken Zahlen $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{3}$, und man erhält nach 5):

$$\text{für } S=1,\ D=1,\ a=\tfrac{1}{2}\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ kleiner als}$$

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{7},\ \tfrac{17}{24},\ \tfrac{29}{41}\cdot\ \tfrac{129}{140},\ \tfrac{199}{269},$$

$$\text{für } S=1,\ D=1,\ a=\tfrac{1}{3}\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ kleiner als}$$

$$\tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{7}{12},\ \tfrac{11}{19},\ \tfrac{26}{45},\ \tfrac{41}{71},$$

also umgekehrt

13) 1. $\frac{4}{3}$, 2. $\frac{7}{5}$, 3. $\frac{24}{17}$, 4. $\frac{41}{29}$, 5. $\frac{140}{129}$, 6. $\frac{299}{199}$, sämmtlich $<\sqrt{2}$,

14) 1. $\frac{3}{2}$, 2. $\frac{5}{3}$, 3. $\frac{12}{7}$, 4. $\frac{19}{11}$, 5. $\frac{45}{26}$, 6. $\frac{71}{41}$, sämmtlich $<\sqrt{3}$.

Da, wie aus 2) hervorgeht, der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\frac{D_n}{S_n}=\sqrt{a}$ setzt, um so geringer ist, je weniger a von 1 verschieden ist, da also dann die Werthe am schnellsten convergiren, so ist es angezeigt, die Rechnung demgemäss einzurichten. Man setze also

$$a=\frac{b^2\pm c}{d^2},$$

wo b^2 und d^2 zwei Quadratzahlen ($d^2=1$ nicht ausgeschlossen) und c eine möglichst kleine Zahl ist. Denn dann ist

$$a=\frac{b^2\pm c}{d^2}=\frac{b^2}{d^2}\left(1\pm\frac{c}{b^2}\right)=\frac{b^2}{d^2}\cdot\frac{b^2\pm c}{b^2},$$

also

$$\sqrt{a}=\frac{b}{d}\sqrt{\frac{b^2\pm c}{b^2}}.$$

Man setze nun

$$\frac{b^2\pm c}{b^2}=a',$$

berechne $\sqrt{a'}$ und multiplicire die erhaltenen Werthe mit $\frac{b}{d}$.

Um z. B. rasch convergirende Zahlen für $\sqrt{2}$ zu finden, setze man

$$2=\frac{50}{25}=\frac{49+1}{25}=\frac{49}{25}\left(1+\frac{1}{49}\right)=\frac{49}{25}\cdot\frac{50}{49},$$

also

$$\sqrt{2}=\tfrac{7}{5}\cdot\sqrt{\tfrac{50}{49}}.$$

Für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{50}{49}$ hat man nun den Fall I. und erhält für $\sqrt{\frac{50}{49}}$

$$\tfrac{149}{147},\ \tfrac{299}{296},\ \tfrac{29451}{29155},\ \tfrac{59201}{58606},\ \tfrac{5831149}{5772543},\ \tfrac{11721499}{11603692},$$

also für $\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$

15) 1. $\frac{149}{105}$, 2. $\frac{2093}{1480}$, 3. $\frac{29451}{20825}$, 4. $\frac{414407}{293030}$, 5. $\frac{5831149}{4123245}$, 6. $\frac{82050493}{58018460}$.

Für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{50}{49}$ hat man den Fall III. und erhält für $\sqrt{\frac{50}{49}}$

$$\tfrac{99}{98},\ \tfrac{199}{197},\ \tfrac{19601}{19404},\ \tfrac{39401}{39005},\ \tfrac{3880899}{3841894},\ \tfrac{7801199}{7722793},$$

also für $\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$

16) 1. $\frac{99}{70}$, 2. $\frac{1393}{985}$, 3. $\frac{19601}{13860}$, 4 $\frac{275807}{195025}$, 5. $\frac{3880899}{2748710}$, 6. $\frac{54608393}{38613965}$.

Hätte man gesetzt $2=\frac{128}{64}=\frac{121+7}{64}\left(1+\frac{7}{121}\right)=\frac{121}{64}\cdot\frac{128}{121}$, also

$$\sqrt{2}=\frac{11}{8}\cdot\sqrt{\frac{128}{121}},$$

so hätte man für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{128}{121}$ nach Fall I. die beiden ersten Näherungswerthe von $\sqrt{2}$:

$$1.\ \tfrac{377}{264},\quad 2.\ \tfrac{8371}{5920},$$

und für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{128}{121}$ nach Fall III. als die beiden ersten erhalten

$$1.\ \tfrac{249}{176},\quad 2.\ \tfrac{5555}{3928}.$$

Noch schneller convergirende Werthe hätte die Annahme $2=\frac{1682}{841}$ $=\frac{1681+1}{864}=\frac{1681}{841}\cdot\frac{1682}{1681}$, also $\sqrt{2}=\frac{41}{29}\sqrt{\frac{1682}{1681}}$ ergeben.

Um rasch convergirende Werthe für $\sqrt{3}$ zu finden, setze man

$$3=\frac{27}{9}=\frac{25+2}{9}=\frac{25}{9}\left(1+\frac{2}{25}\right)=\frac{25}{9}\cdot\frac{27}{25},$$

also

$$\sqrt{3}=\tfrac{5}{3}\sqrt{\tfrac{27}{25}}.$$

Für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{27}{25}$ hat man den Fall I. und erhält für $\sqrt{3}$

17) 1. $\frac{78}{45}$, 2. $\frac{400}{231}$, 3. $\frac{4079}{2355}$, 4. $\frac{20795}{12006}$, 5. $\frac{212188}{122415}$, 6. $\frac{1080940}{624081}$,

für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{27}{25}$ hat man den Fall III. und findet als Werthe von $\sqrt{3}$

18) 1. $\frac{26}{15}$, 2. $\frac{265}{153}$, 3. $\frac{1351}{780}$, 4. $\frac{13775}{7953}$, 5. $\frac{70226}{40545}$, 6. $\frac{966035}{413403}$.

Setzt man

$$3=\frac{147}{49}=\frac{144+3}{49}=\frac{144}{49}\left(1+\frac{3}{144}\right)=\frac{144}{49}\left(1+\frac{1}{48}\right)=\frac{144}{49}\cdot\frac{49}{48},$$

also

$$\sqrt{3}=\tfrac{12}{7}.\sqrt{\tfrac{49}{48}},$$

so erhält man für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{49}{48}$ nach Fall I. die ersten beiden Näherungswerthe

19) 1. $\frac{73}{42}$, 2. $\frac{1758}{1015}$,

und für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{49}{48}$ nach III

20) $1.\ \frac{97}{56},\quad 2.\ \frac{2340}{1351}.$

Sollen Werthe berechnet werden, welche nur von der oberen Seite sich $\sqrt{2}$ nähern, so setze man

$$2=\frac{288}{144}=\frac{289-1}{144}=\frac{289}{144}\left(1-\frac{1}{289}\right)=\frac{289}{144}\cdot\frac{288}{289},$$

also

$$\sqrt{2}=\tfrac{17}{12}\cdot\sqrt{\tfrac{288}{289}}.$$

Für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{288}{289}$ hat man dann, da $a'<1$ und $D^2-a'S^2>0$ ist, den Fall V., und man erhält als die beiden ersten Näherungswerthe

21) $1.\ \frac{577}{408},\quad 2.\ \frac{19601}{13860},\quad >\sqrt{2}.$

Sollen Werthe berechnet werden, welche nur von der unteren Seite sich $\sqrt{2}$ nähern, so hat man für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{288}{289}$, da $a'<1$ und $D^2-a'S^2<0$ ist, den Fall VII., und man erhält

22) $1.\ \frac{865}{612},\quad 2.\ \frac{29393}{20784},\quad <\sqrt{2}.$

[Hätte man $2=\frac{9-1}{4}$, also $\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}$ gesetzt, so würde man für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{8}{9}$ nach 5) die zu grossen Werthe $1.\ \frac{17}{12}$, $2.\ \frac{99}{70}$, für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{8}{9}$ nach 6) die zu kleinen $1.\ \frac{25}{18}$, $2.\ \frac{147}{104}$ gefunden haben.]

Sollen Werthe berechnet werden, welche nur von der oberen Seite sich $\sqrt{3}$ nähern, so setze man

$$3=\frac{48}{16}=\frac{49-1}{16}=\frac{49}{16}\left(1-\frac{1}{49}\right)=\frac{49}{16}\cdot\frac{48}{49},$$

also

$$\sqrt{3}=\tfrac{7}{4}\cdot\sqrt{\tfrac{48}{49}}.$$

Dann findet man für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{48}{49}$ nach 5)

23) $1.\ \frac{97}{56},\quad 2.\ \frac{1351}{780},\quad >\sqrt{3}.$

Soll die Annäherung an $\sqrt{3}$ von der unteren Seite stattfinden, so setze man $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{48}{49}$, und man hat dann

24) $1.\ \frac{145}{84},\quad 2.\ \frac{20233}{11688},\quad <\sqrt{3}.$

Hier erscheint als erster Näherungswerth $\frac{145}{84}<\sqrt{3}$, also um so mehr $\frac{144}{84}=\frac{12}{7}<\sqrt{3}$, welcher Bruch bei Gerbert vorkommt; vergl. 14). In der ihm zugeschriebenen Geometrie (Ausgabe von Olleris, Cap. 49 S. 450) findet sich $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$ gesetzt, und in seinem Briefe an Adalbold (ibid. S. 477) berichtet er, er habe früher $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$ angenommen, die Rechnung aber genauer wiederholt (*„Sed et illa geometricalis ... subtilius est a me discussa“*). und setze nunmehr $\sqrt{3}=\frac{12}{7}$. Dabei ist auffällig, dass nicht, wie Gerbert angiebt, $\frac{12}{7}$, sondern $\frac{26}{15}$ der genauere Werth ist, denn es ist

$$25)\quad \begin{cases} 3=\dfrac{675}{225}=\dfrac{676-1}{225}=\dfrac{26^2}{15^2}\left(1-\dfrac{1}{26^2}\right), \\ \text{also} \\ \sqrt{3}=\dfrac{26}{15}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{26^2}}=\dfrac{26}{15}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{676}}, \end{cases}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} 3=\dfrac{147}{49}=\dfrac{144+3}{49}=\dfrac{12^2}{7^2}\left(1+\dfrac{3}{144}\right)=\dfrac{12^2}{7^2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{48}\right), \\ \text{also} \\ \sqrt{3}=\dfrac{12}{7}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{48}}. \end{cases}$$

Es ist also $\frac{26}{15}$ zu gross, $\frac{12}{7}$ zu klein, allein der Fehler beträgt im ersteren Falle weniger als im letzteren, weil der Bruch $\frac{1}{676}$, welcher dort vernachlässigt wird, kleiner ist als $\frac{1}{48}$, der im zweiten Falle unberücksichtigt bleibt. Wenn sich also derselbe Gerbert, der in diesem Briefe an Adalbold den Unterschied zwischen der geometrischen Formel für den Inhalt der Dreiecksfläche und der arithmetischen für die Berechnung der Trigonalzahl so verständig auseinandersetzt, — wenn sich also derselbe Gerbert hier irrt und $\frac{12}{7}$ für den genaueren Werth erklärt, so ist dies ein Zeichen, dass er seine Zahlen nicht etwa auf dem in 25) und 26) angegebenen Wege gefunden haben kann, obschon derselbe, sollte man meinen, nahe genug liegt. [Nach 5) aber ergeben sich für $S=1$, $D=1$, $a=1-\frac{1}{676}=\frac{675}{676}$, als die beiden ersten zu grossen Näherungswerthe von $\sqrt{3}$ $\frac{1351}{780}$ und $\frac{70226}{40545}$.]

Lassen wir indessen Gerbert und wenden wir uns zu Archimed. Dieser sucht in seiner „Kreismessung" den Umfang des Kreises zu bestimmen, und zwar auf folgende Weise: Ist u_n der Umfang eines umgeschriebenen, e_n der Umfang eines eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, und k der gesuchte Kreisumfang, so ist immer $u_n > k$ und $e_n < k$, also

$$u_n > k > e_n,$$

wobei u_n und e_n Vielfache des Kreisdurchmessers d sind. Lassen sich nun zwei nahe an einander liegende Zahlen p und q finden, von der Beschaffenheit, dass u_n kleiner als das p-fache, e_n grösser als das q-fache von d ist, dass also

$$u_n < p.d, \quad e_n > q.d$$

ist, so ist um so mehr

$$p.d > k > q.d$$

und der Kreisumfang k liegt also zwischen dem p-fachen und dem q-fachen von d. Archimed nun will zeigen, dass der Umfang u_{96} des umgeschriebenen 96-Ecks kleiner ist als $3\frac{10}{70}.d\,(=3\frac{1}{7}.d)$, und der Umfang e_{96} des eingeschriebenen 96-Ecks grösser als $3\frac{10}{71}.d$, so dass er also das Gesetz erhält

$$3\tfrac{10}{70}.d > k > 3\tfrac{10}{71}.d,$$

so dass also der Kreisumfang zwischen dem $3\frac{10}{70}$-fachen und dem $3\frac{10}{71}$-fachen des Durchmessers liegt. Man sieht, **Archimedes** muss dem Gedankengange zufolge, den er innehält, bestrebt sein, den Umfang des umgeschriebenen 96-Ecks zwar nahezu richtig, aber doch etwas **kleiner** als den wirklichen Werth, den Umfang des eingeschriebenen 96-Ecks aber ebenfalls nahezu richtig, jedoch etwas **grösser** als den wirklichen Werth anzugeben. Dasselbe gilt bezüglich von einer Seite t_{96} des umgeschriebenen, und einer Seite s_{96} des eingeschriebenen 96-Ecks. Um nun t_{96} zu finden, sucht er erst t_6, dann t_{12}, hierauf t_{24}, hierauf t_{48}, jedes etwas zu **klein** nehmend, und um s_{96} zu finden, sucht er erst s_6, dann s_{12}, dann s_{24}, hierauf s_{48}, jedes etwas zu **gross** nehmend.

Um nun aus der Seite t_n eines umgeschriebenen regelmässigen Vielecks die Seite t_{2n} des umgeschriebenen regelmässigen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu finden, verfährt **Archimed** folgendermassen: In einem Kreise mit dem Mittelpunkte E (diese und die folgende Figur wird man sich leicht selbst zeichnen) sei ein Centriwinkel $=\frac{1}{n}\cdot 360^0$ construirt und seine Schenkel über den Kreis hinaus verlängert; hierauf sei derselbe durch den Radius $EC=r$ halbirt und in C auf EC eine Senkrechte gesetzt, welche den einen Winkelschenkel in M trifft, so ist offenbar $CM=\frac{1}{2}t_n$. Wird nun der Winkel MEC halbirt und heisst der Durchschnittspunkt der Halbirungslinie mit CM N, so ist ebenso $CN=\frac{1}{2}t_{2n}$. Nun sei bekannt das Verhältniss $EC:MC > a:b$ (oder $\frac{1}{2}d:\frac{1}{2}t_n > a:b$ oder $d:t_n > a:b$), es sei also das Verhältniss $a:b$ etwas zu **klein**. Dann folgt aus

α) $$EC:MC > a:b$$

$$EC^2+MC^2:MC^2 > a^2+b^2:b^2$$

oder

$$ME^2:MC^2 > a^2+b^2:b^2,$$

also

β) $$ME:MC > \sqrt{a^2+b^2}:b.$$

Nach der Regel, dass aus zwei Proportionen, welche das zweite und das vierte Glied gleich haben, wie z. B. aus $c:v \gtreqless d:w$ und $e:v \gtreqless f:w$ folgt $c+e:v \gtreqless d+f:w$, ergiebt sich nun aus

α) $$EC:MC > a:b$$

und β) $$ME:MC > \sqrt{a^2+b^2}:b$$

γ) $$EC+ME:MC > a+\sqrt{a^2+b^2}:b.$$

Da aber NE den Winkel MEC halbirt, so verhält sich bekanntlich

$$EC:ME = CN:MN$$

und folglich $$EC+ME:EC = CN+MN:CN$$

oder $$EC+ME:EC = MC:NC$$

oder

$$EC + ME : MC = EC : NC.$$

Man hat also auch, da das erste Verhältniss dasselbe ist wie in γ),

$$EC : NC > a + \sqrt{a^2 + b^2} : b,$$

d. h. man hat auch das Verhältniss $\frac{1}{2}d : \frac{1}{2}t_{2a} = d : t_{2n}$, und zwar in etwas zu kleinen Zahlen.

Um zweitens, wenn das Verhältniss $d : s_n$ bekannt ist, auch das Verhältniss $d : s_{2n}$ zu finden, verfährt Archimed folgendermassen: In einem Kreise sei ein Durchmesser $AC = d$ gezogen und der Peripheriewinkel $CAM = \frac{1}{2n} \cdot 360^0$ gezeichnet, so ist die Sehne $MC = s_n$. Nun werde dieser Winkel halbirt, die Halbirungslinie treffe die MC in P, die Kreisperipherie in N, so ist $NC = s_{2n}$. Nun ist $\angle NAC = \angle NAM \, (= \frac{1}{2} \cdot \angle MAC)$, aber auch $\angle NCM \, (= \angle NCP) = \angle NAM$, als Peripheriewinkel auf demselben Bogen MN, folglich $\angle NAC = \angle NCP$. Da nun die Dreiecke ANC und CNP den Winkel $N = 90^0$ gemeinschaftlich haben, so ist

$$\triangle ANC \sim \triangle CNP.$$

Ist nun bekannt das Verhältniss $AC : MC < a : b$ (oder $d : s_n < a : b$), und also das Verhältniss $a : b$ etwas zu gross, so folgt aus

α) $$AC : MC < a : b:$$

$$AC^2 : MC^2 < a^2 : b^2,$$

daher auch

$$AC^2 - MC^2 : MC^2 < a^2 - b^2 : b^2$$

oder

$$AM^2 : MC^2 < a^2 - b^2 : b^2,$$

also

β) $$AM : MC < \sqrt{a^2 - b^2} : b.$$

Aus diesen beiden Proportionen

α) $$AC : MC < a : b,$$

β) $$AM : MC < \sqrt{a^2 - b^2} : b$$

folgt nun, wie vorhin,

γ) $$AM + AC : MC < a + \sqrt{a^2 - b^2} : b.$$

Da aber AN den Winkel MAC halbirt, so verhält sich

$$AM : AC = MP : CP,$$

also

$$AM + AC : AC = MP + CP : CP$$

oder

$$AM + AC : AC = MC : CP$$

oder

δ) $$AM + AC : MC = AC : CP.$$

Da nun $\triangle ANC \sim \triangle CNP$ ist, so ist weiter

$$AC : CP = AN : CN,$$

folglich nach δ)

$$AM + AC : MC = AN : CN$$

und nach γ)

daher auch
$$AN : CN < a + \sqrt{a^2 - b^2} : b,$$
oder
$$AN^2 : CN^2 < (a + \sqrt{a^2 - b^2})^2 : b^2$$
folglich
$$AN^2 : CN^2 < 2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} : b^2,$$
oder
$$AN^2 + CN^2 : CN^2 < 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} : b^2$$
also
$$AC^2 : CN^2 < 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} : b^2,$$
$$AC : CN < \sqrt{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} : b,$$
d. h. man hat auch das Verhältniss $d : s_{2n}$, und zwar in etwas zu grossen Zahlen.

Auf diese Weise also findet Archimed, vom Verhältniss $d : t_6$ ausgehend, nach einander die Verhältnisse $d : t_{12}$, $d : t_{24}$, $d : t_{48}$, $d : t_{96}$ in zu kleinen, und vom Verhältniss $d : s_6$ ausgehend, nach einander die Verhältnisse $d : s_{12}$, $d : s_{24}$, $d : s_{48}$, $d : s_{96}$ in zu grossen Zahlen. Die vollständige Durchführung dieser Rechnungen giebt Nizze in seiner Uebersetzung der Werke des Archimedes, in der Anmerkung auf S. 111—113. Es kommen, wie man sieht, dabei mehrfache Wurzelausziehungen vor, nämlich: zur Bestimmung von t_{96} und u_{96}

27) $\sqrt{349450} = 591\frac{1}{8}$, $\sqrt{1373943\frac{33}{64}} = 1172\frac{1}{8}$, $\sqrt{5472132\frac{1}{16}} = 2339\frac{1}{4}$;

zur Bestimmung von s_{96} und e_{96} aber

28) $\begin{cases} \sqrt{9082321} = 3013\frac{3}{4}, & \sqrt{3380929} = 1838\frac{9}{11}, \\ \sqrt{1018405} = 1009\frac{1}{6}, & \sqrt{4069284\frac{1}{36}} = 2017\frac{1}{4}. \end{cases}$

Dabei nimmt also Archimed die ersteren drei Werthe etwas zu klein, die letzteren vier Werthe etwas zu gross.

Fragen wir nun, wie derselbe die angeführten Zahlen gefunden hat, so ist Folgendes zu bemerken: Einmal, da Archimed von den Werthen t_6 und s_6 ausgeht, kommt sowohl bei der Berechnung von u_{96} als von e_{96} gleich im Anfange $\sqrt{3}$ vor, und er wählt für diesen Werth in der ersteren Untersuchung $\frac{265}{153}$, als etwas zu klein, in der letzteren aber $\frac{1351}{780}$, als etwas zu gross. Die beiden angewandten Zahlen sind aber in der That zwei in der Reihe 18) unmittelbar aufeinander folgende Näherungswerthe von $\sqrt{3}$, der erstere zu klein, der letztere zu gross, worauf bereits Herr Heilermann aufmerksam gemacht hat. Zweitens enthält das ganze oben auseinandergesetzte Verfahren durchaus nichts, was es als unmöglich erscheinen liesse, dass Archimedes dasselbe gekannt und sich desselben bedient hätte. Sehen wir daher zu, welche Resultate bei Anwendung desselben sich für die Quadratwurzeln in 27) und 28) ergeben und inwieweit dieselben mit den Werthen des Archimedes übereinstimmen.

Zunächst ist zu bemerken: Da Archimed bei der Berechnung von t_n und u_{96} die Werthe etwas kleiner, bei der Berechnung von s_n und e_{96} etwas grösser als der wahre Werth haben will, so hat man bei ersteren

den Fall VII. und die Regel 6), bei letzteren den Fall V. und die Regel 5) zu benutzen.

Die erste Wurzel in 27) lautet nun $\sqrt{349450}$. Man setze

$$\sqrt{349450} = \sqrt{350464 - 1014} = \sqrt{592^2 - 1014} = 592\sqrt{1 - \tfrac{1014}{350464}}$$
$$= 592\sqrt{1 - \tfrac{507}{175232}} = 592\sqrt{\tfrac{174725}{175232}}.$$

Dann erhält man nach Fall VII. für $S = 2$, $D = 1$, $a' = \frac{174725}{175232}$, wenn man hier, wie im Folgenden, stets zwei Näherungswerthe berechnet, als zweiten

$$\sqrt{\tfrac{174725}{175232}} = \left(\frac{D_2}{S_2} = \right) \tfrac{1048857}{1050378},$$

also

$$\sqrt{349450} = 592 \cdot \tfrac{1048857}{1050378} = 296 \cdot \tfrac{349619}{175063} = 103487224 : 175063$$

oder

a$_1$) $$\sqrt{349450} = 591\tfrac{24991}{175063}.$$

Statt dieses unbequemen Bruches aber sucht Archimed einen in kleineren Zahlen ausgedrückten, an Werth nahezu gleichen, aber, der Vorsicht wegen und seiner Intention entsprechend, doch etwas kleineren zu setzen, und wählt als solchen den Bruch $\frac{1}{8}$, so dass er also setzt

$$\sqrt{349450} = 591\tfrac{1}{8},$$

und in der That ist

$$\tfrac{1}{8} < \tfrac{24991}{175063}.$$

Die zweite Wurzel in 27) lautet $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$. Nun ist

$$1373943\tfrac{33}{64} < 1392400,$$

d. h.

$$< 1180^2,$$

also um so mehr

$$< 1180\tfrac{1}{8}^2 \text{ oder } < \tfrac{89132481}{64}.$$

Man setze also

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = \sqrt{\frac{87932385}{64}} = \sqrt{\frac{89132481 - 1200096}{64}}$$
$$= \frac{9441}{8}\sqrt{1 - \frac{1200096}{89132481}} = \frac{9441}{8}\sqrt{\frac{87932385}{89132481}}.$$

Nach Fall VII. hat man nun für $S = 2$, $D = 1$, $a' = \frac{87932385}{89132481}$ als zweiten Näherungswerth

$$\sqrt{\tfrac{87932385}{89132481}} = \left(\frac{D_2}{S_2} = \right) \tfrac{528794406}{532394694},$$

also

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = \frac{9441}{8} \cdot \tfrac{528794406}{532394694}$$
$$= \frac{9441}{8} \; \tfrac{264397203}{266197347}$$

oder

b$_1$) $$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = 1172\tfrac{307668051}{2129578776}.$$

Auch hier setzt Archimed statt des grossen Bruches einen in kleineren Zahlen ausgedrückten, an Werth nahezu gleichen, aber doch etwas kleineren, nämlich $\frac{1}{8}$, und setzt

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = 1172\tfrac{1}{8},$$

und auch hier ist

$$\tfrac{1}{8} < \tfrac{307668051}{2112957877 6}.$$

Die dritte Wurzel in 27) lautet $\sqrt{5472132\frac{1}{16}}$. Nun ist

$$5472132\tfrac{1}{16} < 5475600,$$

d. h.

$$< 2340^2,$$

also um so mehr

$$< 2340\tfrac{1}{4}^{2} \text{ oder } < \tfrac{87628321}{16}.$$

Man setze also

$$\sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} = \sqrt{\tfrac{87554113}{16}} = \sqrt{\tfrac{87628321-74208}{16}}$$
$$= \tfrac{9361}{4}\sqrt{1-\tfrac{74208}{87628321}} = \tfrac{9361}{4}\sqrt{\tfrac{87554113}{87628321}}.$$

Nach Fall VII hat man nun für $S=2$, $D=1$, $a'=\frac{87554113}{87628321}$ als zweiten Näherungswerth

$$\sqrt{\tfrac{87554113}{87628321}} = \left(\tfrac{D_2}{S_2} =\right) \tfrac{525398886}{525621510},$$

also

$$\sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} = \tfrac{9361}{4}\cdot\tfrac{525398886}{525621510}$$
$$= \tfrac{9361}{4}\cdot\tfrac{262699443}{262810755}$$

oder

c_1) $$\sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} = 2339\tfrac{272062143}{1051243020}.$$

Statt des grosszahligen Bruches setzt nun Archimed einen an Werth etwas kleineren, aber dem wahren Werthe nahe kommenden, er setzt nämlich

$$\sqrt{5472132\tfrac{1}{4}} = 2339\tfrac{1}{4}$$

und es ist auch hier

$$\tfrac{1}{4} < \tfrac{272062143}{1051243020}.$$

Wir gehen nunmehr über zur Berechnung der Seiten der eingeschriebenen Vielecke, welche also Archimed zwar annähernd gleich dem wahren Werthe, aber doch etwas zu gross angeben will. Die erste Quadratwurzel in der Reihe 28) derselben ist $\sqrt{9082321}$. Man setze

$$\sqrt{9082321} = \sqrt{9120400-38079} = \sqrt{3020^2-38079} = 3020\sqrt{1-\tfrac{38079}{9120400}}$$
$$= 3020\sqrt{\tfrac{9082321}{9120400}}.$$

Nach Fall V. hat man nun für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{9082321}{9120400}$ als zweiten Näherungswerth

$$\sqrt{\tfrac{9082321}{9120400}} = \left(\tfrac{D_2}{S_2} =\right) \tfrac{363367363}{364443521},$$

also

$$\sqrt{9082321} = 3020\cdot\tfrac{363367363}{364443521}$$

oder

a_2) $$\sqrt{9082321} = 3013\tfrac{25107487}{364443521}.$$

Statt des Bruches setzt Archimed einen einfacheren, an Werth nahezu gleichen, jedoch etwas grösseren, er setzt nämlich

$$\sqrt{9082321} = 3013\tfrac{3}{4}$$

und es ist in der That

$$\frac{3}{4} > \frac{25107487}{36443521}.$$

Die zweite Wurzel in 28) ist $\sqrt{3380929}$. Man setze, um sie zu berechnen,

$$\sqrt{3380929} = \sqrt{3385600 - 4671} = \sqrt{1840^2 - 4671} = 1840\sqrt{1 - \frac{4671}{3385600}}$$
$$= 1840\sqrt{\frac{3380929}{3385600}}.$$

Dann erhält man nach Fall V. für $S = 1$, $D = 1$, $a' = \frac{3380929}{3385600}$ als zweiten Näherungswerth

$$\sqrt{\frac{3380929}{3385600}} = \left(\frac{D_2}{S_2} = \right)\frac{1352838}{1353877}\frac{7}{29},$$

also

$$\sqrt{3380929} = 1840 \cdot \frac{135283887}{135387729}$$

oder

b$_2$)
$$\sqrt{3380929} = 1838\frac{9886178}{135387729}.$$

Auch hier sucht Archimed den unbequemen grosszahligen Bruch durch einen einfacheren, an Werth ihm nahe kommenden, jedoch etwas zu grossen Bruch zu ersetzen, denn er setzt

$$\sqrt{3380929} = 1838\frac{9}{11}$$

und es ist

$$\frac{9}{11} > \frac{9886178}{135387729}.$$

Die dritte Wurzel in 28) ist $\sqrt{1018405}$. Man setze zu ihrer Berechnung

$$\sqrt{1018405} = \sqrt{1020100 - 1695} = \sqrt{1010^2 - 1695} = 1010\sqrt{1 - \frac{1695}{1020100}}$$
$$= 1010\sqrt{1 - \frac{339}{204020}} = 1010\sqrt{\frac{203681}{204020}}.$$

Dann ergiebt sich nach Fall V. für $S = 1$, $D = 1$, $a' = \frac{203681}{204020}$ als zweiter Näherungswerth

$$\sqrt{\frac{203681}{204020}} = \left(\frac{D_2}{S_2} = \right)\frac{815063}{815741},$$

also

$$\sqrt{1018405} = 1010 \cdot \frac{815063}{815741}$$

oder

c$_2$)
$$\sqrt{1018405} = 1009\frac{130961}{815741}.$$

Der leichteren Rechnung wegen setzt Archimed statt des Bruches einen einfacheren, um ein Geringes grösseren, denn er schreibt

$$\sqrt{1018405} = 1009\frac{1}{6}$$

und es ist

$$\frac{1}{6} > \frac{130961}{815741}.$$

Die letzte Wurzel in 28) endlich ist $\sqrt{4069284\frac{1}{36}}$. Nun ist

$$4069284\tfrac{1}{36} < 4080400,$$

d. h.

$$< 2020^2,$$

also um so mehr

$$< 2020\tfrac{1}{6}^2 \text{ oder } < \frac{146918641}{36}.$$

Man setze also

$$\sqrt{4069284\tfrac{1}{36}} = \sqrt{\tfrac{146494225}{36}} = \sqrt{\tfrac{146918641-424416}{36}}$$
$$= \tfrac{12121}{6}\sqrt{1-\tfrac{424416}{146918641}} = \tfrac{12121}{6}\sqrt{\tfrac{146494225}{146918641}}.$$

Nach Fall V. hat man nun für $S=1$, $D=1$, $a'=\frac{146494225}{146918641}$ als zweiten Näherungswerth

$$\sqrt{\tfrac{146494225}{146918641}} = \left(\frac{D_2}{S_2}=\right)\tfrac{586401316}{587250148},$$

also

$$\sqrt{4069284\tfrac{1}{36}} = \tfrac{12121}{6}\cdot\tfrac{586401316}{587250148}$$
$$= \tfrac{12121}{2}\cdot\tfrac{48866793}{146812537}$$

oder

d$_2$) $$\sqrt{4069284\tfrac{1}{36}} = 2017\tfrac{72623695}{293625074}.$$

Statt des Bruches setzt **Archimed** einen in kleineren Zahlen ausgedrückten, an Werth um ein Geringeres grösseren, nämlich

$$\sqrt{4069284\tfrac{1}{36}} = 2017\tfrac{1}{4},$$

denn es ist

$$\tfrac{1}{4} > \tfrac{72623695}{293625074}.$$

Ich hatte oben darauf hingewiesen, dass kein Grund vorliege, die Möglichkeit zu bezweifeln, **Archimedes** habe das im Früheren erklärte Verfahren des Ausziehens der Quadratwurzel gekannt und angewandt, dass ferner die Wahl der Werthe für $\sqrt{3}$ in 18) eher mit einiger Wahrscheinlichkeit dafür spricht. Ich habe ferner die von **Archimed** angeführten Werthe in 27) und 28) nach dem genannten Verfahren berechnet. Denn dass alle nach einem bestimmten Modus gefunden worden sind, ist augenscheinlich. Fraglich dagegen muss es erscheinen, ob derselbe ein solcher war, dass sich die in 27) und 28) angegebenen einfachen Brüche unmittelbar ergeben. Wenn es sich darum handelte, ein bestimmtes Resultat mit absoluter Genauigkeit zu berechnen, so würde man dies allerdings annehmen müssen; im vorliegenden Falle jedoch liegt die Sache anders. **Archimed** will ja nur ein annähernd genaues Resultat erzielen, er will nur eine obere und eine untere Grenze feststellen, zwischen welchen beiden der wahre Werth liegen soll. Unter solchen Umständen liegt, meine ich, der Gedanke nicht allzu fern, **Archimedes** werde, wenn er sich auch vor keiner noch so grossen Zahl zu fürchten brauchte, doch so vernünftig und einsichtig gewesen sein, nicht mit unnöthig grossen Zahlen zu rechnen und so Zeit und Mühe auf die Erzielung einer Genauigkeit zu verwenden, an der weder ihm, noch sonst Jemandem etwas gelegen war; er werde vielmehr vorkommende grosse Zahlen so abgekürzt haben, dass die Rechnung vereinfacht, der Fehler aber ein möglichst geringer werde, wobei er stets im Auge behielt, dass bei den umgeschriebenen Vielecken ein etwas zu kleiner, bei den eingeschriebenen ein etwas zu grosser Werth anzuwenden sei.

So hat man (**Heiberg**, Quaestiones Archimedeae, p. 62; **Heilermann**, *l. c.* p. 124) daran Anstoss genommen, dass **Archimedes** den

Bruch in a_1) in $\frac{1}{8}$ und nicht in $\frac{1}{7}$ abgekürzt habe, da doch $591\frac{1}{7}$ ein genauerer Werth und immer noch kleiner als der wahre sei. Dagegen ist zu bemerken, einmal: Allerdings ist $\frac{1}{7}$ genauer als $\frac{1}{8}$, und $591\frac{1}{7}$ kleiner als der wahre Werth, aber $> 591\frac{1}{8}$; allein mit demselben Rechte könnte man auch erwarten, **Archimed** werde statt $\frac{1}{8}$ setzen $\frac{2}{15}$, oder $\frac{9}{64}$, oder einen andern Bruch, denn es giebt unzählige, welche $> \frac{1}{8}$ sind und doch noch unter dem genauen Werthe liegen. Auch kann nicht geltend gemacht werden, **Archimed** habe sich nur eines Stammbruches mit dem Zähler 1 bedienen wollen, denn das erste und zweite seiner Resultate in 28) zeigt, dass er auch andere Brüche als zulässig erachtete. Zweitens: Falls **Archimedes** in der That nach dem oben angegebenen Verfahren rechnete, und darauf ausging, den einfachsten Bruch zu verwenden, der $< \frac{24991}{175063}$ sei, so konnte er keinen andern wählen als $\frac{1}{8}$. Denn $\frac{1}{7}$ ist, wenn auch nur um ein Geringes, grösser als $\frac{24991}{175063}$, auch lässt sich vermuthen, dass der nächste Näherungswerth zeigen werde, dass $\frac{1}{7}$ noch zulässig sei, und die Rechnung bestätigt dies. Denn als dritter Näherungswerth von $\sqrt{349450}$ ergiebt sich

$$\sqrt{349450} = 591\tfrac{1643390409}{11495410860}$$

und $\frac{1}{7}$ ist kleiner als der hier vorkommende Bruch. Wenn aber **Archimed** sämmtliche Wurzeln bis zu einem und demselben Grade der Genauigkeit, nämlich sämmtlich bis zum zweiten Näherungswerthe angeben wollte, so **musste** er vorsichtigerweise statt $\frac{24991}{175063}$ setzen $\frac{1}{8}$ und nicht $\frac{1}{7}$.

Etwas anders liegt die Sache bei der zweiten der in 27) angeführten Quadratwurzeln, nämlich bei $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$ (vergl. **Heiberg** und **Heilermann** *l. c.*). Es war in a_2) gefunden

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = 1172\tfrac{307668051}{2129578776}.$$

Archimed setzt hier statt des Bruches den an Werth etwas kleineren $\frac{1}{8}$. Es wird nun darauf hingewiesen, dass er genauer hätte setzen sollen $\frac{1}{7}$, denn auch $\frac{1}{7}$ sei kleiner als dieser Bruch. Dies ist allerdings der Fall; allein es giebt noch unzählig viele andere Brüche, welche $> \frac{1}{7}$, aber $< \frac{307668051}{2129578776}$ sind. Denn setzt man in dem Bruche $\dfrac{m}{7m-1}$ für m die Zahlen von 13 bis ∞, so erhält man lauter Brüche, welche dieselbe Eigenschaft haben und deren Werth um so näher an $\frac{1}{7}$ liegt, je kleiner m ist, z. B. $\frac{13}{90}$, $\frac{14}{97}$ etc., und setzt man in dem Bruche $\dfrac{m+1}{7m}$ für m die Zahlen von 89 bis ∞, so erhält man ebenfalls Brüche, welche zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{307668051}{2129578776}$ liegen, und zwar um so näher an $\frac{1}{7}$, je grösser m ist, z. B. $\frac{90}{623}$, $\frac{91}{630}$ etc. Alle diese unzählig vielen Brüche also hätte **Archimedes** wählen, bei jedem aber auch würde man fragen können, warum er gerade diesen und nicht einen genaueren nehme. Warum er

aber nicht $\frac{1}{7}$ selbst wählt, ergiebt sich aus dem Verlaufe der Rechnung. Ich setze dieselbe (nach Nizze, *l. c* 112) her für beide Fälle, je nachdem bei der Berechnung von t_{24} statt des grossen Bruches $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{7}$ gesetzt wird, und bemerke nur, dass die dabei vorkommende Zahl $1162\frac{1}{8}$ eine nothwendige Folge davon ist, dass früher statt $\frac{24991}{175063}$ gesetzt worden war $\frac{1}{8}$. Sie lautet

für $\frac{1}{8}$:	für $\frac{1}{7}$:
$HE:HC > 1172\frac{1}{8} : 153$	$HE:HC > 1172\frac{1}{7} : 153$
$EC:HC > 1162\frac{1}{8} : 153$	$EC:HC > 1162\frac{1}{8} : 153$
also $HE + EC:HC > 2334\frac{1}{4} : 153$	also $HE + EC:HC > 2334\frac{15}{56} : 153$,
mithin $EC:KC > 2334\frac{1}{4} : 153$,	mithin $EC:KC > 2334\frac{15}{56} : 153$,
$EC^2:KC^2 > 5448723\frac{1}{16} : 23409$,	$EC^2:KC^2 > 5448806\frac{1345}{3136} : 23409$,
$EC^2 + KC^2:KC^2 > 5472132\frac{1}{16} : 153^2$,	$EC^2 + KC^2:KC^2 > 5472215\frac{1345}{3136} : 153^2$,
$KE:KC > \sqrt{5472132\frac{1}{16}} : 153$,	$KE:KC > \sqrt{5472215\frac{1345}{3136}} : 153$.

Man erkennt hieraus sofort, um wieviel beschwerlicher die Rechnung wird, wenn statt des Bruches $\frac{307668051}{2129578776}$ gesetzt wird $\frac{1}{7}$, als wenn dafür genommen wird $\frac{1}{8}$. Der Grund davon liegt augenscheinlich darin, dass $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, also ein einfacherer, aber $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56}$, also ein zusammengesetzterer Bruch ist. Um also die unnöthige Erschwerung der Rechnung zu vermeiden, zog es Archimedes vor, etwas von der Genauigkeit zu opfern und lieber statt des $\frac{1}{7}$ das um nur $\frac{1}{56}$ kleinere $\frac{1}{8}$ zu setzen, nachdem er einmal anstatt $\frac{24991}{175063}$ nothwendigerweise gesetzt hatte $\frac{1}{8}$. Seinen Zwecken genügte auch der etwas ungenauere Werth vollkommen, und er wollte eben nicht mit grösseren Zahlen rechnen, wo kleinere denselben Dienst leisteten, und ich glaube, Jeder wird ihm hierin beistimmen.

Auffälliger ist mir folgender, meines Wissens noch nicht bemerkte, Umstand: Archimedes benutzt, wie schon aus dem Vorigen hervorgeht, jeden sich bietenden Rechnungsvortheil. So setzt er bei der Ermittelung von e_{96} statt des Verhältnisses $5924\frac{3}{4}:780$ das durch Erweiterung mit 4 und Division mit 13 hervorgehende $1823:240$, und statt $3661\frac{9}{11}:240$ das durch Erweiterung mit 11 und Division mit 40 entstehende $1007:66$ (bei ersterem Beispiele sind, wie Archimedes sagt, die Zahlen 1823 und 240 $\frac{4}{13}$ der ursprünglichen $5924\frac{3}{4}$ und 780, bei letzterem sind 1007 und 66 $\frac{11}{40}$ von $3661\frac{9}{11}$ und 240). Nun lässt sich das oben angeführte, bei der Berechnung der Seite des umgeschriebenen 24-Ecks vorkommende Verhältniss $1162\frac{1}{8}:153$ auch auf andere Weise ausdrücken, denn man erhält durch Erweiterung mit 8 und nachherige Kürzung mit 9

$$1162\frac{1}{8} : 153 = 1033 : 136.$$

Es lässt sich also dieses Verhältniss durch kleinere und zugleich ganze Zahlen ausdrücken. Thut man dieses, so gestaltet sich natürlich auch die ganze folgende Rechnung etwas anders. So verlangt die Berechnung von t_{24} dann die Ermittelung von $\sqrt{1085587}$. Setzt man nun

$$1085587 = 1050^2 - 16913,$$

so erhält man nach Fall VII. als zweiten Näherungswerth der gesuchten Wurzel

b'₁) $$\sqrt{1085587} = 1041\tfrac{2977308}{3290687}.$$

Statt des Bruches kann man das um ein Geringes kleinere $\frac{9}{10}$, also

$$\sqrt{1085587} = 1041\tfrac{9}{10}$$

setzen. Thut man dies, so erfordert die Berechnung von t_{48} die Bestimmung von $\sqrt{4323708\tfrac{1}{100}}$. Nun ist

$$4323708\tfrac{1}{100} = 2080\tfrac{1}{10}^2 - 3108,$$

also erhält man nach Fall VII. abermals als zweiten Näherungswerth

c'₁) $$\sqrt{4323708\tfrac{1}{100}} = 2079\tfrac{1525882611}{4325780010}.$$

Statt dieses Bruches kann man den etwas kleineren $\frac{1}{3}$ oder, noch genauer, den ebenfalls kleineren $\frac{19}{54}$ anwenden, also

†) $$\sqrt{4323708\tfrac{1}{100}} = 2079\tfrac{1}{3}$$

oder

*) $$\sqrt{4323708\tfrac{1}{100}} = 2079\tfrac{19}{54}$$

annehmen. Als Verhältniss des Durchmessers zur Seite des umgeschriebenen 96-Ecks, für welches Archimed findet

$$d : t_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

ergiebt sich dann nach †) oder nach *) entweder

$$d : t_{96} > 4154\tfrac{7}{30} : 136$$

oder

$$d : t_{96} > 4154\tfrac{34}{135} : 136.$$

Als Verhältniss des Durchmessers d zum Umfange u_{96} des umgeschriebenen 96-Ecks findet ferner Archimed

$$d : u_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 14688.$$

Hier ergiebt sich nach †)

$$d : u_{96} > 4154\tfrac{7}{30} : 13056$$

oder nach *)

$$d : u_{96} > 4154\tfrac{34}{135} : 13056.$$

Man hat also, nach Archimed, nach †) und nach *) bezüglich

$$u_{96} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}\,d, \quad u_{96} < \frac{13056}{4154\frac{7}{30}}\,d, \quad u_{96} < \frac{13056}{4154\frac{34}{135}}\,d.$$

Nun soll $3\frac{1}{7}d > u_{96} > 3\frac{10}{71}d$ sein, also muss jeder dieser drei Brüche zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegen. Bezeichnet man einen dieser Brüche durch B, die Differenz durch $3\frac{1}{7} - B$ mit d_1, die Differenz $B - 3\frac{10}{71}$ mit d_2, und sucht das Verhältniss $d_1 : d_2$, so ergiebt sich, nach Archimed, nach †) und nach *) bezüglich $\left(\text{je nachdem für } B \text{ genommen wird } \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}, \frac{13056}{4154\frac{7}{30}}, \frac{13056}{4154\frac{34}{135}}\right)$

$$d_1 : d_2 = \tfrac{1}{7} : 9\tfrac{37}{142}, \quad d_1 : d_2 = \tfrac{17}{105} : 8\tfrac{419}{2130}, \quad d_1 : d_2 = \tfrac{208}{945} : 8\tfrac{1328}{9585}.$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{7} : 9\tfrac{37}{142} < 8 : \tfrac{419}{2130} < \tfrac{208}{945} : 8\tfrac{1328}{9585}.$$

Es liegt also bei der Rechnung Archimed's der sich ergebende Werth u_{96} am nächsten an $3\frac{1}{7}d$ und am weitesten von $3\frac{10}{71}d$ entfernt, im Falle †) ergiebt sich u_{96} weiter von $3\frac{1}{7}d$ und weniger weit von $3\frac{10}{71}d$ entfernt als bei Archimed, und noch mehr findet dies im Falle *) statt. Archimed hätte also, wenn er das Verhältniss $1162\frac{1}{8} : 153$ durch das in kleineren und ganzen Zahlen ausgedrückte $1033 : 136$ wiedergegeben hätte, seinen Zweck noch besser erreicht, denn die Grenzen, in welche u_{96} eingeschlossen worden wäre, würden noch engere geworden sein, als bei seiner Rechnung. Dass Archimedes, der Beherrscher der Zahlen und fertige Rechner, der jeden sich bietenden Vortheil geschickt benutzte, und bemerkte, dass sich die Verhältnisse $5924\frac{3}{4} : 780$ und $3661\frac{9}{11} : 240$ einfacher angeben lassen, nicht bemerkt haben sollte, dass dies auch bei $1162\frac{1}{8} : 153$ möglich sei, wird man schwerlich glauben können. Er muss daher wohl einen Grund gehabt haben, hier die Abkürzung zu unterlassen. Ich habe jedoch keinen andern finden können, als etwa das Bestreben, eine Zahl zu erhalten, welche möglichst nahe an $3\frac{1}{7}$ gelegen ist.

Wenn ich mich nun im Obigen, bei der Untersuchung der Wurzelwerthe in 27) und 28), öfter des Ausdruckes bedient habe: „Archimed rechnet so und so", so hat dies seinen Grund darin, dass sich mir allerdings die Ueberzeugung aufgedrängt hat, derselbe habe wahrscheinlich das hier auseinandergesetzte Verfahren gekannt und angewandt; auch scheint es nicht unmöglich, dass er schon während der Rechnung auf die eine oder andere Weise Abkürzungen anbrachte, so dass er gar nicht nöthig hatte, mit so grossen Zahlen zu operiren. Ob Andere dieser meiner Ansicht beipflichten werden, ist abzuwarten. Jedenfalls machen es, wie auch Herr Cantor, *l. c.* S. 370, ausspricht, die Worte Theon's wahrscheinlich, dass man im Alterthum sich des Zusammenhangs des von jenem erwähnten Satzes mit der Berechnung von $\sqrt{2}$ und also mit der Berechnung der Seite eines einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Vierecks aus dem Durchmesser bewusst war. Positive Gewissheit freilich wird sich schwerlich erreichen lassen, da die Zahlen Archimed's eben nicht absolut, sondern nur annähernd richtige sind und sein sollen. Auf alle Fälle aber dürfte aus dem Bisherigen hervorgehen, dass dem Scharfsinn des grossen Syrakusaners auch geringe und höchst einfache Mittel genügten, um das immerhin schwierige Problem des Rectification des Kreises zu lösen. (Ueber Heron s. Philol. Rundschau, Jahrg. III Nr. 11 S. 341—345.)

Einladung.

Vom 30. August bis 9. September (18.—20. August) 1883 wird in **Odessa** der

VII. Congress russischer Naturforscher und Aerzte

stattfinden. Zur Theilnahme an demselben werden in folgenden Gebieten arbeitende Gelehrte eingeladen:

1. Anatomie und Physiologie;
2. Zoologie und vergleichende Anatomie;
3. Botanik, Anatomie und Physiologie der Pflanzen;
4. Mineralogie, Geologie, Paläontologie;
5. Chemie und Physik;
6. Astronomie und Mathematik;
7. Anthropologie;
8. Medicin.

Recensionen.

Litterargeschichtliche Studien über Euklid von J. L. Heiberg, Dr. phil. Leipzig 1882 bei B. G. Teubner. IV, 224 S.

Wen immer seine Forschungen dahin führten, dass er nach einem gewissen Zeitraum auf Dinge zurückkam, welche er früher ein für alle Mal abgethan zu haben glaubte, pflegt erstaunt auf kleinere und grössere Einzelheiten zu stossen, die ihm vordem entgangen waren. Geht es dem Einzelnen so, um wieviel mehr ist neue Ausbeute zu erwarten, wo Verschiedene nach einander dem gleichen Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zuwenden. Es giebt in der Wissenschaft keine erschöpften Felder, kein Gebiet, welches so reinlich abgesucht ist, dass nichts mehr darauf zu finden wäre. Freilich schliesst diese zuzugebende Möglichkeit keineswegs die Schwierigkeit aus, jene noch des Sammlers harrenden Ueberreste zu entdecken; denn frei und offen am Wege liegen die Fundstücke gemeiniglich nicht, an welchen dieser und jener vorüberging. Herrn Heiberg's neueste Schrift ist ein beredtes Zeugniss für die ausgesprochenen Sätze. Sie zeugt mit ihrem reichen Inhalt dafür, dass es über Euklid und dessen Schriften noch immer Neues zu sagen giebt, sie zeugt zugleich für die hervorragende Spürkraft ihres Verfassers, der täglich mehr den Beweis liefert, dass er zu mathematisch-historischen Untersuchungen bestens veranlagt ist und dass er, wir möchten sagen, den natürlichen Beruf hat, seine philologische Schulung in den Dienst der Geschichte der Mathematik zu stellen. Herr Heiberg begann seine schriftstellerische Laufbahn 1879 mit den Quaestiones Archimedeae. Er liess, abgesehen von einigen selbst ziemlich umfangreichen Abhandlungen, seine Archimed-Ausgabe (1880—1881) folgen. Heute berichten wir über ein Bändchen, welches zu einer künftigen Euklid-Ausgabe etwa in dem gleichen Verhältnisse steht, das zwischen den Veröffentlichungen von 1879 und 1880 obwaltet. Es erhöht noch merklich die Zuversicht, welche wir bei Anzeige der Archimed-Ausgabe aussprechen durften, die Ausgaben fernerer griechischen Geometer durch Herrn Heiberg würden mehr und mehr klassischer Vollkommenheit sich nähern.

Die literargeschichtlichen Studien über Euklid zerfallen in folgende sechs Abtheilungen: I. Die Nachrichten der Araber (S. 1—21); II. Leben

und Schriften Euklid's (S. 22—55); III. Die verlorenen Schriften (S. 56—89); IV. Die Optik und Katoptrik (S. 90—153); V. Die alten Commentatoren (S. 154—173); VI. Zur Geschichte des Textes (S. 174—224).

Nicht eine dieser Abtheilungen lässt den Leser ohne Belehrung über Dinge, welche er anderwärts vergebens suchen würde, theils Vermuthungen des Verfassers über Dinge von mehr oder minder gesichertem Werthe, theils bestimmte Ergebnisse seiner Forschungen. Wir wollen fast auf's Gerathewohl einige wenige Einzelheiten herausheben.

Bekanntlich ist bei arabischen Schriftstellern die Nachricht erhalten, Euklid sei in Tyrus geboren. Herr Heiberg hat (S. 4) die Quelle dieser Ueberlieferung erkannt und hat ihr damit jede Bedeutung entzogen. Offenbar stammt sie nämlich aus der Vorrede jenes Buches des Hypsikles, welches man für ein XIV. Buch der Elemente des Euklid hielt, und aus *Βασιλείδης ὁ Τύριοσ* schmiedete arabische Halbkenntniss der griechischen Sprache einen König von Alexandrien nebst einem Euklides aus Tyrus.

S. 19 ist die sehr ansprechende Vermuthung ausgesprochen, Ṯâbit ibn Kurra sei der Urheber der berühmten Betrachtungen über Sternvielecke in I, 32 der Euklid-Bearbeitung des Campanus. Wir schliessen uns durchaus dem Wunsche an, es möge doch ja ein Orientalist in eine Handschrift von Ṯabit's Euklid-Uebersetzung einen Blick werfen, um Richtigkeit oder Unrichtigkeit von Herrn Heiberg's Meinung zu erweisen.

Dass bei Proklus der Satz von dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der Dreieckshöhen vorkommt, dürfte noch nicht hervorgehoben worden sein. Nicht ganz sicher scheint uns die Behauptung (S. 31), der Satz müsse schon voreuklidisch sein.

Auch der Schluss (S. 46), es müsse schon vor Euklid ein Lehrbuch der Sphärik gegeben haben, bei dessen Verbreitung Euklid sich manche Beweise in den Phänomenen schenken zu können glaubte, während Theodosius eben aus jenem Lehrbuche die Beweise zum Theil wörtlich entnahm, scheint uns einigermassen gewagt, so interessant die auch nach Nokk's Arbeiten noch ziemlich neue Hervorhebung der Beziehungen der Sphärik des Theodosius zu den Euklidischen Phänomenen uns im Uebrigen war.

Die Wiederherstellung der Euklidischen Porismen durch Chasles ist nach Herrn Heiberg (S. 57—79) noch nicht das letzte Wort in dieser schwierigen Frage. Die Schwierigkeit des Gegenstandes hat auch auf die Darstellung unseres Verfassers einen etwas verdunkelnden Schatten geworfen, vermöge dessen es uns nicht vollständig gelungen ist, in seine Meinung einzudringen.

Um so einverstandener sind wir mit Herrn Heiberg (S. 81), dass die Oerter auf der Oberfläche sich kaum auf Anderes, als auf Curven auf der Cylinderfläche, vielleicht auch auf der Kegelfläche bezogen haben können.

Ein Text der Optik aus einer Wiener Handschrift liefert uns (S. 93 bis 129) eine ganz neue Form dieser Schrift, deren Echtheit in allen wesentlichen Theilen mit starken Gründen verfochten wird.

Der Commentar des Proklus ist nach Herrn Heiberg (S. 166) nicht verstümmelt auf uns gekommen; vielmehr sei aus p. 432, 9 sqq. der Friedlein'schen Ausgabe zu schliessen, dass Proklus wenigstens zunächst nur die Theile seines Commentars herausgab, die wir kennen; in seiner Absicht lag es aber, eine ähnliche dem Texte der Elemente von Satz zu Satz sich anschliessende Erklärung für das Gesammtwerk zu verfassen.

Der arabisch erhaltene Commentar zum X. Buche der Elemente, den Wöpcke in Paris entdeckt hat, soll (S. 170) von Pappus herrühren, statt, wie man anzunehmen gewohnt war, von Vettius Valens.

Schon diese geringfügige Auswahl wird genügen, zu bestätigen, was wir von dem Reichthum des Inhalts der vorliegenden Studien gesagt haben. Kein Fachgenosse wird es unterlassen dürfen, sie bei Arbeiten über die verschiedensten Perioden der Geschichte der griechischen Mathematik zu Rathe zu ziehen.

CANTOR.

Das mathematische Harmonium. Ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung der reinen Tonverhältnisse von GUSTAV ENGEL, königl. Prof. und Gesanglehrer a. d. königl. Hochschule für Musik. Berlin SW. 1881, Verlag von Carl Habel (C. G. Lüderitz'sche Verlagshdl.). 73 S. 8°.

Mit dem Namen mathematisches Harmonium bezeichnet der Verf. ein musikalisches Instrument, auf welchem man die Töne in möglichst vollkommener Uebereinstimmung mit der mathematischen Theorie der Tonleiter angeben kann. Ein solches Instrument ist, wie auch der Verf. selbst angiebt, nicht neu, denn Herr Prof. v. Helmholtz hat bereits in seiner „Lehre von den Tonempfindungen" (Abschnitt 16) ein derartiges Harmonium beschrieben, aber unter den Musikern ist dies doch verhältnissmässig noch nicht sehr bekannt. Es ist daher gewiss ein dankenswerthes Unternehmen des Verf., seinen Fachgenossen diese Instrumente näher zu bringen und zu empfehlen. — Der Verf. hat aber auch das Instrument vervollständigt und angegeben, wie es noch weiter zu vervollkommnen sei. Sein darauf bezüglicher Vorschlag, eine 53stufige gleichschwebende Temperatur herzustellen, ist allerdings nicht neu, aber sehr zweckmässig. (Vergl. die Abhandlungen des Referenten: 1. im Supplementheft 1868 dieser Zeitschrift, S. 105—140*, und 2. in der „Zeitschr.

* Diese Abhandlung ist leider im Generalregister aus Versehen weggeblieben.
Die Red.

für die gesammten Naturwissenschaften", Bd. XXXII S. 65—96 und S. 415—500.) Neu aber, oder wenigstens selten ist es, dass Musiker auf die mathematischen Berechnungen von Tonverhältnissen, Tonleitern, Schwingungszahlen u. s. w. mit solcher Sachkunde eingeben, wie es der Verf. hier gethan hat.* Wir müssen daher die Schrift freudig begrüssen, zumal da der Verf. die ganze Angelegenheit, um die es sich hier handelt, so darzustellen gewusst hat, dass sie selbst den nicht mathematisch gebildeten Musikern verständlich wird. Trotzdem werden auch Mathematiker und Physiker aus der kleinen Schrift noch Manches lernen können, namentlich werden alle Leser der „Lehre von den Tonempfindungen" darin eine höchst interessante Ergänzung der Abschnitte 16 und 18 dieses Werkes finden, — sogar einen unbedeutenden Rechenfehler des Herrn Prof. v. Helmholtz hat der Verf. ausfindig gemacht**.

Die Hauptsache zum Verständniss der Sache ist die von Hauptmann in Leipzig angebahnte und von Herrn Prof. v. Helmholtz genauer durchgeführte Unterscheidung mehrerer Töne gleichen Namens. Es giebt nämlich z. B. ausser dem $a = \frac{5}{3}$, welches die richtige grosse Sexte von $c = 1$ ist, noch ein $a = \frac{27}{16}$, welches durch die Quintenreihe c, g, d, a (1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$) und durch Transposition in die tiefere Octave gefunden wird. Die Schwingungszahlen dieser beiden Töne a verhalten sich wie 80:81, so dass das zweite um ein sogenanntes Komma höher ist als das erste; ebenso giebt es noch ein a, welches um ein Komma tiefer ist als die richtige Sexte. Dasselbe ist aber auch bei allen anderen Tönen der Fall, auch bei c selbst. (Vergl. auch Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 3. Auflage.)

Der Verf. des vorliegenden Schriftchens hat nun eine Anzahl von klassischen Tonstücken mit kühnen, weitgehenden Modulationen genauer untersucht und hat dabei gefunden, dass in denselben allerdings manchmal eine Erhöhung oder Vertiefung der Tonhöhe um ein Komma eintritt, indem durch die Modulation der Grundton der Tonart sich ändert; derartige Veränderungen der Tonhöhe kommen aber nur bei besonders charakteristischen Stimmungen vor (eine Erhöhung z. B. bei aufgeregten Stellen) und sind immer nur vorübergehend; schliesslich enden die Musikstücke, mit verschwindenden Ausnahmen, immer wieder in der Tonhöhe der ursprünglichen Tonart. Die wenigen Fehlgriffe, welche bei den grossen Meistern vorkommen, wären, wie Herr Prof. Engel sagt, leicht zu vermeiden gewesen, wenn der Sicherheit des Gefühls auch noch die bewusste Erkenntniss zur Seite gestanden hätte. Er giebt daher den

* Im Gegensatz dazu führe ich z. B. an das Buch: Das Tonsystem unserer Musik von Dr. O. Bähr, welches seine wohlverdiente Beurtheilung bereits im Literar. Centralblatt (1882, Nr. 30, S. 1003) gefunden hat.

** Es ist dies derselbe Fehler, den auch ich in meiner vorher erwähnten ersten Abhandlung S. 124 oben erwähnt habe.

Componisten den Rath, dem Harmoniegewebe mehr „mathematische Aufmerksamkeit“ als bisher zu schenken, er entwickelt auch einige Andeutungen über die Gesetze des Zusammenhangs der Tonarten und über die Methode, aus einer entlegenen Tonart wieder in die ursprüngliche, von der die Modulation ausgegangen ist, zurückzukehren. Der Verfasser giebt demnach den Physikern, welche die reine Stimmung (gegenüber der temperirten zwölfstufigen Scala) für die wahre Grundlage der Musik erklären, vollkommen Recht, er hält es auch für zweckmässig, wenn man dieselbe der Ausbildung unserer Kunstjünger mit zu Grunde legte. Da nun das 53stufige Harmonium der reinen Stimmung ganz nahe kommt (jede Stufe ist ungefähr ein Komma, 9 Stufen bilden einen richtigen grossen ganzen Ton, 8 einen kleinen, 5 einen halben Ton, — 17 eine grosse Terz, 31 eine richtige Quinte u. s. w.), so schliesst der Verfasser seine Abhandlung mit den Worten: „Sowohl für das Verständniss des theoretischen Theils der Musik, als für die Praxis, namentlich im Violinspiel und Gesang, würde ein 53stufiges Harmonium von unermesslichem Nutzen sein und deshalb glaubte ich, die Aufmerksamkeit der Musiker auf das Vorhandensein eines solchen Instrumentes hinweisen zu müssen.“

Wir können diesem Satze nur beistimmen und würden ein derartiges Harmonium, eventuell im kleineren Umfange (etwa $1\frac{1}{2}$ bis 2 Octaven umfassend) auch als ein geeignetes Instrument für die physikalischen Kabinete ansehen.

Erfurt, im August 1882. G. Schubring.

Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. Von Dr. C. Neumann, Professor an der Universität Leipzig. Leipzig, B. G. Teubner. 1881. VII u. 140 S. 4°. 7 Mk. 20 Pf.

Die vorliegende Schrift behandelt die Darstellung von Functionen einer Veränderlichen durch die Fourier'sche Reihe und das Fourier'sche Integral, ferner die von Functionen zweier Veränderlichen durch die Laplace'sche nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe, sowie durch das nach Bessel'schen Functionen fortschreitende (von dem Verfasser früher gefundene) Integral. In einem einleitenden Capitel wird zunächst gezeigt, wie man zu all' diesen Entwickelungen in einfacher und natürlicher Weise geführt wird mittelst gewisser den Kreis und die Kugel betreffender Potentialaufgaben. Bestimmt man nämlich mittelst der Green'schen Function diejenige Function V für das Innere der Kugel, welche in jenem Raume der Potentialgleichung genügt und an der Oberfläche gegebene Werthe annimmt, entwickelt dann die in dem Ausdrucke von

V vorkommende reciproke Entfernung zweier Punkte in bekannter Weise und wendet endlich die so erhaltene Reihe für V, die für jeden Punkt im Innern giltig ist, auf Punkte der Oberfläche an, so hat man die Laplace'sche nach Kugelfunctionen fortschreitende Entwickelung einer Function zweier Variablen. In gleicher Weise führt die entsprechende Aufgabe für das logarithmische Potential eines Kreises auf die Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe. Geht man von einem Kreise mit endlichem Radius zu einem unendlich grossen Kreise, so geht die Fourier'sche Reihe in das Fourier'sche Integral über, und ebenso ergiebt der Uebergang von einer endlichen zu einer unendlich grossen Kugel die folgende Darstellung einer Function zweier Veränderlichen:

$$F(\varrho_1, \varphi_1) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, J(q\sigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

wo

$$\sigma = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}$$

ist, während J die Bessel'sche Function mit dem Index Null bezeichnet. Diese Darstellung einer Function ist von Herrn C. Neumann 1862 gefunden. Bei dem Grenzübergange ergeben sich aus den bekannten Integraleigenschaften der Kreis- und Kugelfunctionen neue Integraleigenschaften der Kreis- sowie der Cylinderfunctionen, von denen folgende hier Platz finden mögen. Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^\alpha L_q \sin(qx)\, dq \right) \cdot \left(\int_0^\alpha M_q \sin(qx)\, dq \right) \right\} dx = \pi \int_0^\alpha L_q M_q\, dq,$$

wo α eine beliebige gegebene positive Constante vorstellt, während L_q und M_q beliebige Functionen von q sein können. Ferner ist

$$\int_0^\infty \left\{ \left(\int_0^\alpha L_q J(q\varrho)\, dq \right) \cdot \left(\int_0^\alpha M_q J(q\varrho)\, dq \right) \right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^\alpha L_q M_q \frac{dq}{q}.$$

An Stelle des Sinus in der ersten Formel kann auch der Cosinus treten, ebenso an Stelle der Bessel'schen Function J in der zweiten Formel die Bessel'sche Function J^n mit dem ganzzahligen Index n.

Die Methoden, durch welche bisher die einzelnen Entwickelungen sich ergeben haben, werden von dem Verfasser nur als heuristische angesehen. Die folgenden Capitel sind daher der strengeren Begründung der obigen Reihenentwickelungen, Integraldarstellungen und Integraleigenschaften gewidmet, und in dieser Beweisführung liegt das Hauptinteresse des Buches. Handelt es sich doch um eine der Hauptaufgaben der modernen Functionentheorie, deren Erledigung seit Dirichlet den Scharfsinn der hervorragendsten Mathematiker herausgefordert hat. Herr Neumann lehnt sich an keinen der früheren Autoren, die denselben

Gegenstand behandelt haben, direct an, hat sich vielmehr (unter Benutzung aller vorhandenen Arbeiten) die ganze Materie in eigenartiger Weise zurecht gelegt und stellt dieselbe zwar etwas breit, aber sehr klar und in durchweg präciser Fassung dar. Um seinen Auseinandersetzungen die möglichst einfache Gestaltung zu geben, sowie seine Darstellung abzurunden, hat er sich von vornherein, was die in eine Reihe, resp. in ein Integral zu entwickelnde willkürliche Function betrifft, auf die gewöhnlich vorkommenden Functionen beschränkt, also z. B. von Functionen einer Veränderlichen nur solche in Betracht gezogen, bei denen die Anzahl der Unstetigkeiten und ebenso auch die Anzahl der Maxima und Minima für jeden endlichen Spielraum der Variabeln eine endliche ist. Infolge dieser Beschränkung sind allerdings manche Fragen, die von anderen Autoren eingehend behandelt sind, nicht berührt, z. B. die Frage über das Verhalten von Functionen mit unendlich viel Maximis und Minimis, die Frage nach der Convergenz in gleichem Grade etc. In der genannten Beschränkung aber kann das Buch des Herrn Neumann als eine musterhafte Darstellung bezeichnet werden, die auch geeignet ist, die vorgetragenen Probleme einem weiteren Leserkreise näher zu bringen.

An die Spitze seiner Beweisführung stellt Herr Neumann, um eine schleppende Ausdrucksweise zu vermeiden, folgende neue Definitionen, die so zweckmässig gewählt sind, dass sie allgemein adoptirt zu werden verdienen: Eine Function, die in einem Intervall niemals wachsend oder niemals abnehmend ist, wird monoton genannt, und zwar, je nachdem das Eine oder das Andere stattfindet, monoton wachsend oder abnehmend. Abtheilungsweise monoton heisst eine Function in einem bestimmten Intervall, wenn dieses Intervall in eine endliche Anzahl von Strecken zerlegbar ist, derart, dass die Function längs jeder einzelnen Strecke monoton ist. Darnach erkennt man unmittelbar die Bedeutung des Ausdrucks abtheilungsweise stetig. An diese Definitionen schliesst sich der Beweis des sogenannten Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes in folgender Form: Sind $f(x)$ und $\Phi(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ abtheilungsweise stetig, und setzt man überdies voraus, dass $f(x)$ in jenem Intervall monoton sei, so gilt die Formel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \Phi(x)\,dx + f(\beta)\int_\xi^\beta \Phi(x)\,dx, \quad \alpha \leqq \xi \leqq \beta.$$

Dieser Satz bildet das Hauptinstrument der folgenden Untersuchung. Um von derselben ein Bild zu geben, sei es gestattet, den Gang des Beweises für die Entwickelbarkeit einer Function in eine trigonometrische Reihe kurz zu reproduciren.

Aus der einfachen Aufstellung

$$1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

werden unter Anwendung des Mittelwerthsatzes zwei Formeln abgeleitet, die, wenn man den darin enthaltenen beliebigen Constanten specielle Werthe beilegt (und nur für diese speciellen Werthe werden die Formeln im Folgenden angewandt), lauten:

$$1) \qquad abs \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} d\varphi < 4\pi^2, \text{ falls } 0 \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \pi;$$

$$2) \qquad abs \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} d\varphi < \frac{4}{(n+\frac{1}{2})\sin(\frac{1}{2}\gamma)} < \frac{4}{n\sin(\frac{1}{2}\gamma)},$$

$$\text{falls } 0 < \gamma \leqq \delta \leqq \pi.$$

Bei der Fourier'schen Reihe handelt es sich nun darum, wenn man

$$1 + 2\sum_{1}^{n} \cos n(\varphi - \varphi_1) = \Delta_n(\varphi - \varphi_1)$$

setzt, den Werth von

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Delta_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi$$

zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht zunächst für $\varphi_1 = 0$ folgendermassen. Die Function $F(\varphi)$ sei im Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton. Man kann dann das Intervall 0 bis π in eine endliche Anzahl von Strecken zerlegen, so dass $F(\varphi)$ längs jeder solchen Strecke monoton ist. Ist h die Anzahl der Strecken, α ein (zunächst beliebiger) Werth innerhalb der ersten (von Null ausgehenden) der genannten Strecken, so ergiebt sich durch Zerlegung des zu betrachtenden Integrals in Theilintegrale, dann durch Anwendung des Mittelwerthsatzes und der obigen mit 1) und 2) bezeichneten Formeln:

$$abs \int_{0}^{\pi} [F(\varphi) - F(0)]\, \Delta_n(\varphi)\, d\varphi < \frac{4Mh}{n\pi \sin(\frac{1}{2}\alpha)} + 2\pi . abs[F(\alpha) - F(0)].$$

Dabei ist M der grösste Werth von $F(\varphi) - F(0)$ im Intervall $0 \ldots \pi$. Lässt man nun zuerst α der Null sich immer mehr nähern, so wird zunächst das zweite Glied der rechten Seite beliebig verkleinert. Lässt man dann n wachsen, so kann auch das erste Glied verkleinert werden, während das zweite (vorher verkleinerte) ungeändert bleibt. So ergiebt sich die gesuchte Grenze für $\varphi_1 = 0$, während die Grenze des allgemeinen Integrals hieraus sofort folgt, wenn man $F(\varphi)$ als die Dichtigkeit einer auf einer Kreislinie ausgebreiteten Massenbelegung auffasst und die Lage des Anfangspunktes $\varphi = 0$ auf der Peripherie ändert. Vereinfacht man

das so erhaltene Theorem nachträglich durch Ablösung von der Kreisperipherie, so hat man die Fourier'sche Entwickelung der Function $F(\varphi)$. Die Ausdehnung auf andere Intervalle, resp. für periodische Functionen auf alle Werthe des Arguments ergiebt sich leicht. Die einzige Voraussetzung liegt darin, dass F abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist.

Die Untersuchung über Kugelfunctionen stützt sich auf die Arbeiten von Dini und Heine; es wird hier jedoch der jenen Arbeiten zu Grunde liegende Satz über die Grenze von $P_n(\cos\omega)$ für $n=\infty$ vermieden, ein Satz, der namentlich für den Fall etwas beschwerlich ist, wo ω selbst mit wachsendem n sich der Null nähert. Hier werden nur die beiden folgenden Sätze gebraucht, in denen $F(\mu)$ eine Function bezeichnet, die im Intervall $\mu=-1$ bis $\mu=+1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, während $P'_n(\mu)$ der Differentialquotient der gewöhnlichen Kugelfunction ist:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{+1} F(\mu)\,P'_n(\mu)\,d\mu = F(1)+(-1)^{n+1}F(-1),$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{a}^{b} F(\mu)\,P'_n(\mu)\,d\mu = 0, \quad \text{wenn } -1<a<b<1.$$

Es handelt sich nun darum, die Grenze des Doppelintegrals zu bestimmen

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} f(\mu,\varphi)\left(\sum_{0}^{n}(2n+1)\,P_n(\cos\gamma)\right)d\mu\,d\varphi,$$

wo

$$\cos\gamma=\mu\mu_1+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Diese Bestimmung erfolgt durch eine ähnliche Zerlegung, wie bei den trigonometrischen Reihen, zunächst wieder für $\mu_1=1$, und daraus folgt das allgemeine Resultat durch Verlegung des Anfangspunktes der Polarcoordinaten auf der Kugel. Zu der Bestimmung für $\mu_1=1$ kann man auf doppelte Weise gelangen, je nachdem man zuerst die Integration nach φ, dann die nach μ ausführt, oder umgekehrt. In beiden Fällen gelangt man zu dem bekannten Resultat, dass die Grenze des obigen Doppelintegrals gleich ist dem arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\mu,\varphi)$ längs eines um den festen Punkt (μ_1,φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises besitzt. Je nachdem man aber dies Resultat auf die eine oder andere Weise ableitet, ist die zu entwickelnde Function verschiedenen Bedingungen unterworfen. Das eine Mal ist zur Giltigkeit der Entwickelung nöthig, dass $F(\xi)$ im Intervall $\xi=-1$ bis $+1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist. Darin bedeutet

$F(\xi)$ das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\mu, \varphi)$ annimmt auf einem um den Punkt (μ_1, φ_1) mit dem sphärischen Radius $\varrho = arccos\, \xi$ beschriebenen Kreise. — Das andere Mal dagegen ergiebt sich folgende einfachere Bedingung: Zur Giltigkeit der Laplace'schen Reihenentwickelung ist erforderlich, dass $f(\mu, \varphi)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sei längs eines jeden der von dem Punkte (μ_1, φ_1) nach dem entgegengesetzten Punkte der Kugel laufenden Meridiane. Aus der Laplace'schen Entwickelung ergiebt sich unmittelbar auch die von Functionen einer Variablen nach Kugelfunctionen, und die letztere Entwickelung lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die adjungirten Functionen an Stelle der einfachen Kugelfunctionen treten.

Auf die weiteren Einzelheiten dieser Untersuchung einzugehen, würde zu weit führen; wir müssen in dieser Hinsicht auf das Neumann'sche Buch selbst verweisen, ebenso in Bezug auf die Abschnitte, welche die Integraldarstellungen einer Function von einer und zwei Variabeln erörtern.

Zum Schluss sei es noch gestattet, einen Punkt zu berühren, in dem Referent mit Herrn Neumann nicht ganz einverstanden ist. Statt den Mittelwerthsatz den Du Bois-Reymond'schen zu nennen, würde Referent den von Heine (Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Theil I S. 61) benutzte Bezeichnung: „zweiter Mittelwerthsatz (von den Herren Du Bois-Reymond und Weierstrass)“ vorgezogen haben. Fest steht, dass Herr Weierstrass den Satz vor Du Bois' Veröffentlichungen in seinen Vorlesungen vorgetragen und auch auf die Tragweite und Bedeutung desselben aufmerksam gemacht hat, und dies muss doch auch als eine Art der Publication angesehen werden. Dass Herr Du Bois den Satz unabhängig gefunden, wird von Niemand bezweifelt; aber die Billigkeit erfordert, auch den Namen Weierstrass dabei zu erwähnen. Man müsste denn auf O. Bonnet zurückgehen, der lange vorher einen Specialfall des in Rede stehenden Satzes gefunden, und zwar einen solchen Specialfall, aus dem sich der allgemeine Satz leicht ergiebt, so dass zwischen dem Bonnet'schen und dem allgemeinen Satze ein analoges Verhältniss existirt, wie etwa zwischen dem Mac-Laurin'schen und dem Taylor'schen Satze. Bei dieser Sachlage würde Referent das etwas demonstrative Hervorheben des Satzes als des Du Bois-Reymond'schen vermieden haben.

Wangerin.

Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium, von Dr. Gustav Ad. v. Peschka, k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Hochschul-Professor, Mitglied der k. k. Staatsprüfungs-Commission und der

k. k. wissenschaftlichen Realschul-Prüfungscommission an der k. k. technischen Hochschule zu Brünn etc. etc. Erster Band. Mit einem Atlas von 34 Tafeln. gr. 8°. XVIII, 578 S. Wien, Carl Gerold's Sohn. 1883.

Der uns vorliegende erste Theil, „Methodik“, des Werkes behandelt die verschiedenen Projectionsarten, und zwar ohne die eine oder die andere gerade zu bevorzugen. Hierdurch wird es möglich, den Leser mit den constructiven Vortheilen, welche die verschiedenen Methoden für gewisse Gruppen von Darstellungen und Untersuchungen bieten, soweit vertraut zu machen, dass demselben in jedem concreten Falle die Entscheidung über die zweckmässigste Darstellung keinerlei Schwierigkeit bieten kann.

Als allgemeinste Projectionsmethode bildet die Centralprojection den Ausgangspunkt. Hier können wir sofort eine vortheilhafte Aenderung gegenüber der älteren, in Verbindung mit Koutny herausgegebenen „Freien Perspective“ des Verfassers darin erkennen, dass allein Bildebene und Centrum in fester gegenseitiger Lage zu einander gegeben sind und nicht noch weitere Elemente wie Grundebene und Vertikalebene hinzutreten, die es weniger klar erkennen lassen, welche Bestimmungsstücke für jede Construction absolut nothwendig sind.

Nachdem die Elemente: Gerade, Punkt, Ebene im ersten Capitel ihre Darstellung gefunden haben, werden im zweiten projectivische, im dritten metrische Beziehungen zwischen jenen Gebilden erörtert. Es dürfte kaum eine Elementaraufgabe genannt werden können, welche nicht ihre umfassende Erledigung gefunden hätte. Beanstanden möchten wir den Begriff „Principiell projectivische Aufgaben“, wie er im § 45 aufgefasst wird, indem in denselben alle Aufgaben eingereiht werden, welche sich ohne Zuhilfenahme der Distanz lösen lassen, wie z. B. Constructionen von Parallelen zu gegebenen Geraden oder Ebenen, die entschieden metrischer Natur sind, aber dennoch mit alleiniger Benutzung der Fluchtelemente ihre Lösung finden können, weil von vornherein das Unendliche durch die Methode ausgezeichnet ist, eben durch Angabe der Fluchtelemente als Bilder unendlich ferner Punkte oder Geraden. Es giebt nicht *a priori* auf jedem Projectionsstrahle zwei „besondere“ Elemente — Durchstosspunkt und unendlich ferner Punkt —, welche „ausnahmsweise“ durch ihre Bilder allein bestimmt sind, wie der Verfasser § 3 bemerkt, man wählt jene Elemente, als für die Darstellung besonders bequem, erst aus, hätte aber in irgendwelcher Weise zwei andere Punkte durch den Durchstosspunkt repräsentiren können, etwa die Schnittpunkte mit zwei allgemeinen festen Ebenen, wie denn etwas Derartiges bei der Behandlung der klinographischen Projection wirklich geschieht, wo statt der unendlich fernen Ebenen eine parallele zur Bildebene benutzt wird.

Im vierten Capitel werden durch Vergleichung des Originals mit seinem Bilde die Gesetze der Collineation und der Projectivität unter Anwendung von Doppelverhältnissen entwickelt. Wie der Verfasser im Vorwort sagt, ist der leichteren Fasslichkeit wegen der Steiner'schen rechnenden Methode der Vorzug gegeben, obgleich er die v. Staudt-sche Begründung der projectivischen Fundamentallehren für die strengere und wissenschaftlichere hält. Wissenschaftlicher kann man sie als rein geometrisch nennen, aber strenge ist sie erst in neuester Zeit durch Darboux'* Verbesserung des Beweises vom Fundamentalsatz geworden, dessen ursprüngliche Mängel ja von Klein bereits vor Jahren erkannt worden waren.

Am Schlusse von § 136 ist übrigens dem Verfasser ein kleiner Fehler unterlaufen in der Behauptung, dass drei Punkte durch einen Punkt und eine Gerade, bez. durch zwei Gerade ersetzt werden könnten und daher auch diese Elemente mit ihren entsprechenden, wie drei Punktepaare, zur Bestimmung eine Collineation hinreichend seien; aber erst drei Geradenpaare leisten das Gewünschte.

Nachdem durch das Bisherige die Fundamente für die Behandlung der Kegelschnitte gewonnen sind, werden diese Curven als Centralprojectionen eines Kreises betrachtet, indem nachgewiesen wird, dass letzterer aus je zwei seiner Punkte durch zwei projectivisch gleiche Büschel projicirt wird und je zwei seiner Tangenten von allen übrigen in projectivischen Reihen getroffen werden. Hierbei wird irrthümlich der Satz aufgestellt und bewiesen, dass auch umgekehrt zwei projectivisch gleiche Büschel immer einen Kreis erzeugen, welches jedoch nur dann der Fall ist, wenn Gleichstimmigkeit vorhanden. Ungleichstimmige derartige Büschel erzeugen eine gleichseitige Hyperbel.

Nun folgen die wichtigen Sätze von Pascal und Brianchon und die Eintheilung der Kegelschnitte nach dem Unendlichfernen. Was den Beweis des Fundamentalsatzes der Polarentheorie: Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch den Pol und umgekehrt etc. — anlangt, so sind wir der Ansicht, dass jeder der Fälle ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes liegender Pole für sich behandelt werden muss, und sich hier für jeden Fall besonders anzustellende Ueberlegungen, wie z. B. Herr Reye sie in seiner Geometrie der Lage benutzt, nicht umgehen lassen. So ist gegen den Beweis des Satzes 81 (§ 194): „Der Pol P der Verbindungslinie zweier Punkte P_1 und P_2 ist der Schnittpunkt der Polaren dieser Punkte" so lange nichts einzuwenden, als P innerhalb des Kegelschnittes fällt, d. h. jede durch ihn gehende Gerade den Kegelschnitt schneidet. Aber wie, wenn P ausserhalb liegt und die benutzten Punkte A und B, in welchen PP_1 den Kegelschnitt schneiden soll, nicht (reell) vorhanden sind!

* Mathematische Annalen Bd. XVII, 55. Siehe auch Klein ibid. S. 52.

Mit der Betrachtung der Durchmesser- und Brennpunktseigenschaften und der Construction des Krümmungskreises — immer unter Benutzung der Collinearverwandtschaft des Kegelschnittes mit einem Kreise — wird dann die Theorie dieser Curven beendigt.

Die Aufstellung des Gesetzes der Reciprocität, entspringend aus der Polarentheorie, bildet den Schluss des ersten Abschnittes.

Im zweiten Abschnitt (Capitel V—VII) wird die klinographische oder schiefe Projection in der Weise behandelt, wie der Verfasser es bereits in den Sitzungsber. d. kaiserl. Akademie d. Wissensch., Wien, Bd. LXXV, 1877, that. Neben der Bildebene wird noch eine zu ihr parallele im Abstande D, die Distanzebene eingeführt. Die Bestimmungsstücke eines Projectionsstrahles sind dann sein Durchstosspunkt mit der Bildebene, die Orthogonalprojection seines Schnittpunktes mit der Distanzebene und D.

Hierdurch ist, wie leicht ersichtlich, ein rechtwinkliges Dreieck, das Distanzdreieck, mit dem Projectionsstrahl als Hypotenuse bestimmt, dessen Umlegung in die Bildebene den Constructionen zu Grunde liegt.

Im letzten Capitel werden die affinen Gebilde einer gegebenen Figur und insbesondere des Kreises untersucht, auf welche die vorliegende Projectionsmethode naturgemäss führt.

Erst im dritten Abschnitte wird von zwei Bildebenen Gebrauch gemacht. Der Inhalt dürfte hinlänglich durch die Capitelüberschriften charakterisirt sein, welche wir hier folgen lassen: Capitel VIII. Monge's Orthogonalprojection. A. Projectivische Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene; B. Metrische Beziehungen bei orthogonaler Projection in Bezug auf zwei Projectionsebenen. — Capitel IX. Methode der schiefen Projection mittels zweier aufeinander senkrecht stehender Projectionsebenen. A. Projectivische, B. metrische Beziehungen. — Capitel X. Orthogonale Parallelperspective. — Capitel XI. Axonometrie. Vom Pohlke-schen Fundamentalsatz der Axonometrie werden zwei Beweise gegeben. Der erste wurde vom Verfasser in den Sitzungsber. d. kaiserl. Akademie d. Wissensch., Wien, Bd. LXXXVIII, 1878, zuerst mitgetheilt; der zweite ist der von Pohlke selbst herrührende.

Der vierte Abschnitt: „Allgemeines über die Lagenveränderungen räumlicher Gebilde" enthaltend, behandelt in vier Capiteln die Transformationen, welche bei den verschiedenen Methoden hinsichtlich des Centrums des Objects und der Bildebene vorkommen können. Wie der Verfasser selbst sagt, sind dieselben wesentlich als Mittel zur Vereinfachung graphischer Operationen anzusehen.

Der fünfte Abschnitt: „Besondere Darstellungsmethoden", enthält mehrere unter sich heterogene Dinge: Capitel XVI. Die Parallelogrammprojection. — Capitel XVII. Collineation der Räume; Reliefperspective. — Capitel XVIII. Centrale Projection mit Zuhilfenahme einer Grundebene.

— Im XVI. Capitel wird parallel zu zwei festen Ebenen, welche gleichzeitig als Bildebenen genommen werden, projicirt.

Die Theorie der räumlichen Collineation hätte sich wohl wesentlich vereinfacht, wenn der Satz des § 465: „Jede beliebige durch das Collineationscentrum gehende Ebene B schneidet von den räumlich collinearen Systemen Σ_1 und Σ_2 zwei ebene centrisch-collineare Systeme σ_1 und σ_2 aus“, zum Ausgangspunkt gewählt worden wäre. Der Beweis desselben ergiebt sich nämlich unmittelbar: Drei entsprechende Punktpaare einer solchen Ebene bestimmen in derselben eine Collineationsaxe. Je zwei, verschiedenen Ebenen angehörige, Axen müssen sich treffen: auf der Schnittlinie dieser Ebenen. Die Axen gehen nicht alle durch einen Punkt; folglich liegen alle in einer Ebene, der Collineationsebene etc. Es wäre namentlich der indirecte Beweis dafür, dass das Collineationscentrum ein Doppelelement sei, dadurch vermieden worden.

Ungern vermissen wir die Herstellung der perspectivischen Lage bei ebenen Systemen und die Darlegung der Gründe, welche es im Allgemeinen unmöglich machen, zwei räumliche Systeme in perspectivische Lage zu bringen.

Im letztgenannten Capitel werden Beziehungen zwischen der Centralprojection des Objects und der Centralprojection des Grundrisses aufgestellt und verwerthet.

Der sechste Abschnitt enthält eine Reihe von Anwendungen auf „Gebilde, welche aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke zusammengesetzt sind“. Es werden betrachtet: Capitel XIX. Das körperliche Dreieck oder das Dreikant. — Capitel XX. Polyederebene und gegenseitige Schnitte derselben. Regelmässige Polyeder. — Capitel XXI. Ebene Schnitte der Polyeder. — Capitel XXII. Gegenseitiger Schnitt zweier Polyeder.

Bei der Lösung der hier gestellten Aufgaben kommen die verschiedensten Projectionsmethoden zur Anwendung und die sorgfältige Durcharbeitung von Seiten des Studirenden gewährt zugleich demselben eine ausgezeichnete Repetition.

Ein Anhang, welcher die Verwendung der verschiedenen Projectionsarten bei der Dartellung technischer Objecte auseinandersetzt, bildet den Schluss dieses ersten Theils.

Das Vorliegende bietet sich demgemäss dar als eine sehr ausführliche Behandlung der bekannten Darstellungsmethoden. Text und Construction sind ausnahmslos bis ins kleinste Detail durchgeführt, völlig entsprechend der im Vorwort geäusserten Ansicht des Verfassers, dass bezüglich der Deutlichkeit ein „zu viel“ dem „zu wenig“ vorzuziehen sei. Wenn wir nicht so ganz dieser Ansicht sind, vielmehr glauben, dass eine kurze Andeutung unter Hinweis auf die Figur bisweilen, und namentlich dann, wenn der Leser bereits sich in die Elemente eingelebt hat, empfehlens-

werther, weil anregender und vor Uebersättigung schützend, sei, so soll dadurch in keiner Weise ein Tadel ausgesprochen sein. Gewiss ist es nicht Jedermanns Sache, Lehren in so knapper Form, wie Fiedler's Buch sie enthält, ohne grössere Anstrengung aufzunehmen, und sei somit das vorliegende Werk insbesondere allen Denen, die ohne Vorkenntnisse auf denkbar bequemste Weise in die Wissenschaft eingeführt sein wollen, auf's Wärmste empfohlen.

Dem Erscheinen der weiteren Bände, welche die Theorie der algebraischen Curven, Flächen und deren Systeme bringen werden, sehen wir mit Interesse entgegen.

Schliesslich sei noch die vortreffliche Ausstattung des Werkes, sowohl was Druck des Textes als der Tafeln anlangt, rühmend hervorgehoben.

Darmstadt. Dr. Carl Rodenberg.

---

1. **Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie.** Von Dr. F. Prym, Prof. a. d. Universität Würzburg. Leipzig, B. G. Teubner. 1882. VIII u. 111 S.
2. **Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel.** Von Dr. Adolf Krazer. Leipzig, B. G. Teubner. 1882. VI u. 66 S.

Die Schrift des Herrn Prym zerfällt in fünf getrennte, aber in innerem Zusammenhange stehende Aufsätze. Wie die ganze Schrift dem Andenken Riemann's gewidmet ist, so verdanken auch der erste der Aufsätze seine Anregung dem mündlichen Verkehr des Verf. mit Riemann im Frühjahr 1868 in Pisa, der dritte und vierte solche einer Riemann'schen Vorlesung aus dem Sommer 1862.

Der erste Aufsatz enthält die dem Verfasser von Riemann mitgetheilte Thetaformel. Es ist das allgemeinste Additionstheorem:

$$2^p\,\vartheta((u+v+w+t)).\vartheta((u+v-w-t)).\vartheta((u-v+w-t)).\vartheta((u-v-w+t))$$
$$=\sum_{\varepsilon}\vartheta_{[\varepsilon]}((2u)).\vartheta_{[\varepsilon]}((2v)).\vartheta_{[\varepsilon]}((2w)).\vartheta_{[\varepsilon]}((2t)),$$

wo die Summe über alle 2^{2p} ϑ-Charakteristiken $[\varepsilon]$ auszudehnen ist. Diese Formel, die Verallgemeinerung der Jacobi'schen für $p=1$ und Rosenhain'schen für $p=2$, ist zwar auch von Frobenius (Cr. J. 89, S. 201) hergestellt worden; aber der Verf. beweist sie ohne Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten nach Riemann'schem functionentheoretischem Gedankengange. Seitdem hat der Verf. diesen Beweis durch zwei einfachere ersetzt (Cr. J. 93, S. 124 und in einer autographirten Mittheilung), der letztere rein combinatorisch.

Um die Bedeutung des Theorems zu zeigen, giebt der Verfasser im zweiten Aufsatze eine Erweiterung desselben auf complicirtere Argumente,

im letzten die Ableitung der verschiedenen Thetarelationen aus demselben. Als Mittel zu letzterem Zwecke dienen zunächst der dritte und vierte Aufsatz, welche die hierzu nothwendigsten Untersuchungen aus der Charakteristikentheorie bringen. Der Standpunkt des Herrn Verf. hierbei, den er mit Herrn Frobenius theilt, ist der, dass nur solche Eigenschaften von Systemen von Charakteristiken als wesentlich betrachtet werden, von welchen die zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen abhängen. Referent möchte hier seinen principiellen Einwand gegen diesen Standpunkt wiederholen: Für eine Charakteristikentheorie als solche reicht derselbe nicht aus, weil diese auch anderen Zwecken, z. B. der Zuordnung zu den algebraischen Functionen, zu genügen hat, hierbei aber in demselben Satze zwei verschiedene Auffassungen einer und derselben Charakteristik — das eine Mal als mit $2^{2p}-1$ Charakteristiken ohne [0] als gleichwerthig, das andere Mal nur mit allen ungeraden, bez. nur mit allen geraden incl. [0] — nicht zulässig werden; es wird dabei die vom Ref. vorgenommene Trennung in „eigentliche“ und „Gruppen“-Charakteristiken nöthig.

In dem fünften Aufsatze liegt die Bedeutung der angezeigten Schrift. Vermehrt man in der obigen Riemann'schen Formel die Argumente um gewisse halbe Perioden, so kann man aus derselben 2^{2p} solcher Formeln ableiten, in welchen auf den linken Seiten 2^{2p} verschiedene Producte, auf den rechten Seiten für jede Gleichung dieselben 2^{2p} Producte stehen, während die Coefficienten nur die Zahlen $+1$ oder -1 sind. Indem man diese Producte durch Variable ersetzt, erhält man ein System von 2^{2p} linearen Gleichungen, mit Coefficienten $+1$ und -1, deren Anordnung mit den Charakteristiken in einfachem, übrigens (wie der Verf. citirt) schon früher bemerktem Zusammenhange steht. Aus diesen linearen Gleichungen weiss nun der Verf. eine Fülle von Relationen zu ziehen, die durch Einsetzen der bezeichneten Thetaproducte grosse Bedeutung für die Theorie der Thetafunctionen gewinnen. So ergiebt sich u. A. für $t=-(u+v+w)$ das von Herrn Frobenius und vorher vom Ref. abgeleitete Additionstheorem. Auf diesem Wege des Verf. ist vor Allem auch Uebersichtlichkeit der Relationen erreicht; indess geht der Verf. noch nicht so weit, auch die zwischen denselben bestehenden Beziehungen zu discutiren, eine Aufgabe, die in der That weitergehende Charakteristikenbetrachtungen erfordern würde. —

Die Schrift des Herrn Dr. Krazer enthält die Anwendung des besprochenen fünften Aufsatzes auf $p=2$, unter Berücksichtigung sowohl der Rosenhain'schen, als der Göpel'schen Vierersysteme von Charakteristiken. Es ist, nach dem Vorgange der allgemeinen Darstellungen von Herrn Frobenius und dem Ref., nur selbstverständlich, dass der Verf. hierbei die sechs ungeraden Charakteristiken im Allgemeinen nicht unterscheidet; aber es wäre consequent gewesen, diese Unterscheidung auch

in der Anordnung S. 5, die noch auf viel allgemeinere Art möglich ist, nicht hervortreten zu lassen. Es würden sich dann die Tabellen am Schlusse der Arbeit auch durch eine übersichtliche Formel ersetzen. Der von Rohn behandelte Zusammenhang zwischen den Formeln § 14, IV und § 16, IV′ ist nicht besprochen.

Erlangen. M. Noether.

C. Hildebrandt: **Ueber die stationäre Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche.** Inauguraldissertation. Göttingen*, 1882. 18 S. [Auch als Programm 1882 der Realschule zu Gandersheim im Auszuge erschienen.]

Bekanntlich genügt das logarithmische Potential der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

der auch der reelle oder imaginäre Theil einer Function complexen Arguments $u+vi=f(x+yi)$ gehorcht. Daraus ergiebt sich, dass, wenn man in ein Flächenstück durch beliebig gestaltete und willkürlich liegende Elektroden Elektricität aus- resp. einströmen lässt und für den entsprechenden stationären Zustand die Stromlinien und Niveaucurven bestimmt hat, nur conforme Abbildung mittels beliebiger Functionen nöthig ist, um auf synthetischem Wege zur Lösung neuer Probleme zu gelangen.

Weiss man z. B., dass, wenn in unbegrenzter leitender Ebene in einem endlichen Punkte Elektricität ein-, im unendlichen Bereiche abgeleitet wird, ein Strahlenbüschel und die concentrische Kreisschaar als Stromlinien und Niveaucurven auftreten, so kann man mittels der Abbildung $Z=\sqrt{z}$ auf den Fall zweier Einströmungselektroden im Endlichen, einer im Unendlichen gelangen, wobei ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln und die Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten an Stelle der früheren Curven treten. Die Abbildung $Z=\sqrt[n]{z}$ lässt die Einströmungselektroden auf die Eckpunkte eines regulären Polygons übertreten, die Abbildung mittels ganzer rationaler Function auf n beliebig in der Ebene liegende Punkte. Die gebrochene rationale Function hingegen vertheilt nicht nur die n Einströmungspunkte, sondern auch m Ableitungspunkte beliebig in der Ebene. So gelangt man zu den Stromlinien, die Referent im 83. Bande des Crelle'schen Journals und im Programm 1880 der königl. Gewerbeschule zu Hagen behandelte und als irreguläre Lemniscaten und Hyperbeln von der Ordnung $\frac{m}{n}$ bezeichnete. Auch Lucas und Darboux haben sich mit der geometrischen Seite dieses

* Durch Göttinger Buchhandlungen zu beziehen.

Problems beschäftigt. Im Zusammenhange ist das Ganze im 9.—11. Capitel der „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“, die Referent soeben bei B. G. Teubner erscheinen liess, dargestellt.

Das vorliegende Schriftchen des Herrn Hildebrandt beschäftigt sich nun mit der elektrodynamischen Ausbeutung dieser Theorien, von denen man bekanntlich auch hydrodynamische und wärmetheoretische Deutungen geben kann. Zunächst wird die Literatur über den Gegenstand besprochen. Sodann geht der Verfasser von dem einfachsten Falle zu den complicirteren über, die oben genannt wurden. Im zweiten Theile werden mit Hilfe der Inversion die Probleme auf die Kugeloberfläche übertragen, auch die Transformation nach der Kegelfläche wird kurz angedeutet.

Die Lectüre des kurz und klar geschriebenen Schriftchens ist um so interessanter, als in neuerer Zeit Herr Dr. Guébhard zu Paris versucht hat, den experimentellen Prüfungen der obigen Resultate von Kirchhoff und Anderen eine neue Methode anzureihen: die angenäherte Fixirung der Spannungscurven auf elektrochemischem Wege mittels Nobili'scher Farbenringe. Die fraglichen Abhandlungen befinden sich im Electricien, im Journal de Physique, in den Bulletins der Société de Physique und in den Comptes rendus der Académie des Sciences von 1881 und 1882. Kritische Beleuchtungen dieser Methode geben Prof. Mach und Dr. Hugo Meyer, der Erstere im Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom Juni 1882, der Letztere in den Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 6. Sept. 1882. Von einer endgiltigen Entscheidung der Frage kann aber wohl noch nicht die Rede sein.*

Wer sich schnell über das besprochene Gebiet orientiren will, dem sei die Hildebrandt'sche Abhandlung zur Lectüre empfohlen.

---

* Inzwischen sind noch mehrere Abhandlungen von Voigt, Ditscheiner und Meyer in Wied. Annalen, den Göttinger Nachrichten und den Wiener Berichten erschienen, ohne jedoch die Frage der Guébhard'schen Experimente zu einem wirklichen Abschlusse zu bringen.

Dr. G. Holzmüller.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 30. April 1883.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1883. Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftl. Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1883, 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 8 Mk.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 11. Jahrgang. Berlin, Mittler & S. pro compl. 3 Mk.

Annalen des Petersburger physikal. Centralobservatoriums. Jahrg. 1881. Thl. 2, Meteorolog. Beobachtungen. Herausgegeben von H. Wild. Leipzig, Voss. 15 Mk. 40 Pf.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1882. München, Franz. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Cl. II. Abth. (Mathem., Phys., Chemie, Mechanik, Astron. u. Meteorol.) 86. Bd. 3. Heft. Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.

Journal f. reine u. angewandte Mathematik (begr. v. Crelle), herausgeg. von L. Kronecker u. W. Weierstrass. 94. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krüger. 105. Bd. (24 Nrn.), Nr. 2497. Hamburg, Mauke & S. pro compl. 15 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht; herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. 14. Jahrg. (8 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 12 Mk.

Zeitschrift für Instrumentenkunde, redig. v. G. Schwirkus u. A. Westphal. 3. Jahrg. (12 Hefte). 1. Heft. Berlin, Springer. pro compl. 18 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 12. Bd., Jahr 1880, herausgeg. v. C. Ohrtmann. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fortschritte der Physik, dargestellt v. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin. 34. Jahrg., das Jahr 1878 betr., redig. v. Neesen. 1. Abth., enth. allgem. Physik u. Akustik. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Tageblatt der 55. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Eisenach im Sept. 1882; redig. v. G. Kühn. Eisenach, Bärecke. 6 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Prowe, L., Nicolaus Coppernicus. 1. Bd.: Das Leben. 2 Thle. Berlin, Weidmann. 24 Mk.

Reine Mathematik.

Doormann, C., Anwendung der Lamé'schen Functionen auf Probleme der Potentialtheorie, bez. d. dreiax. Ellips. und die Fresnel'schen Elasticitätsflächen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Spitzer, S., Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 3. Heft (Schluss). Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.

Adam, B., Ueber reciproke Gleichungen. Clausthal, Grosse. 1 Mk.

Hauck, A. u. H., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Gymnas. etc. 3. Thl. 2. Abth. Nürnberg, Korn. 2 Mk. 60 Pf.

Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. 3. Aufl., herausgeg. v. O. Hermes. Berlin, G. Reimer. 3 Mk. 60 Pf.

Noether, M., Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Voretzsch, M., Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung mit einer Schaar ebener Krümmungslinien. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

Schumann, A., Die Steiner'schen Kreisreihen und ihre Beziehung zum Poncelet'schen Schliessungsproblem. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Hering, A. G., Grundzüge der ebenen Trigonometrie. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk.

Luke, A., Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 2. Heft. Halle, Schmidt. 2 Mk. 40 Pf.

Gussbrow, C. u. L. Levy, Abriss der Trigonometrie. Berlin, polytechn. Buchhdlg. 60 Pf.

Menger, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Wien, Hölder. 3 Mk. 60 Pf.

Freyer, Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung. Berlin, Weber's Verl.-Cto. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Ideler, L., Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. 2. Aufl. Lief. 1, 2 u. 3. Breslau, Köbner. 15 Mk.

Astronomische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen; ausgeführt v. C. Bruhns, bearb. v. Th. Albrecht. 1. Heft. Berlin, Friedberg & Mode. 10 Mk.

Brill, A., Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreiecks. München, Franz. 1 Mk.

Oberfeld, G., Grundzüge der mathematischen Geographie. Wittenberg, Herrosé. 1 Mk. 50 Pf.

Krüger, P., Rotations- und Pendelbewegung eines Köpers in einer Flüssigkeit. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Schüler, W. F., Die Falllinie und die Planetenbahnen als involutorische Punktreihen etc. Ansbach, Brügel & S. 1 Mk. 20 Pf.

——, Das Imaginäre in der analyt. Geometrie und das Problem der stationären Strömung in der unendlichen Ebene. Ebendas. 1 Mk.

Kötter, F., Ueber das Gleichgewicht biegsamer unausdehnbarer Flächen. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 50 Pf.

Hentschel, O., Ueber stationäre elektrische Strömungen in einer lemniscatischen Platte. Salzwedel, Klingenstein. 60 Pf.

Lolling, G., Ueber die Bewegung elektrischer Theilchen nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Fourier, M., Théorie analytique de la chaleur. Nouvelle éd. 1. Livr. Breslau, Köbner. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

Lange, H., Der Aether als Träger gewisser Naturerscheinungen. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Krech, G., Photometrische Untersuchungen. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Verdet, E., Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts; deutsch bearb. v. K. Exner. 1. Bd. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Konkoly, N. v., Praktische Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen, mit bes. Rücksicht auf Astrophysik. Ebendas. 24 Mk.

Kempe, H. R., Handbuch der Elektricitätsmessungen. Aus d. Englischen von J. Baumann. Ebendas. 8 Mk.

Munker, J. G., Die Grundgesetze der Elektrodynamik, synthetisch hergeleitet und experimentell geprüft. Nürnberg, Ebner. 1 Mk.

Wandtafeln zur Erklärung der elektrodynamischen Maschinen; 4 Bl. Folio mit Text. München, Buchholz & Werner. 5 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Zum Fragmentum mathematicum Bobiense.

Von

JOH. LUDW. HEIBERG

in Kopenhagen.

Hierzu Taf. V Fig. 6 u. 7.

I. Bekanntlich enthält Cod. Ambrosianus L. 99 sup., der aus Bobbio stammt, unter dem Text von Isidori Etymologiae aus *saec. VIII* einige Fragmente eines griechischen mathematischen Werkes. Eine Seite davon ist von Mai in Facsimile herausgegeben und durch Wattenbach's Schrifttafeln (Taf. VI) hinlänglich bekannt und auch öfters behandelt. Zwei andere Seiten, deren Inhalt bei Weitem werthvoller ist, hat jetzt Chr. Belger, Hermes XVI S. 261 flgg., in einer aus freier Hand gemachten Nachbildung mitgetheilt nebst einer Lesung, die ziemlich unbefriedigend ist. Dass weit mehr herauszubringen war, haben für S. 114 Z. 8—28 C. Wachsmuth und M. Cantor gezeigt (Hermes XVI S. 637 flgg.). Hier soll für den ersten Theil von S. 113 eine Restitution versucht werden, die keineswegs zweifelhaft oder schwierig ist, wenn man erst den Sinn der Beweise erkannt hat.

Das Stück S. 113 Z. 5—19 geht darauf hinaus, zu beweisen, dass

$$\angle \Theta EZ = \angle \varDelta EB \text{ (Fig. 7).}$$

Dazu benutzt der Verfasser den soeben bewiesenen Satz, dass unter gewissen Bedingungen $BE = B\varDelta$. Der Schluss dieses Beweises ist S. 113 Z. 1—4 enthalten.

Man sieht nun leicht, dass die Bedingung diese ist, dass der Parameter der Parabel das Vierfache von AB sei (Z. 10). Also hat der Hilfssatz ungefähr so gelautet:

Wenn zu einer Parabel eine Tangente gezogen wird, und vom Scheitelpunkt auf dem Durchmesser der vierte Theil des Parameters abgesetzt wird, so wird die vom Endpunkte dieser Linie zum Berührungspunkte gezogene Linie dem zur Tangente verlängerten Durchmesser, von jenem Endpunkte an gerechnet, gleich sein.

Der verlorene Theil des Beweises mag dieser gewesen sein — ich benutze die Figur Belger's (Fig. 6), obgleich sie sehr ungenau ist (wohl schon in der Handschrift), nur habe ich den Buchstaben Z hinzugefügt; auch vom Γ sind bei Belger nur schwache Spuren zu erkennen —:

Es sei $\varDelta E$ eine Parabel mit dem Durchmesser $\varDelta B$ und dem Parameter $\varDelta \Gamma$, und es sei $AB = \frac{1}{4} A\Gamma$. $\varDelta E$ sei eine Tangente in E. Man errichte $\varDelta Z$ senkrecht auf $\varDelta B$, und ihr parallel ziehe man EH. Man verlängere BA bis $\varDelta$ und ziehe ZB. Dann wird sein $EB = B\varDelta$.

Jetzt folge der Beweis S. 113 Z. 1—5 mit den nothwendigen Ergänzungen und deutscher Uebersetzung.

[Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, AH τῷ ἀπὸ τῆς] EH, τετραπλασίων δὲ ἡ ΓA τῆς AB, τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν BAH, τουτ-| 5 ἐστι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν $BA\varDelta$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς HE τουτέστι| τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς AZ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $BA\varDelta$ τῷ ἀπὸ τῆς | AZ. ὀρθὴ ἄρα ἡ πρὸς 10 τῷ Z γωνία· καί ἐστιν ἴση τῇ $\varDelta Z$ ἡ ZE. ἴση ἄρα καὶ ἡ $\varDelta B$ | τῇ BE.

Denn weil $A\Gamma \times AH = EH^2$ [Apollonius con. I, 11], und $\Gamma A = 4AB$ [hypoth.], ist $4 BA \times AH = HE^2$; aber $4 BA \times AH = 4 BA \times A\varDelta$ [Apollon. con. I, 35], und $HE^2 = 4 AZ^2$ [Euklid VI, 4]. Also ist $BA \times A\varDelta = AZ^2$. Also ist $\angle \varDelta ZB$ recht [Euklid VI, 8 coroll.]. Aber $\varDelta Z = ZE$. Also ist auch $\varDelta B = BE$ [Eukl. I, 4].

Z. 2. EH] Hiermit erst fängt das Fragment bei Belger an. τετραπλασίων] im Cod. ein $\varDelta$ mit überschriebenem π und dem Compendium für -ων. 3. ἄρα] ein etwas verzogenes, aber doch vollständig erkennbares Compendium. 4. τῶν] im Cod. eigentlich τόν, aber diese Eigenthümlichkeit ist schon mehrfach hervorgehoben; ebenso Z. 8. BAH] B ist ganz verschwunden, vom A sind deutliche Reste vorhanden. τουτέστι] im Cod. τουτ' ·/.; ebenso Z. 6. 6. HE] das E fast verschwunden; die Spuren führen eher auf A oder $\varDelta$, was aber falsch ist. 8. ὑπό] der Cod. T, das kleine Zeichen der Abbreviatur ' (vergl. Z. 4) ist vergessen, wie bei ἀπό Z. 9. 9. τῆς] nur τ ist sichtbar; das Compendium für -ης ist am Schluss der Zeile weggefallen. 9. ὀρθὴ ἄρα ἡ πρός] absolut unleserlich. 10. τῷ] nur ω sichtbar. τῇ] η Belger, aber mit Andeutung der Unsicherheit. 11. ἡ] so Belger, ganz klar. ἴση] Hiermit endet Z. 4 im Cod., und Belger hat keine Spuren von Buchstaben im Rest der Zeile angedeutet; doch ist eben Raum genug für das nothwendige Supplement: ἄρα καὶ ἡ $\varDelta B$.

Nun folgt S. 113 Z. 6—19 die Anwendung, die ich in ähnlicher Weise hier wiederhole, da Belger S. 266 an der Entzifferung verzweifelt hat.

Δεδειγμένου δὲ τούτου ἔστω κώνου το|μὴ πάλιν παραβολή, | ἧς διάμετρος μὲν ἡ AB παρ' ἣν | δὲ

Dies bewiesen, sei wiederum eine Parabel gegeben, deren Durchmesser AB (Fig. 7) und deren Parameter

1. δειδειγμένου Cod., aber das erste ι ist durch einen feinen Querstrich getilgt. ἔστω] mit einem bekannten Compendium ϖ geschrieben, wovon nur ω übrig ist. 3. διάμετρος] geschr. mit dem Comp. für δια- und einem μ mit irgend einem

δύνανται ἡ $A\Gamma$, καὶ τῆς | $A\Gamma$ τέταρτον ἔστω ἡ AB, καὶ ἀπὸ τυχόν|τος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς τῇ AB | παράλληλος ἤχθω ἡ EZ,
5 καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EB. δεικτέον, ὅτι ἡ ZE | πρὸς ἴσην γωνίαν ἀνακέκλασται πρὸς τῇ τομῇ. ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη | ἡ ΔEH. διὰ δὲ τὸ προδειχθὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΔB τῇ | BE·
10 ὥστε καὶ αἱ πρὸς τοῖς Δ, E σημείοις γωνίαι ἴσαι· καὶ αἱ ὑπὸ τῶν ΔEA, $HE\Theta$. καὶ | λαμβανέσθωσαν $\Gamma\Delta$ φοροι† · λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ τῶν | BEA, ΘEZ γωνίαι
15 ἴσαι εἰσίν· ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι | αἱ τῇ AB παράλληλοι ἀγόμεναι πρὸς ἴσας γωνίας ἀνακλασθήσον|ται πρὸς τὸ B σημεῖον.

$A\Gamma$, und es sei $AB = \frac{1}{4} A\Gamma$, und von einem willkürlichen Punkte der Parabel sei EZ der Linie AB parallel gezogen; man ziehe endlich EB. Dann ist zu beweisen, dass ZE an der Parabel unter gleichem Winkel zurückgeworfen wird.

Man ziehe die Tangente ΔEH. Dann ist wegen des vorher bewiesenen Satzes $\Delta B = BE$; also auch $\angle E\Delta B = \angle \Delta EB$.* Aber $\angle \Delta EA = \angle HE\Theta$.** Also auch $\angle BEA = \Theta EZ$. Und in ähnlicher Weise werden wir beweisen, dass alle mit AB parallelen Linien unter gleichen Winkeln auf Punkt B zurückgeworfen werden.

(jetzt nicht erkennbaren) Zeichen der Kürzung. 2. τέταρτον] geschr. Δ', mit dem gewöhnlichen Bruchzeichen. 3. σημείου] mit einem seltenen Compendium geschrieben. 4. παράλληλος] das Compendium $\stackrel{0}{=}$ ist kaum mehr sichtbar. ἤχθω] erkennbar nur HX; es stand aber gewiss ηχ^θ. 5. ἐπεζεύχθω] sichtbar nur εκ (ε?); es war aber ursprünglich eine der vorigen ähnliche Kürzung angewandt. 7. τῇ τομῇ] der Cod. hat τὴν τομήν. Man erwartet τὸ B σημεῖον. ἤχθω] geschr. η^χ. 8. ἡ] scheint bei Belger eher N zu sein. δὲ] δή? 10. ὥστε] ω mit einem geraden Strich ist ὥστε, mit einem Häkchen ἔστω. αἱ] übergeschrieben. 11. καί] zu lesen: ἀλλ' ἴσαι καί. αἱ] fehlt im Cod. τῶν] über τόν st. τῶν vgl. oben; ebenso Z. 14. 13. Γ] kann γ mit übergeschriebenem ω, d. h. γωνίαι sein und λαμβανέσθωσαν γωνίαι διάφοροι konnte bedeuten: man nehme die (nach der Subtraction des Gleichen vom Gleichen) übrig bleibenden Winkel. Denn διάφορον heisst: Rest (Hero, Geom. 84, Stereom. II, 36 flgg.); αἱ könnte fehlen. Aber λοιπαί ist dann überflüssig und die Redensart nicht zu belegen. 14. γωνίαι ἴσαι εἰσίν] habe ich supplirt; im Cod. sind hier neun Buchstaben unleserlich. 15. ὁμοίως] schwache Spuren sichtbar. ὅτι] ein Buchstabe unleserlich; es war also mit dem bekannten Compendium geschrieben. 16. πᾶσαι] deutliche, aber in der Copie entstellte Spuren. 18. τὸ] τω Cod. σημεῖον] σημ: — Cod.

Der Verfasser hat also den Fundamentalsatz der Theorie der parabolischen Hohlspiegel aufgestellt und bewiesen, dass die der Axe parallelen Strahlen von dem parabolischen Spiegel unter gleichem Winkel gebrochen und alle auf denselben Punkt zurückgeworfen werden.*** B ist

* Denn wegen der Parallelen ist $\angle HEZ = \angle E\Delta B$. Auf der Figur bei Belger fehlen H und Γ.

** Dies wird auch von den entsprechenden Winkeln beim Kreise vorausgesetzt in der Euklidischen Katoptrik prop. 1

*** Dieser Satz wird von Vitello, Opt. IX, 43 vorgetragen nebst den nöthigen Hilfssätzen über die Parabel (IX, 39—42), aber sein Beweis ist wesentlich verschieden.

also der Brennpunkt der Parabel. Dieser Beweis ist um so merkwürdiger, als sonst kein griechischer Mathematiker, soviel mir bekannt, den Brennpunkt der Parabel erwähnt. Apollonios wenigstens behandelt nur die Brennpunkte der Hyperbel und Ellipse.

II. Im Folgenden (S. 113 Z. 20—36) bemerkt der Verfasser, dass die Untersuchung über die parabolischen Spiegel jetzt abgeschlossen sei und dass er nun zu den circulären übergehe. Er erwähnt, dass Einige den Brennpunkt der circulären Spiegel in das Centrum setzten; diese fehlerhafte Meinung aber habe Apollonios in seinem Buche über Brennspiegel hinlänglich widerlegt. Der Verfasser findet aber seine Darstellung ungenügend und schwerfällig und giebt daher seine eigene. Das Stück ist von Belger S. 279 gedeutet. Ich schlage folgende Ergänzungen und Berichtigungen vor.

Z. 22: *πυρ'* liest Belger *πυρία*; aber diese Abbreviatur ist ohne alle Analogie. Vielleicht darf man in dem Apostroph ein am Schlusse der Zeile wegen Mangels an Raum übergeschriebenes *ι* erblicken und das *α* im Anfang von Z. 23 zu *πυρία* ziehen; dann bleibt in Z. 23 noch Raum genug für *κ*ᵀ, d. h. *κατά*, das eine richtige Wendung giebt, während *ἀνὰ τὸν προδεδειγμένον τρόπον*, was Belger für sicher hält S. 270 und sehr unpassend mit *ἀνὰ λόγον* vergleicht, unerhört ist.

Z. 26 ist *σημείῳ* entbehrlich.

Z. 27 liest Belger: *πηλίκη τε περιφέρεια κατόπτρου*; es muss nach den Spuren des Cod. und dem Sinne gelesen werden: *πηλίκη τε περιφέρεια καὶ ποῦ* („wo der Brennpunkt eines jeden Bogens sei“).

Z. 28 giebt Belger nach einer Lücke: *παλαιοὶ δ' ἔλαβον*. Aber vor *παλαιοί* ist u. A. *μέν* ganz deutlich, und *δ'* kann unmöglich auf diesem Platze stehen. Wenn *παλαιοί* wirklich sicher ist, müssen wir lesen: *οἱ μὲν οὖν παλαιοὶ ὑπέλαβον*. *οἱ* ist nicht sicher; die Spuren führen eher auf *ὁ*; *οὖν* war mit dem bekannten Compendium geschrieben, und statt *Δ* wird gewiss *Υ'* stehen; der Buchstabe ist bei Belger als unsicher bezeichnet. Unter den *παλαιοί* wäre dann z. B. Euklid zu verstehen, in dessen Katoptrik Prop. 31 die bezeichnete Ansicht vorgetragen wird. Dass die uns vorliegende Katoptrik wahrscheinlich unecht ist, ist hier ohne Bedeutung, da sie jedenfalls alte Bestandtheile enthält.

Z. 30 endet mit *μάλα δέον*, was Belger S. 271 wiedergiebt: „während es doch nöthig gewesen wäre“. Aber so ist *μάλα* ganz unpassend. Da im Anfang von Z. 31 mehrere Buchstaben verloren sind, ist ohne Zweifel zu lesen *μάλα δεόν|τως* (vergl. Eutocius in Archimed. III S. 14, 16). Auf die Ausfüllung der Lücke in Z. 31 verzichte ich; aber die übrigen Buchstaben müssen gelesen werden: *πρὸς τοὺς κατοπτρικοὺς ἔδειξεν*. Nach *τρ-* ist für zwei Buchstaben Raum und am Schlusse der Zeile für das kaum entbehrliche *ν ἐφελκυστικόν*. Belger liest: *τὴν πρὸς τοὺς κατόπτρους οὓς ἔδειξε*. Von *τήν* sehe ich keine Spur; was da steht, könnte

eher als ἐν τῷ gelesen werden. Also heisst die Stelle: „dass dies aber unrichtig ist, hat Apollonios sehr schön … in seinem Buche gegen die Katoptriker gezeigt“.

Z. 32 liest Belger: ἃ διασεσάφηκεν, wobei für ἐκπύρωσις das Verbum fehlt. Statt α stand ohne Zweifel ϡ, d. h. ἔσται; „und er hat auch deutlich gemacht in seinem Buche über Brennspiegel, wo der Brennpunkt liegt“. Das Folgende (Z. 34) vermag ich nicht mit Sicherheit zu restituiren.

S. 114 giebt der Verfasser, nachdem er diese Vorbemerkungen geschlossen hat, den versprochenen originalen Beweis.

Zu Z. 3 bemerke ich, dass natürlich ἀντιπαρατιθέντες zu lesen ist („rivalisirend“), nicht mit Belger ἄν τι παρατιθέντες; denn ἄν hat hier nichts zu thun; als Object ist τὰς ἡμετέρας ἀποδείξεις zu verstehen.

Der Beweis selbst Z. 8—28 ist von Wachsmuth-Cantor in einer dem Sinne nach unzweifelhaften Weise wiederhergestellt; im Einzelnen bemerke ich Folgendes.

Z. 8 fehlt nach $A\Gamma$ das Wort ἔστω, das Belger S. 274 richtig hat, aber S. 280 durch Versehen weglässt. Das Compendium der Hds. führt eher auf ὥστε, aber diese Verwechselung ist häufig.

Z. 9 lesen sowohl Belger als Wachsmuth: ἡ ΔEB δίχα τεμνέτω τὴν $A\Gamma$, indem sie die Randglosse διχ τεμν in den Text aufnehmen. Aber diese Glosse muss gelesen werden: δίχα τέμνεται, und gehört nicht in den fortlaufenden Text. Es ist ein Scholium zu der Stelle, und Subject ist $A\Gamma$. Im Text stehen nämlich nach ΔEB einige nicht beachtete Buchstaben, erst H^{χ} d. h: ἤχθω, dann ⊤, d. h. κάθετος, und endlich eine räthselhafte Abbreviatur; Sinn und Sprachgebrauch fordern aber ἐπί. Also ist zu lesen: καὶ ἡ ΔEB ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν $A\Gamma$, was ja dem Sinne nach vollständig befriedigt. — Das Supplement τετμήσθω ist nicht nothwendig, s. mein Index Archimed. III, S. 406 u. δίχα.

Das Compendium für μεταξύ, das Wachsmuth richtig Z. 11 u. s. w. erkannt hat, das aber meines Wissens sonst nicht nachgewiesen ist, findet sich im alten Bodleianus des Euklid dreimal in einigen byzantinischen Scholien fol. 118 flgg.

Z. 12 ist nach ἐπεζεύχθωσαν nicht ἄρ᾽, sondern γάρ zu lesen; so fängt eben die Präparation an. Die Handschrift hat ein ursprünglich missrathenes, dann nachgebessertes Γ und über αί steht αρ. Dieselbe Gestalt des Γ treffen wir wieder in Z. 13, wo es übersehen wurde.* Es steht deutlich da: ὑπόκειται γάρ, das parenthetisch zu fassen ist.

Z. 16 hat Wachsmuth mit Recht ἔγγιον für ἐγγύτερον bei Belger vermuthet. Die Hds. hat εγγειον, einen in mathematischen Hdss. durch-

* Belger S. 282 fasst dieses Γ an beiden Stellen als „das raumfüllende Zeichen“, das in diesem Fragment schon so vielfach hat herhalten müssen.

aus gewöhnlichen Fehler; da *ΓΓ* zuerst in *Π* verschrieben wurde, hat der Schreiber, der überhaupt auf dieser Seite viel nachgebessert hat, *γγ* übergeschrieben.

Z. 17 steht doch ganz deutlich *δείξομεν*, wie Belger hat, nicht *ἐδείξαμεν*. Der Verfasser hatte wohl am Schlusse des eigentlichen Beweises das Lemma bewiesen, um den Gang des Hauptbeweises nicht zu unterbrechen; Aehnliches ist bei den späteren Mathematikern häufig. Ueber die Sache s. Cantor S. 640 Anm. 1.

Z. 21 ist die von Wachsmuth beibehaltene Lesung Belger's: *μείζων τῆς ὑπὸ ϑηδ οὖσα πεσεῖται ὡς* ganz falsch. Es ist zu lesen: *μεταξὺ* τῶν E, Θ σημείων πεσεῖται· ἔστω.***

Z. 22 wird *ἐπεὶ δέ* gelesen; die Hds. hat nur *'δέ*, was eher als *ἔστι δέ* zu deuten ist; man vergleiche die missrathene Form des Compendiums ·/. in Z. 20.

Z. 23 flgg. führen Construction und Spuren der Buchstaben auf folgende Lesart: *ἡ μὲν γὰρ ΔH διὰ τοῦ κέντρου οὖσα ὑπόκειται* (?), *αἱ δὲ τοῦ ἡμικυκλίου γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις*. Nur *ὑπόκειται* ist sehr unsicher; die Spuren bieten *ΔΑ*; wenn aber *οὖσα* richtig ist, muss ein solches Verbum darin stecken.

Z. 24 u. 25 hat es der Schreiber doch nicht so arg gemacht, wie Wachsmuth S. 639 meint. Man lese: *ἡ ὑπὸ τῆς HZ εὐθείας καὶ τῆς HΓ περιφερείας γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς HK εὐθείας καὶ τῆς HB περιφερείας*. *εὐθείας* war offenbar *ευ*$^{\Theta}$ geschrieben, wie oft in mathematischen Hdss.; an der ersten Stelle wurde hieraus *EΘ*, an der zweiten *E*$^{\Upsilon}$ (denn das *Υ* ist noch ganz deutlich zu sehen). Das Compendium für *περιφερείας*, das an der zweiten Stelle in der Hds. steht und nur übersehen wurde, ist an der ersten ausgefallen.

Schliesslich bemerke man das sonderbare Compendium Z. 26; der Sinn fordert *ἴσην*, das Compendium ist aber von der gewöhnlichen ganz abweichend.

In dem noch übrigen von Wachsmuth-Cantor nicht behandelten Stück S. 114 Z. 28—36 (Belger S. 281) ist zunächst das ungeheuerliche *περιενελθέν* Z. 29 (jedoch kein Druckfehler, s. S. 278) durch *περιενεχθέν* zu ersetzen, das in dieser Verbindung stehend ist (s. Index Archim. III S. 450 u. *περιφέρομαι*, u. s. w.); der obere rechte Arm des *χ* scheint in der Hds. nicht erkennbar zu sein. Am Schlusse der Zeile steht *α* und dann ist noch für zwei bis drei Buchstaben Raum; zu lesen ist *ἀπο*, das zum folgenden *κατασταθῇ* gehört; *ἀποκατασταθῇ* ist ebenso in dieser Verbindung stehend; s. Index Archimed. III S. 393 u. *ἀποκαθίστημι*.

---

* Mit dem obenerwähnten Compendium geschrieben.

** Die Hds. hat eher *ὥστε*, s. oben.

Z. 30 steht ganz deutlich ⅹ, d. h. ἔσται (nicht ἄρα, Belger S. 278, wobei keine Construction möglich ist; wie sollte man den Conjunctiv κατασταθῇ erklären?). Vielleicht ist πρὸς ἣν αἱ πρὸς τάς zu lesen, da nach dem zweiten πρὸς noch etwas Raum da ist.

Z. 31 ist mit Wachsmuth S. 638 zu lesen: $B\Delta$ μεταξὺ τῶν E, Θ.

Z. 32 ist nach κατασκευασθέντος noch Raum für das unentbehrliche οὖν.

Z. 34 liest Belger κύκλου ὡς, was gar keinen Sinn hat; die Hds. giebt ὅ ῳ, d. h. οὕτως ὥστε.

Das von Wattenbach herausgegebene Fragment bietet trotz der scheinbar besseren Ueberlieferung für das Verständniss grosse Schwierigkeiten; da diese zum Theil auf Lücken in der Hds. zu beruhen scheinen, und da nach Belger's Versicherung Mai's Facsimile genau ist, werden sie wohl nie mit vollständiger Sicherheit gelöst werden. Nur an einer Stelle wage ich einen Vorschlag.

Z. 11 hat die Hds. ЄΥΧЄΡЄСΤЄΡΑΓ, das Wattenbach und Diels Hermes XII S. 421 flgg. als εὐχερέστερον ἄγεται auflösen, wobei in Z. 10 eine Aenderung nöthig wird (Diels schreibt: πρῶτον μὲν βάρος παντὸς σχήματος αἱρομένου, wobei der Artikel vor βάρος vermisst wird, und die Emendation ist doch auch sehr gewaltsam). Γ ist hier, wie sonst überall, γίνεται*. Ich lese daher: πρῶτον μὲν γὰρ** παντὸς στερεοῦ σχήματος αἱρομένου πρός τι μετέωρον εὐχερεστέρα γίνεται διὰ τῆς μηχανικῆς ἡ ὁλκή. Weil der Schreiber die substantivische Anwendung von μηχανική verkannte, wurde ἡ ὁλκή in Casus dazu assimilirt, was ja zu den gewöhnlichsten Schreibfehlern gehört.

III. Das Bruchstück ist ohne Verfassersnamen überliefert; wir sind also in diesem Punkte auf Hypothesen angewiesen. Hier ist vor allen Dingen ins Auge zu fassen, dass auch das ältere Fragment demselben Werke angehörte; es kann also nicht von Brennspiegeln allein gehandelt haben, da in jenem Fragment vom Schwerpunkte die Rede ist. Wenn Belger, der vom Verfasser etwas geringschätzig spricht, sein Werk als ein „physikalisches Compendium" bezeichnet (S. 283), ist dies insofern irreleitend, als wir es hier nicht mit einem stümperhaften Compilator zu thun haben, sondern vielmehr mit einem tüchtigen Mechaniker und Mathematiker, der selbstständig seine Wissenschaft gefördert hat. Denn es ist kaum zu bezweifeln, dass die Bestimmung des Brennpunktes der Parabel sein Eigenthum ist; darauf führen sowohl der Ton der Darstellung, als die Form des Beweises mit der ausführlichen Angabe der Hilfs-

* Ich wundere mich, dass auch der gründliche Paläograph Ch. Graux, wie es scheint, dies verkannte; er schlägt vor (Revue critique 1876, II S. 275): πᾶν στερεὸν σχῆμα αἱρόμενον.

** Das Compendium mag eigentlich γοῦν bedeutet haben (Wattenbach); unser Schreiber verwendet es jedenfalls für γάρ (Z. 15, 23, 26).

sätze; auch über die circulären Brennspiegel hat er ja Neues geleistet, und im älteren Fragment hat er den Beweis des Archimedischen Satzes von den statischen Momenten übergangen, weil er von den Früheren gegeben sei. Für einen Byzantiner aber muss ich, wie Belger, schon wegen der Färbung der Sprache den Verfasser halten.* Schon nach dem hier Gesagten ist die Vermuthung als nicht unwahrscheinlich zu bezeichnen, dass wir hier ein Fragment des Anthemius vor uns haben. Dieser Mechaniker (VI. Jahrh.), dessen Talente (die er unter Anderem bei der Erbauung der Sophiakirche glänzend bezeugte) sehr gerühmt werden, hat ein Buch *περὶ παραδόξων μηχανημάτων* geschrieben, wovon bekanntlich ein Fragment erhalten ist, das eben von allerlei Brennspiegeln handelt. Hierin konnten beide Fragmente sehr wohl Platz finden, das ältere z. B. als Einleitung zur Darstellung des Archimedischen Paradoxon: *δός μοι ποῦ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω* oder, der epigrammatischen Form entkleidet: *τὸ δοθὲν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει κινεῖν* (Quaest. Archim. S. 8, 32). Die genaue Uebereinstimmung der Terminologie des neuen Fragments mit Anthemius hat Belger constatirt. Und diese Hypothese lässt sich durch eine andere Betrachtung stützen.

Im dritten und letzten Abschnitte des uns überlieferten Anthemius-Fragments geht der Verfasser (S. 157, Westermann) dazu über, von den gewöhnlichen, d. h. konischen, Brennspiegeln zu reden; da die Alten diese zwar erwähnt und als konisch erkannt hätten, nicht aber genügend untersucht, gebe er hier ihre geometrische Theorie und die Construction der Einfallsflächen (*ἐμβολεῖς*). Ich setze die Stelle vollständig hierher mit Uebersetzung.

*ἐπειδὴ δὲ καὶ τῶν συνήθων πυρίων ἐμνημόνευσαν οἱ παλαιοί, πῶς δεῖ τὰς τῶν ἐμβολέων ποιεῖσθαι καταγραφάς, ὀργανικώτερον μόνον, οὐδεμίαν ἀπόδειξιν γεωμετρικὴν εἰς τοῦτο ἐκθέμενοι πάντες δὲ** φήσαντες εἶναι*

Da aber die Alten auch die gewöhnlichen Brennspiegel erwähnt haben, wie man die Einfallsflächen construiren solle, nur rein mechanisch, ohne geometrische Beweise hierfür vorzubringen, alle aber solche

* Gelegentlich bemerke ich, dass das Buch des Diokles über Brennspiegel, das sich im Cod. Scorial 955 arabisch befinden soll (Wachsmuth S. 640), gewiss nur die von Eutokios aus diesem Buche bewahrten Bruchstücke ist. In derselben Hds. soll auch „Sumides de lineis spiralibus" stehen, d. h. die Fragmente von Nikomedes, *περὶ κογχοειδῶν* bei Eutokios; s. Wenrich, De version. Arab. S. 197. Schon Casiri, Bibl. Arab. I S. 382, dachte an Excerpte aus diesen Schriftstellern; er irrt nur darin, dass er einen von dem Araber gemachten Auszug annimmt; sämmtliche in der Hds. genannten Auctoren lassen sich mit den von Eutokios excerpirten identificiren.

** *πάντες δέ* habe ich nach Cod. Thott. 215 fol. der hiesigen königl. Bibliothek geschrieben, dessen Original gewiss in irgend einer italienischen Bibliothek zu finden ist. Die Hdss. Dupuy's haben *μηδέ*, was weder sprachlich richtig ist (es müsste *οὐδέ* heissen), noch einen Sinn giebt (NB. das folgende *μέντοι*).

τὰς τοιαύτας κωνικὰς τομάς, οὐ μέντοι γε ποίας καὶ πῶς γινομένας, διὸ πειρασόμεθα ἡμεῖς καί τινας ἐκθέσθαι τῶν τοιούτων ἐμβολέων καταγραφὰς καὶ ταύτας οὐκ ἀναποδείκτους, ἀλλὰ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐφόδων πιστουμένας.	als Kegelschnitte bezeichnend, ohne aber anzugeben, welche, und wie sie entstehen, so werden wir hier versuchen, die Constructionen einiger solcher Einfallsflächen zu geben, und zwar nicht ohne Beweis, sondern durch die geometrischen Methoden begründet.

Wenn Anthemius, wie doch wohl anzunehmen, darin Recht hat, dass die konischen Brennspiegel vor ihm nicht rationell auf geometrische Weise behandelt worden seien, so ist also unser Fragment jedenfalls nicht älter als Anthemius. Im Folgenden giebt er einige allgemeine Bemerkungen über den Brennpunkt der mit der Axe des konischen Spiegels parallel einfallenden Strahlen; aber der Beweis ist in der Mitte abgebrochen. Hierauf hat er nach seinen eigenen Worten die Construction einiger konischen Einfallsflächen gegeben, und dazu stimmt unser Fragment ganz vortrefflich. Ich glaube also, dass die Vermuthung nicht zu kühn ist, dass wir im neuen Fragment den Schluss der von Anthemius S. 157 u. 158 angefangenen Untersuchung über konische Brennspiegel haben. Daran reiht sich dann natürlich die Behandlung der circulären.

Dass Anthemius im Stande war, solche Bereicherungen seiner Wissenschaft zuzuführen, ersehen wir aus den Resten seines Buches, die sehr schöne Resultate enthalten.* Er gehörte dem Kreise von Mathematikern, der sich um den Hauptbaumeister der Sophiakirche, Isidorus von Milet, sammelte, und dem wir manche gute Arbeit verdanken (Eutokios, das sogenannte XV. Buch der Elemente). Die mechanischen Probleme des grossartigen Bauwerkes lenkten die Aufmerksamkeit der Baumeister auf die Schriften der grossen Alten; Isidorus gab eine Ausgabe von Archimedes und commentirte Heron's *καμαρικά*, und sein Schüler Eutokios gab die vier ersten Bücher von Apollonios' *κωνικά* mit Noten heraus. Allem Anschein nach verdanken wir diesen Männern, die überhaupt die Ueberreste der mathematischen Literatur eifrig sammelten, dass wir noch jetzt wenigstens einen guten Theil von Archimedes und Apollonios lesen.

---

* Apollonios untersuchte die symmetrischen Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel; solche konnte er ja aber bei der Parabel nicht finden. Der Brennpunkt der Parabel konnte erst gefunden werden, als man auch die halbe Ellipse darauf hin untersuchte, d. h. bei der Entwickelung der Theorie der konischen Brennspiegel. Diese Bemerkung verdanke ich einer Mittheilung Cantor's; der im Folgenden ausgesprochene Gedanke rührt von L. Oppermann her.

Ueber den Vorschlag des Marino Ghetaldi, die Grösse der Erde zu bestimmen.

Von
EUGEN GELCICH,
k. k. Director in Lussinpiccolo.*

Hierzu Taf. V Fig. 8—10.

Das IV. Buch des Werkes „De resolutione et compositione mathematica" des Marino Ghetaldi (1630) enthält am Ende einen Vorschlag, wie man den Durchmesser der Erde bestimmen könnte. Indem wir gleich zu Anfang unserer kurzen Abhandlung sofort bemerken, dass die gegebenen Lösungen keiner Richtigkeit fähig sind, wollen wir diese Aufgabe ihres historischen Werthes wegen unseren Lesern bekannt machen.

Ghetaldi stellt zuerst auf S. 262 obgenannten Werkes einige Betrachtungen an über die verschiedenen Dimensionen, welche seit Aristoteles unserem Planeten zugeschrieben worden sind. „*Magna est inter grauissimos* (so der Wortlaut seiner Einleitung) *omnium aetatum viros de circuitu terrae discrepantia. Aristoteles in secundo libro de caelo asserit ex Mathematicorum illius temporis authoritate terrae circuitum esse stadiorum* 400000 *hoc est milliariorum* 50000. *Archimedes vero in libro de arenae numero videtur assensisse ijs, qui opinabantur ipsum circuitum esse stadiorum* 300000, *sive milliariorum* 37500. *At Hypparcus referente Plinio lib.* 2 *cap.* 108 *tribuit circuitui terrae stadia* 277000, *quae sint milliaria* 34625. *Erathostenes vero stadia* 252000, *vel mil.* 31500. *Dionysiodorus autem nobilis Geometra scribens ex centro terrae ad superos, ut Plinius refert eodem libro cap. ultimo affirmat se à sepulchro ad infimam terram pervenisse, esseque id spatium, hoc est semidiametrum terrae stad.* 42000, *hoc est milliar.* 5250, *ex quo secundum Archimedis computationem fit circuitus eius mil.* 33000. *At Ptolemaeus, quem recentiores sequuntur affirmat circuitum terrae continere*

* Kurze Zeit nachdem ich in dieser Zeitschrift meine Studie über das Werk des Dalmatiners Marino Ghetaldi, „De Comp. et Resol mathem." (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 1882, IV S. 193) veröffentlicht hatte, erhielt ich von verschiedenen Seiten Anfragen, wie der Vorschlag des Ghetaldi wegen Bestimmung der Grösse der Erde gelautet habe. Ich schliesse daraus, dass sich weitere Kreise, beziehungsweise alle Freunde der Geschichte der Mathematik für diesen Gegenstand interessiren werden, aus welchem Grunde ich die nachfolgende Abhandlung verfasst habe.

stadia 180000, *sive mil:* 22500. *Alphraganus, ac Tebitius tribuunt circuitui terrae stadia* 563200 *sive mil:* 20400.

Haec tanta opinionum diuersitas me impulit ut cogitarem quomodo circuitus terrae inueniri possit, & quidem duos inueni modos, quibus id assequi poterimus, eosque Geometrica ratione demonstrabo, quorum alter ita se habet."

Auf die Idee, einen Vorschlag zur Bestimmung der Erdgrösse zu machen, wurde Ghetaldi gelegentlich der Lösung des folgenden geometrischen Problems gebracht.

Es ist gegeben: die Basis eines Dreiecks und der Unterschied zwischen den beiden anderen Seiten und der Höhe; man soll das Dreieck bestimmen. Bei der Lösung des Problems sind zwei Fälle berücksichtigt, welche beide zur Bestimmung der Erdgrösse durch verschiedenes Vorgehen benutzt werden, nämlich: die Höhe fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks.

Die Art und Weise, den praktischen Theil der Bestimmung, beziehungsweise die Art, wie man die zur Rechnung nöthige Beobachtung ausführen soll, geben wir nach dem Wortlaut des Textes wieder.

„*Sumantur in crepidine lacus, silentibus ventis, duo loco distantia inter se spatio minimum trium milliariorum, in quorum altero erigatur ad perpendiculum supra aquam lamina habens foramen in latitudinem ductum, à tergo autem laminae iuxta ipsum foramen ponatur lumen, & sit interuallum inter sumitatem foraminis, et superficiem aquae, utpote unius pedis; in altero autem loco sit mensor attollens sese, vel deprimens donec visu perveniat ad lumen per lineam tangentem superficiem aquae, ita ut si oculus, vel modicum deprimeretur, lumen illud ob rotunditatem aquae, quae tunc inter oculum & lumen interponeretur videri non posset; superficies enim aquae consistentis, atque manentis sphaerica est, cuius spherae centrum idem est quod centrum terrae, ut demonstravit Archimedes, et notetur diligenter intervallum, quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquae, quemadmodum notatum est intervallum inter sumitatem foraminis laminae, & superficiem aquae; datis enim his duobus interuallis, & distantia duorũ locorũ in crepidine lacus sumptorum; dabitur diameter terrae, ut postea demonstrabimus, et consequenter per calculum Archimedaeum, dabitur & circuitus eius. Dixi huiusmodi operationem debere fieri in aliquo lacu, non autem in mari; nam propter fluxum & refluxum maris fallax evaderet operatio, cum ad hoc negotium requiratur aqua consistens, & manens, quapropter fieri haec debere dixi silentibus etiam ventis, ne superficies aquae turbaretur; Quin etiam magis opportunus esset rivus, vel canalis in aliqua planitie in directum extensus qualis in Germania inferiori, & praecipue in Battauia viti, cum in ijs tranquilla omnino, & immobilis maneat aqua. Alter autem modus inveniendi circuitum terrae, et quidem facilior atque exactior priore ita se habet.*

Eligantur duo montes, ex quibus maris prospectus pateat, ita ut ab aliquo loco altiori montis per apicem montis depressioris visus noster extendi possit

usque ad circulum orizontalem, marisque contractum; deinde exquiratur depressionis montis altitudo, nempe perpendiculum ab eius vertice usque ad superficiem maris. Similiter exquiratur altitudo loci, à quo per apicem montis ad orizontem visus extenditur, hoc est perpendiculum ab eo loco usque ad maris superficiem; denique inveniatur distantia, quae est inter dictum locum, & dictum apicem montis: quibus diligenter peractis, dabitur diameter terrae, ut perspicuum fiet, atque adeo & circuitus. Unico igitur Problemate duos Casus habente omnia quae dixi prestabo."

Nach dieser Einleitung beweist der Autor einige mathematische Sätze, welche zur Lösung der Aufgabe nöthig sind, die jedoch hier anzuführen überflüssig erscheint. So können wir also gleich zur Bestimmung des fraglichen Halbmessers gehen und stellen die Aufgabe genau so auf, als wie es Ghetaldi that:

„*Distantia duorum locorum, quae in crepidine lacus sumpsimus, idest recta linea tangens superficiem aquae interiecta inter oculum mensoris, & foramen laminae. intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terrae, altitudinem vero semidiametrum terrae. nam ipsa altitudo sinu perpendicularis e vertice trianguli ducta ad basim secat ipsam basim in puncto contactus, in quo scilicet basis trianguli. tangit superficiem aquae, quam sphaericam esse demonstratum est interuallum vero, quod est inter sumitatem foraminis laminae, & superficiem aquae intelligatur excessus quo crus unum trianguli superat eius altitudinem, interuallum autem quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquae intelligatur excessus, quo crus alterum trianguli superat eius altitudinem. atque ex data base, et illis excessibus dabitur triangulum. quare & eius altitudo hoc est semidiameter terrae.*"

Dieser ist also der erste Fall, und die Auflösung geschieht nach Ghetaldi, wie folgt:

Sind E und F die Augpunkte, H der Mittelpunkt der Erde, so ist gegeben (Fig. 8): $EJ = d$, $FS = LJ = g$, $EF = b$. Um das Dreieck zu bestimmen, genügt, EM zu kennen. Setze man $EM = x$; man hat:

$$EO = \tfrac{1}{2}(b + x), \quad EL : EM = EF : EN,$$

$$EN = \frac{xb}{d-g}, \quad EP = EN - PN = \frac{bx}{d-g} - g,$$

$$EO^2 = JE.EP, \quad d\left(\frac{bx}{d-g} - g\right) = \tfrac{1}{4}(b+x)^2,$$

$$EO^2 = d\left(\frac{bx}{d-g} - g\right) = \tfrac{1}{4}(b+x)^2, \quad \frac{4bdx}{d-g} - 2bx - x^2 = b^2 + 4dg.$$

Setzt man $\frac{bd}{d-g} = a$, so ist:

$$4ax - 2bx - x^2 = b^2 + 4dx.$$

woraus x leicht bestimmt werden kann.

Eine zweite Art, x zu bestimmen, giebt **Ghetaldi** wie folgt an: Es sei (Fig. 9) $EJ = d$, $EF = b$, $EM = x$, $KF = g$, daher $EL = d - g$, $MF = b - x$. Es ist:

$$LE : EM = EF : EN,$$

$$EN = \frac{xb}{d-g}, \quad JN = EN - EJ = \frac{xb}{d-g} - d.$$

Weil $FZ = NJ$, hat man auch:

$$JF = \frac{xb}{d-g} - d.$$

Es ist noch:

$$g\left(\frac{bx}{d-g} - d\right) = \tfrac{1}{4}(b-x)^2$$

oder

$$\frac{gbx}{d-g} - gd = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}bx,$$

aus welcher Gleichung x ohne Weiteres bestimmt werden kann.

Der zweite Fall ist wie folgt gestellt:

„*Distantia inter locum in altiori monte sumptum, & summitatem montis depressionis, per quam ab ipso loco visus mensoris extenditur ad circulum orizontalem. idest linea recta tangens superficiem maris interjecta inter locum in altiori monte sumptum, et summitatem montis depressionis, intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terrae, cuius altitudo est semidiameter terrae. nam ipsa altitudo hoc est perpendicularis e vertice trianguli ducta occurrit basi productae extra triangulum in puncto contractus, in quo scilicet basis producta tangit superficiem maris; altitudo vero loci, quod in altiori monte sumpsimus, hoc est perpendiculum ab eo loco usque ad superficiem maris, intelligatur excessus, quo crus maius trianguli superat eius altitudinem, altitudo autem montis depressionis nempe perpendiculum ab eius apice, usque ad superficiem maris intelligatur excessus, quo crus minus trianguli superat eius altitudinem, & sic ex data base, & huiusmodi excessibus dabitur triangulum; quare & eius altitudo, hoc est semidiameter terrae.*"

Auflösung. Sind E und F die Augpunkte, so kennt man: $EJ = d$, $KF = g$, $EF = b$ und man sucht $EM = x$. Man hat (Fig. 10):

$$EO = \tfrac{1}{2}(b+x), \quad LE : EF = EM : EN,$$

$$EN = \frac{bx}{d-g}, \quad PE = \frac{bx}{d-g} - g, \quad d\left(\frac{bx}{d-g} - g\right) = \tfrac{1}{4}(b+x)^2,$$

welche Gleichung, wie früher aufgelöst, x ergiebt.

Dadurch ist das Dreieck bestimmt und es kann in beiden Fällen OH ermittelt werden.

Die Erklärung des Regenbogens bei Aristoteles.

Von

Fr. Poske.

Hierzu Taf. V Fig. 11.

Aristoteles giebt in den Meteorologica *(lib. III)* eine Auseinandersetzung über den Regenbogen, derén mathematischer Theil von jeher für schwer verständlich und verworren gegolten hat. Die Commentatoren des Werkes haben sich meist damit begnügt, eine Paraphrase des Originaltextes zu liefern; wo ein Weiteres geschah, verwirrte man die ursprüngliche Darstellung noch mehr durch den Versuch, dieselbe mit späteren Anschauungen in Einklang zu setzen. In das grosse optische Sammelwerk des Mittelalters, die Optik des Vitello, ist der Beweis in breiterer Ausführung, aber augenscheinlich unverstanden und mit fehlerhaften Zusätzen versehen übergegangen.* Auch der gelehrte Herausgeber des Werkes in unserem Jahrhundert, J. L. Ideler,** weiss nichts Besseres, als den Commentar des Vicomercato (Venedig 1565) wieder abzudrucken und anhangsweise die Erläuterungen Biancani's (Bologna 1615) und Fleischer's (Wittenberg 1571) hinzuzufügen. Der neueste französische Uebersetzer*** verzichtet sogar darauf, der in Betracht kommenden Stelle eine Figur beizugeben oder das sachliche Verständniss derselben zu vermitteln, da die Angaben des Textes unzureichend seien und in der ganzen Stelle eine grosse Unordnung herrsche.

Es ist daher nicht zu verwundern, dass die Aristotelische Darstellung des Regenbogens bei den Geschichtsschreibern der Physik theils gar keine Beachtung, theils eine sehr entschiedene Verurtheilung gefunden hat.† In der That ist der physikalische Werth der ganzen Auseinandersetzung, wie sich zeigen wird, nicht sehr erheblich; um so höher aber ist das Interesse, das dieselbe für eine Geschichte der wissenschaftlichen Ideen in Anspruch nehmen darf. Von diesem Gesichtspunkte aus soll die Aristotelische Demonstration einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

---

* Vitellonis opticae libri X ed. a F. Risnero, Basileae 1572; vgl. lib. X, 74.

** Aristotelis meteorologicorum libri IV, Lipsiae 1836; vgl. II p. 306.

*** J. Barthélémy Saint-Hilaire, Météorologie d'Aristote, Paris 1863; p. 257.

† Vergl. Montucla, Hist. des math. I, 188; — Priestley, Geschichte der Optik, deutsch von Klügel, I, 4, u. A.

Nachdem Aristoteles die Gestalt und die Farben des Regenbogens besprochen, bezeichnet er als Ursache der Erscheinung die Reflexion, von ihm Brechung, ἀνάκλασις, genannt (Cap. II § 7). Er erinnert daran, dass von sehr kleinen Spiegeln nicht die Formen, sondern nur die Farben der Gegenstände wiedergegeben werden (§ 11). Er vergleicht damit die Wirkung der kleinen Tropfen, aus denen die Wolke besteht, und macht darauf aufmerksam, dass alle vereinigt einen zusammenhängenden Farbeneindruck hervorbringen (IV, § 7). Nach einem Versuche endlich, die Farben des Phänomens zu erklären, folgt die erwähnte geometrische Demonstration (V, § 2—13), durch welche dargethan werden soll, dass der Regenbogen ein Theil eines Kreises, und im besondern Falle, wenn die Sonne im Horizont steht, ein Halbkreis ist. Die Darstellung ist nachstehend in möglichstem Anschlusse an das Original, doch gekürzt und unter Befolgung der uns geläufigen Schreibweise wiedergegeben. Das zur Verdeutlichung Hinzugefügte ist in [ ] gesetzt.

Die Himmelshalbkugel über dem Horizont sei durch den Halbkreis A dargestellt, der Mittelpunkt des Horizonts sei K, die Sonne befinde sich in H. Die von K ausgehenden Strahlen* bilden einen Kegel, dessen Axe die verlängerte HK ist (§ 2). Einer dieser Strahlen sei KM, der zugehörige reflectirte Strahl MH (§ 4). Die Linien HK und MH sind bekannt, daher auch das Verhältniss $MH:MK$ (§ 5).

Sei ferner eine Strecke DF in B so getheilt, dass

$$DB:BF=MH:MK,$$

und eine Strecke BG so gewählt, dass

$$BG:DB=DB:BF \quad (\S\ 6),$$

sei endlich eine Strecke KB dadurch bestimmt, dass

$$FG:KH=BF:KP,$$

so lässt sich zeigen, nachdem PM gezogen ist, dass P „Pol“ des Kreises ist, in welchem die von K ausgehenden Strahlen die Hemisphäre treffen. Zu diesem Zwecke wird bewiesen, dass

$$FG:KH=BF:KP=DB:PM.$$

Angenommen nämlich, nicht PM, sondern etwa $PR\ (\gtrless PM)$ genügten dieser Proportion, so würden HK, KP, PR in demselben Verhältniss stehen wie FG, BF, DB. Nun besteht zwischen den drei letzten Grössen die Beziehung

$$DB:BF=BG:DB \quad [\text{oder } DB:BF=(BF+FG):DB],$$

folglich müsste auch für die drei anderen Grössen die Proportion gelten

$$PH:PR=PR:PK,$$

folglich wäre

---

* Man erinnere sich, dass nach der Ansicht der Alten das Sehen durch Strahlen, die vom Auge ausgehen, zu Stande kommt.

$$\triangle HPR \sim \triangle RPK$$

$$[\text{daher } PR : PK = RH : RK^*];$$

da aber auch

$$[PR : PK =]\ DB : BF = MH : MK,$$

so würde sich ergeben

$$RH : RK = MH : MK,$$

was unmöglich ist (§§ 8—11). Daher muss sich verhalten

$$PM : PK = PH : PM = MH : MK \ (\S\ 12).$$

[Da das Verhältniss $MH : MK$ für alle Strahlen, die von K aus auf die Wolke fallen und nach H reflectirt werden, als gleich angenommen wird, so ist auch $PM : PK$ constant, ferner PK constant, daher PM selbst constant.] Wenn man nun P als Pol wählt und mit dem Abstande PM einen Kreis [eigentlich eine Kreiskegelfläche um PK als Axe] beschreibt, so geht derselbe durch die Spitzen aller der Winkel, welche bei der Reflexion der Strahlen MH an der Wolke gebildet werden. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde für zwei verschiedene Punkte eines Halbkreises dasselbe Verhältniss [$PM : MH$] bestehen, was unmöglich ist (§ 13).

Denkt man nun den Halbkreis A um seinen Durchmesser gedreht, so sind die Linien MH und MK, welche die an der Wolke reflectirten Strahlen bedeuten, in allen Ebenen, die durch denselben Durchmesser gelegt werden können, gleich und bilden in allen den gleichen Winkel KMH; ebenso ist der Winkel zwischen PK und PM in allen diesen Ebenen gleichgross (§ 14). Daher werden die Dreiecke über PH und PK in allen Ebenen den Dreiecken PMH und PMK congruent sein; die von M auf den Durchmesser gefällten Senkrechten werden daher alle die Axe in demselben Punkte O treffen und einander gleich sein. Der Punkt O ist mithin der Mittelpunkt des vorher beschriebenen Kreises, und der über dem Horizont befindliche Theil des letzteren ist ein Halbkreis (§ 15).

Zum Schluss folgt noch eine einfache Demonstration dafür, dass der sichtbare Theil des Kreises um so kleiner ist, je höher die Sonne über dem Horizont steht (§§ 17—19).

Der Plan, welcher der ganzen Beweisführung zu Grunde liegt, wird ersichtlich, wenn man die ähnliche Auseinandersetzung zur Erklärung des Hofes (ἅλως) um Sonne oder Mond in Betracht zieht (Cap. III §§ 8 und 9). Dort werden um die Verbindungslinie zwischen dem Himmelskörper und dem Auge als Axe zwei Kegelflächen construirt, deren Spitzen im Himmelskörper, bez. im Auge liegen, und deren Schnittcurve in die Wolke fällt. Unter der (unbegründeten) Voraussetzung, dass für alle Punkte dieser Curve die Entfernungen von den beiden Endpunkten der Axe constant sind, wird gezeigt, dass die Schnittcurve ein Kreis sein muss. Ebenso handelt es sich in der vorstehenden Demonstration

* Im Original steht statt dessen: „$PR : KR = HP : PR$“ (fälschlich für HR).

lediglich um den geometrischen Beweis dafür, dass alle Punkte einer Kugeloberfläche, welche von einem gegebenen Punkte (*H*) auf derselben gleichen Sehnenabstand haben, auf einer Kreislinie liegen, deren Mittelpunkt in den zu jenem Punkte gehörigen Durchmesser fällt. Statt aber die Punkte *H* und *K* selbst als Pole, d. h. als Spitzen der beiden Kegelflächen zu benutzen, deren Durchschnitt den Kreis ergiebt, wendet Aristoteles eine sehr umständliche Methode an, indem er zwar *H* als einen Pol annimmt, dazu aber einen zweiten, *P*, aufsucht, dessen Abstand von einem beliebigen Punkte der gesuchten Curve nur von der Grösse jenes gegebenen Sehnenabstandes (*MH*) abhängig, also gleichfalls constant ist. Zu diesem Verfahren scheint Ar. durch die Vorstellung veranlasst worden zu sein, als ob jene beiden Kegelflächen ihre Oeffnungen nothwendig einander zukehren müssten; dies ist um so wahrscheinlicher, da in der überlieferten Figur* der Winkel *KPM* ein spitzer ist, während er in Wirklichkeit, nach Massgabe der thatsächlichen Grösse des Winkels *MKP*, etwa 117^0 beträgt. Nachdem der Pol *P* gefunden, ergiebt sich die Kreisgestalt der durch die Reflexionspunkte (*M*) gebildeten Curve ebenso, wie bei der Betrachtung der Halo. Man sieht übrigens sofort,** dass der Pol *P* viel einfacher, als durch die schwerfällige Aristotelische Construction dadurch zu finden ist, dass man an *KM* den Winkel $KMP = KHM$ anträgt.

Wenn der Sinn des geometrischen Theils der Demonstration durch die eben gemachten Bemerkungen als klargestellt gelten darf, so erheben sich in physikalischer Hinsicht scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten. Weder ist die Gleichsetzung der Strecken *KH* und *MK* zulässig, noch ist das Verhältniss $MH:MK$ bekannt, noch ist die Constanz von *MH* begründet; auch hat man daran Anstoss genommen,*** dass die Winkel bei *M* der Forderung des Reflexionsgesetzes, dass Einfalls- und Reflexionswinkel gleich sein müssen, nicht genügen. Die geometrische Construction deckt sich allenfalls mit dem rohesten sinnlichen Eindruck, entspricht aber durchaus nicht der Wirklichkeit. Die Demonstration, als eine Erklärung in unserem Sinne betrachtet, ist in fast allen Theilen so verfehlt, dass es sich kaum der Mühe zu lohnen scheint, von derselben Kenntniss zu nehmen.

Dagegen wirft die Darstellung ein eigenthümliches Licht auf die Art, wie Aristoteles die Mathematik auf physikalische Fragen anzuwenden gesucht hat, und tritt dadurch auch selbst in eine andere Beleuchtung. Die Epoche vor Aristoteles war das Zeitalter der Analogie gewesen; nicht nur die Philosophie jener Zeit trug diesen Charakter,

* Dieselbe ist der oben citirten Optik des Vitello entnommen.
** Wie auch Biancani bemerkt hat, vergl. Ideler, *l. c.* p. 342
*** So Olympiodor, Vicomercato und Ideler selbst, vergl. *l. c.* p. 304.

auch die Mathematik zeigte dieselbe Neigung in ihrer Vorliebe für den Gebrauch der Proportionen, und die Pythagoräisch-Platonische Physik bewegte sich fast ausschliesslich in Analogien, oft der wunderlichsten und ungeheuerlichsten Art. Statt anderer Beispiele sei nur an die Platonischen Proportionen erinnert, wonach sich Feuer zu Luft, wie Luft zu Wasser, und Luft zu Wasser, wie Wasser zu Erde verhielten. Gegenüber diesen halb poetischen Schöpfungen einer spielenden Phantasie suchte nun Aristoteles die Strenge der mathematischen Beweisführung auf die Erklärung der Naturerscheinungen zu übertragen. Aber die Uebertragung blieb eine äusserliche; was er erreichte, war auch nur eine Analogie, freilich eine solche zwischen der zu erklärenden Erscheinung und einer mathematischen Figur. Mit vielem Scharfsinn wusste er eine Combination geometrischer Elemente zu erfinden, welche dem Augenschein entsprach und die hauptsächlichsten in der Erscheinung auftretenden räumlichen Beziehungen enthielt. So war gleichsam die Form von der Substanz des Vorganges abgelöst, wie es nach Aristoteles selbst (Physica II, 2) die mathematische Betrachtung im Unterschied von der physikalischen erfordert. Die Strenge, mit welcher dann aus meist willkürlichen Voraussetzungen die Eigenschaften der Figur abgeleitet wurden, erweckte die Täuschung, als sei dadurch auch die Erscheinung selbst mathematisch bewältigt. Aus diesem Gesichtspunkte sind nicht nur die Demonstrationen der Höfe und des Regenbogens, sondern auch andere sogenannte Beweise, namentlich der vielbesprochene Hebelbeweis zu verstehen (in welchem man noch neuerdings die Grundbegriffe der heutigen Physik wiederzufinden geglaubt hat).

Man begreift nun, dass alle Versuche der Späteren fehlschlagen mussten, die Darstellung des Aristoteles zu „retten“. Auch die Umdeutungen, die von Olympiodor und Anderen vorgenommen wurden, um die oben aufgezählten Schwierigkeiten und Widersprüche zu beseitigen, erscheinen darnach als unnöthig. Die Aristotelische Erklärung des Regenbogens stellt vielmehr so, wie sie überliefert ist, ein ehrwürdiges Monument in der Entwickelungsgeschichte der physikalischen Wissenschaft dar; sie bildet das Verbindungsglied zwischen den willkürlichen Analogien der Naturphilosophen und der streng sachlichen Forschungsmethode des Archimedes, des ersten wirklichen Physikers, den das Alterthum hervorgebracht hat.

Recensionen.

Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte von A. MILINOWSKI, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. Elsass. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1882.

Wenn die Zahl der Bearbeitungen der Curven zweiter Ordnung abermals durch das vorliegende Werk gewachsen ist, so kann dem Leser zunächst versichert werden, dass dasselbe eine eigenartige Schöpfung ist und nicht zu den bekannten Dutzendbüchern gerechnet werden darf. Während andere synthetische Bearbeitungen der Kegelschnitte nur den wissenschaftlichen Standpunkt einnehmen, will dieses Werk zugleich den Schulzwecken dienen und unter Voraussetzung von möglichst geringen Vorkenntnissen namentlich den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten, welche die Kegelschnitte zu berücksichtigen Gelegenheit haben, durch Darbietung eines wohlgeordneten und umfangreichen Lehr- und Uebungsstoffes Dienste leisten.

Das Buch umfasst auf 411 Seiten vier Abschnitte. Der erste geht bis S. 80 und enthält die hierher gehörigen Sätze, welche die Gerade und den Kreis betreffen. Die Darstellung ist hier im Ganzen klar, die Sprache verständlich und manche Partien — ich möchte fast sagen die meisten — sind ebenso interessant wie geistreich behandelt. Insbesondere darf dieses Lob den §§ 7 und 8 ertheilt werden, wo der Verfasser den Cardinalpunkt seiner ganzen Kegelschnittbehandlung, die harmonische Verwandtschaft vorträgt. Unter derselben versteht man bekanntlich diejenige Beziehung unter den Punkten und Geraden einer Ebene, welche durch die folgende Betrachtung vermittelt wird.

Man wähle einen festen Punkt O und eine feste Gerade o als Centrum und Axe der Verwandtschaft. Zwei feste Punkte A und A_1, welche durch Centrum und Axe harmonisch getrennt werden, heissen verwandte Punkte; durchläuft A eine Gerade, so durchläuft A_1 die verwandte Gerade.

Hieraus zieht der Verfasser acht einfache Folgerungen, auf denen sich dann das Weitere aufbaut. Im didaktischen Interesse hätte ich an dieser Stelle die Hinzufügung zweier weiteren Sätze gern gesehen, da dieselben ebenso einfach wie die vorigen sind und im Folgenden mindestens ebenso oft angewandt werden. Sie würden lauten:

Schneiden sich zwei Gerade auf der Mittellinie der Verwandtschaft, so sind die verwandten Geraden einander parallel.

Wenn zwei Gerade durch zwei Punkte der Mittellinie A, B derart gehen, dass $OA \perp OB$, so stehen die verwandten Geraden auf einander senkrecht.

Um dem Leser ein Bild von dem so einfachen wie eleganten Verfahren des Verfassers zu geben, theile ich hier die im § 86 behandelte Aufgabe mit: „Gegeben ein Viereck $ABCD$; die verwandte Figur $\mathfrak{ABCD}$ soll ein Rechteck sein.“

Die Gegenseiten AB und CD schneiden sich in G, BC und AD in F. Ueber GF beschreibe man einen Kreis, nehme auf ihn einen Punkt O als Centrum und die Axe o so an, dass GF von O und o die Mittelsenkrechte (Mittellinie der Verwandtschaft) ist.

Aus meinen Randbemerkungen zum ersten Abschnitt erlaube ich mir hier mitzutheilen, dass § 72 nicht apodiktisch, sondern hypothetisch hätte gefasst werden sollen. Kleinere Druckfehler stehen S. 47 Z. 5 v. o., wo „schneiden“ fehlt; S. 50 Z. 9 v. o., wo „im“ zu tilgen ist; S. 59 werden die Buchstaben K und J consequent vertauscht, was wohl dadurch zu erklären ist, dass die Buchstaben in der Figur nach Niederschrift des Textes an die falsche Stelle geriethen (vergl. Z. 7 v. o. und 13 v. u.). S. 60 Z. 3 v. u. AJ für HJ; S. 61 steht L nicht in Antiqua, ebenso S. 69; S. 63 fehlt in der Figur bei A' der Accent; S. 67 Z. 15 v. u. FMD ungenau für DFM; S. 70 Z. 15 v. u. wird für e wohl 100 stehen müssen; S. 71 erscheint unten ein nicht erklärtes Punktpaar P, $\mathfrak{P}$, während vorhin Q, $\mathfrak{Q}$ benutzt ist; endlich ist S. 76 in § 111 nicht nur in der Figur ein Versehen, welches in der Fussnote corrigirt wird, vorgekommen, sondern es sind AB_1 und BA_1 conjugirte Punktpaare, nicht aber AA_1 und BB_1. In einigen Figuren finden sich Rudimente von Kreisbögen, die nicht hinein gehören. So S. 20, 69. Uebrigens soll die exacte Figurenzeichnung im Allgemeinen gern anerkannt werden.

Im zweiten Abschnitte wenden wir uns nun der Theorie der Kegelschnitte zu. Der Kegelschnitt wird durch harmonische Verwandtschaft aus dem Kreise abgeleitet, und man überzeugt sich zunächst von den Eigenschaften in Bezug auf Brennpunkt und Directrix. Durch ein keineswegs künstliches Verfahren werden dann sofort die Sätze von Pascal und Brianchon gewonnen und damit die Einsicht, dass der Kegelschnitt durch fünf Punkte oder fünf Tangenten vollkommen bestimmt ist. Die eingehende Behandlung der Brennpunktseigenschaften macht es nun zweckmässig, die Kegelschnitte für einen Augenblick zu trennen. So wird S. 119 die Parabel in sehr einfacher Weise behandelt, die mit der Quadratur S. 133 abschliesst; und es mag gern ausgesprochen werden, dass die Darstellung des Verfassers nach Form und Inhalt gleiches Lob verdient. Dasselbe lässt sich auch von der bis S. 189 gehenden Untersuchung der Ellipse und Hyperbel sagen. Der Herr Verfasser bedient

sich mit Geschick der verschiedensten Betrachtungsweisen und geht selbst der längeren Operation mit Rechnungsmethoden nicht aus dem Wege, wo dieselbe durch zu Grunde liegende metrische Beziehungen sich als zweckmässig aufdrängt. Den Schluss bilden bis S. 249 eine Behandlung der Berührungskreise eines Kegelschnittes und eine grössere Zahl wichtiger Constructionsaufgaben dieser Curven.

Rücksichtlich dieses zweiten Abschnittes erlaube ich mir, die nachstehenden Bemerkungen beizufügen. S. 99 in § 176 macht sich das Fehlen des dort verwandten, aber an der gehörigen Stelle § 79 nicht aufgestellten Satzes, den ich oben aufschrieb, fühlbar. Z. 9 v. u. steht 177 statt 176. S. 100 mag zunächst ein leichter Druckfehler Z. 12 v. u. erwähnt werden; dann wäre der Punkt F durch die einfache Bemerkung $DE = MF$ zu erklären und Z. 9 v. o. die Nummer (140) beizufügen, um dem Leser unnütze Nebenarbeit zu sparen. Z. 16 v. u. steht der Ausdrusk „circulare" Involution. Sowohl die Erklärung dieses Namens, als auch den Beweis des an dieser Stelle benutzten Kriteriums des Kreises habe ich im vorliegenden Buche nicht angetroffen, möglicherweise durch eigene Schuld; aber dann bedaure ich um so mehr, und mit mir gewiss mancher Anfänger, das Fehlen eines Sachregisters. Endlich soll es nicht im Mindesten getadelt werden, dass in der Figur die Ellipse benutzt ist; aber das abweichende Resultat für die Hyperbel hätte angegeben werden sollen. Auf S. 111 kommt der Ausdruck Kreisnetz vor; aber den „Nachtrag", auf den dort verwiesen wird, habe ich vergebens gesucht. Ich verweise den Leser auf S. 410. Vielleicht ist Nachtrag durch „Schlussparagraph" zu ersetzen. Noch erwähne ich einen unbedeutenden Druckfehler auf S. 140 Z. 1 v. o.

Im dritten Abschnitte behandelt der Verfasser Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar. Den Anfang bildet das Büschel mit vier reellen Grundpunkten, welches erschöpfend behandelt wird. Sodann wird durch die harmonische Verwandtschaft das Büschel mit zwei und vier imaginären Grundpunkten aus dem Kreisbüschel abgeleitet. Die bei den früheren Abschnitten hervorgehobenen löblichen Eigenschaften des Inhalts und der Darstellung kann man im Allgemeinen auch hier anerkennen. Das Wörtlein „offenbar" freilich ist ja glücklicherweise in den Lehrbüchern derart dem Fluche der Lächerlichkeit verfallen, dass es den besseren Autoren nicht mehr aus dem Dintenfasse fliesst; aber es giebt eine Sorte von Relativsätzen, die nicht minder geeignet scheinen, den Leser in gelinde Verzweiflung zu versetzen. So im § 384, wo die Gerade PQ von allen Kegelschnitten des Büschels in einer Involution getroffen wird, „deren Doppelpunkte P und Q sind". Der Verfasser hat sich, wie seine Darstellung den Wissenden fühlen lässt, sehr wohl der nöthigen Sätze erinnert; aber Gleiches vom Lernenden zu verlangen, ist unbillig. Uebrigens

hätte die hier gegebene Darstellung wohl verdient, mit der S. 348 stehenden — wenn auch nur durch blossen Hinweis — in Verbindung zu treten. Hier sei bemerkt, dass S. 348 Z. 9 v. u. hinter dem Wörtlein „früher" der betreffende Paragraph fehlt. Ich habe darnach gesucht, aber vergeblich. Vielleicht wieder durch eigene Schuld! Oder sollte § 356, wo der betreffende Satz als Theil des allgemeineren, allerdings scharf hervorgehoben, vorkommt, gemeint sein?

S. 250 erscheint im Beweise des Satzes § 360 unpraktisch der Buchstabe K in verschiedener Bedeutung. S. 270 Z. 5 v. o. steht ein unbedeutender Druckfehler. S. 272 hat mir der Beweis des Satzes § 384 an diesem Platze nicht ganz gefallen wollen. Wohl hätte das hier benutzte höchst eigenthümliche Büschel zu Ende von § 404 sogar eine kleine Anmerkung verdient.

Der vierte Abschnitt behandelt die projectivischen Gebilde und den Schluss bildet ein Uebungsmaterial von 96 Sätzen und Aufgaben. Wir heben daraus den Feuerbach'schen Satz, das Normalenproblem und das zweite Kepler'sche Gesetz hervor.

Referent hält das Buch für eine ebenso fleissige wie gediegene Arbeit; er glaubt, dass der Verfasser im Allgemeinen die Absichten, die wir aus seiner Vorrede kennen lernen, erreicht hat. Insbesondere wird der erste und zweite Abschnitt den Anfänger in die synthetische Behandlung der Kegelschnitte mit Nutzen einführen, und der Geübtere gern die ihm mehr oder weniger bereits bekannten Dinge in dieser geistvollen Beleuchtung einer wiederholenden Betrachtung unterziehen.

Coesfeld, den 16. October 1882. K. Schwering.

Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik, von Dr. G. Holzmüller. Leipzig, Teubner. 1882.

Auf Grund zahlreicher eigener Aufsätze, sowie einschlagender Arbeiten Anderer versuchte Herr Holzmüller durch Zusammenfassung und weitere Ausbildung eine Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. — Bekanntlich legt jede Gleichung $Z=f(z)$ I), in der Z und z complexe Variabele sind, also $z=x+yi$, eine derartige Verwandtschaft fest zwischen den beiden Ebenen Z und z als Interpretationsgebieten zusammengehöriger Werthsysteme. Wird ferner Z in seinen reellen und imaginären Theil zerfällt, so genügt jede derselben der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

und hierdurch tritt die erwähnte Theorie mit den Problemen der Wärmeeitung und stationären elektrischen Ströme in Beziehung, indem z. B.

die beiden orthogonalen Curvensysteme $u(x, y) = c$, $v(x, y) = c_1$ als Isothermen resp. Strömungscurven interpretirt werden können. In gleicher Weise verknüpft sich, wegen der Gleichheit der Winkel, die angegebene Theorie mit den Problemen der Cartographie, und schon aus dem Gesagten erhellt die Bedeutung der isogonalen Verwandtschaften und das Hinübergreifen derselben in die erwähnten Gebiete, und scheint Herr Holzmüller zuerst diesen Zusammenhang in ausführlicher Weise hier dargelegt zu haben, um so eine zur Zeit bestehende Lücke in der mathematischen Literatur auszufüllen.

Holzmüller sucht seinem Plane in der Weise gerecht zu werden, dass er zunächst die elementaren Operationen und einfachsten Functionen in der bekannten Weise interpretirt und, ausgehend von der Gleichung $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, die Congruenz, Aehnlichkeit, reciproken Radien und Kreisverwandtschaft zweier Ebenen in fasslicher Weise entwickelt und durch zahlreiche geometrische und physikalische Anwendungen in interessanter Weise verwerthet. Es möge genügen, auf die isogonalen Trajectorien, Doppelspiralen, den Uebergang von der Geraden zum Kreise und die stereometrische Vermittelung zwischen zwei kreisverwandten Ebenen hinzuweisen, da eine detaillirte Angabe zu weit führen würde. Das Bisherige sollte den Grund für die allgemeinere Theorie abgeben, indem Holzmüller im Anschluss an das bekannte Buch des Prof. Durège („Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse") sich nun über die Bedingung, dass $f(x, y)$ eine Function von $z = x + yi$ sei, etc. verbreitet und z. B. die Bedeutung der Norm des ersten Differentialquotienten als Vergrösserungsverhältniss, sowie des Arguments als Winkel, um welchen entsprechende Curvenelemente gegen einander verdreht erscheinen, die Analogie zwischen Symmetrie und Reciprocität gewisser Curvensysteme (§ 43) — dieser Abschnitt zählt zu den wichtigsten der Schrift — etc. klar hervortreten lässt. Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen greift Holzmüller wieder specielle Functionen heraus, immer von einfacheren zu complicirteren übergehend, und entwickelt zunächst die durch $Z = z^2$ definirte isogonale Verwandtschaft, sie giebt die als lemniskatische bezeichnete Geometrie, Kinematik und Reciprocität — jedem Kreise der Z-Ebene entspricht nämlich eine Lemniscate in der z-Ebene etc. — in klarer und anschaulicher Weise. Selbstverständlich führt jede Gleichung I) zu einer gewissen Geometrie in diesem Sinne, und wie früher die Kreisverwandtschaft, hier die lemniskatische Geometrie erhalten wurde, so ergiebt sich im weiteren Verlaufe die cardioidische Geometrie, die der Lemniskaten höherer Ordnung etc., und ist wohl mit Recht eine fruchtbare Verwerthung dieser Parthien z. B. in der Geometrie zu gewärtigen. — Nach den rationalen, ganzen und gebrochenen, Functionen werden jetzt die irrationalen unter-

sucht, sammt den durch sie bestimmten isogonalen Verwandtschaften und zugehörigen Riemann'schen Flächen, und schliessen sich hieran die einfachsten transcendenten, als $lg\,z$, e^z, die trigonometrischen, cyclometrischen und endlich die elliptischen Functionen und ihre Umkehrungen. Dabei werden die Probleme der Cartographie, die Ptolemäische und die Mercator-Projection, sowie ihre Vermittelung mit grosser Deutlichkeit erörtert, ebenso die logarithmischen Spiralen und die mit ihnen im Zusammenhang stehenden Curven, Loxodromen etc. Ganz besondere Erwähnung verdient die klare Entwickelung der Riemann'schen Flächen für die zuletzt erwähnten obigen Functionen, welche wahrscheinlich in dieser Ausführlichkeit und Klarheit das erste Mal in der Literatur behandelt wurden, nebst den sich hieran reihenden zahlreichen Sätzen, von denen ich beispielsweise nur einen hervorhebe, S. 267: „Die *sin am*-Curven sind die stereographischen Projectionen zweier Schaaren sphärischer Kegelschnitte." — Die ausführlichen literarischen Nachweise zu jedem Capitel bieten Fingerzeige zu weiterem Eindringen in die behandelte Materie.

Nach dem bisher Gesagten ergiebt sich, dass in dem Holzmüller'schen Buche die einfacheren, nämlich durch explicite Functionen von z, definirten isogonalen Verwandtschaften in ausführlicher Weise behandelt wurden. Damit ist jedoch noch lange nicht die allgemeinste isogonale Verwandtschaft erledigt, denn die impliciten Functionen werden nur gestreift, ohne Durchführung eines Beispieles, und die durch Differentialgleichungen bestimmten Verwandtschaften und Abbildungen, sowie die betreffenden Aufsätze, z. B. von Fuchs, Schwarz, Klein etc. werden völlig übergangen. Dies scheint absichtlich geschehen zu sein, wenngleich z. B. die Differentialgleichungen täglich immer wichtiger werden, und soll darum dem Autor nicht zum Vorwurfe gemacht werden, zumal ja nur eine Einführung und nicht ein ausführliches Lehrbuch nach dem Titel geplant wurde.

In Bezug auf einige minder wichtige Ungenauigkeiten will ich erwähnen, dass z. B. S. 48 der bekannte Satz hätte sollen erwähnt werden, dass eine Function, die gewissen Grenzbedingungen genügt, sonst endlich, eindeutig und stetig ist, eindeutig bestimmt ist, da ohne diesen kein absolut zwingender Grund für die dort angegebene Temperaturvertheilung vorliegt. Auf S. 77 wird der Kartenmodul mit $\sqrt{f'(x+yi).f'(x-yi)}$ bezeichnet, was im Allgemeinen nur richtig ist, wenn $f(z)$ nur reelle Coefficienten hat, während im Vorhergehenden complexe Coefficienten zugelassen wurden. S. 171 soll es in der Gleichung 8) statt $\sqrt[n]{a+bi_x}$ heissen $\alpha^x\sqrt[n]{a+bi}$, wo α eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist. S. 193 werden in Z. 12 v. o. die Coefficienten der ganzen rationalen Function complex angenommen, infolge dessen wird die ganze Deduction in § 81 etc.

hinfällig, denn sie beruht wesentlich darauf, dass die Coefficienten sämmtlich reell sind, weil nur dann in Gl. 2) S. 202 rechts und links i gleichzeitig das Vorzeichen wechselt. Derselbe Umstand wiederholt sich in § 84 S. 212 etc., wo in $Z=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ sämmtliche Coefficienten reell sein müssen. Die zu S. 234 gehörige Fig. 57 ist ganz unrichtig. S. 247 Z. 8 v. o. soll es eigentlich heissen $x=\pm a\pm m\pi$, da ja nur die Quadrate von $\cos a$ und $\sin a$ auftreten. S. 255 wäre in Z. 1 v. o. besser $\frac{d \operatorname{arctan} Z}{dz}$ statt $\frac{\partial \operatorname{arctan} Z}{\partial z}$.

Da die berührten Ungenauigkeiten von keinem wesentlichen Belange sind, ergiebt sich in Zusammenfassung des früher Gesagten, dass das vorliegende Buch wegen der Uebersichtlichkeit der ganzen Methode, der grossen Fruchtbarkeit in Bezug auf die mannichfaltige Anwendung in verschiedenen Gebieten, zumal dasselbe vieles Neue und manches interessante Resultat enthält, allen Anfängern als Einführung in das Studium der Functionen einer complexen Variabelen warm empfohlen werden kann.

Verzeichniss nicht angegebener Druckfehler.

S. 76 Z. 7 v. o. soll heissen $\frac{\partial\left(\frac{dw}{dz}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial y}$.

S. 79 Z. 5 v. o. soll heissen: „z. B. eine von dem Punkte z durchlaufene Curve in“ etc.

S. 81 Z. 1 v. u. ist in $f(x,y)=0$ das Komma vergessen, ebenso wiederholt auf S. 82, 83, 90 in $u(x,y)$ etc.

S. 108 lies in Z. 7 v. u. Geradenbüschel statt Kreisbüschel.

S. 115 Z. 5 v. u. soll es heissen $\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p}=K$.

S. 143 Z. 1 v. u. lies $\frac{1}{2}\lg\frac{x+yi-(\alpha_1+\beta_1 i)}{x-yi-(\alpha_1-\beta_1 i)}$.

S. 149 Z. 3 v. o. lies $\frac{p\cdot p_1}{q\cdot q_1}=c$.

S. 150 Z. 15 v. o. soll lauten $Z=\frac{1}{2}\left(e^z+\frac{1}{e^z}\right)$.

S. 189 Z. 3 v. u. lies $n<1$ statt $n>1$.

S. 196 Z. 12 v. u soll es statt „unbegrenzte Gerade“ heissen „unbegrenzte Curve“.

S. 198 Z. 7 v. o. lies ζ-Ebene statt z-Ebene.

S. 198 Z. 3 v. u. lies ζ statt ξ.

S. 227 Z. 15—16 lies z-Ebene statt Z-Ebene.

S. 258 flgg. soll statt $\varkappa$ stehen k.

S. 258 Z. 16 v. o. lies $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$ statt $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2\sin^2\varphi)}}$.

S. 259 fehlt die leicht zu findende Bedeutung von Cy, Dy etc.

S. 264 Z. 8 v. u. soll es heissen AE statt AB.
S. 266 ist, wie auf S. 258, z zu lesen statt k, ebenso S. 269, 272.
S. 268 Z. 11 v. u. lies „$Z = cos\,am\,z$ und $Z = \Delta\,am\,z$“.
S. 274 Z. 15 v. o. lies $\frac{K'}{2K}$ statt $\frac{K'}{2K'}$.

Prag, 10. December 1882.

Dr. ANTON PUCHTA,
Prof. a. d. deutschen Universität.

Ueber stationäre elektrische Strömung in einer lemniscatischen Platte. Von Dr. O. HENTSCHEL. Festschrift des Gymnasiums zu Salzwedel. 1882.

Nach kurzer historischer Einleitung wird das Kirchhoff'sche Problem, den stationären Zustand einer Kreisplatte zu finden, wenn zwei Punkte innerhalb derselben entgegengesetzte Elektroden sind, durch eine Potentialbetrachtung gelöst. Ein Specialfall symmetrischer Art wird besonders ins Auge gefasst und mit Hilfe zweier Systeme confocaler Lemniscaten, resp. ihrer orthogonalen Hyperbelbüschel constructiv behandelt. Man hätte auch die elementare Construction benutzen können, die mit der Abbildung $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ zusammenhängt, wobei ein Kreisbüschel mit den Büschelpunkten $\pm a$ auf der reellen Axe abzubilden ist. Daraus erklären sich die einfachen Gleichungen $\frac{p p_1}{q q_1} = c$, $(\varphi + \varphi_1) - (\chi + \chi_1) = \gamma$ für das Strömungsnetz. (Vergl. Math. Annalen, Bd. 18 S. 298 und des Referenten Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig, bei B. G. Teubner, S. 149.) Nach Wissen des Referenten ist das System hier zum ersten Male correct gezeichnet. Der Fall der Aussenplatte ist mit in der Figur enthalten.

Wollte man die verschobene Figur mittels der Abbildung $Z = \sqrt{z}$ in eine lemniscatische überführen, so würden im Allgemeinen innerhalb oder ausserhalb derselben vier Elektroden auftreten. Um auf den Fall zweier Elektroden zu kommen, verwendet der Verfasser in sinnreicher Weise die vom Referenten aufgestellte Spiegelung gegen die Lemniscate. (Vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 21 S. 347, und Einf. in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften S. 120.) Als Brennpunkte der Lemniscate sind die beiden äusseren Elektroden gewählt, die nun bei der Abbildung ins Unendliche fallen. Auch das Aussennetz konnte elektrodynamisch gedeutet werden.

Um auch den Fall zweier äusseren Elektroden zu behandeln, wendet nach analytischer Herleitung der Verfasser zur Construction die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel an. (Vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 21 S. 347, Jahrg. 18 S. 236, u. S. 120 resp. 131 d. obigen Werkes. Auch in Bd. 94 des Crell. Journals S. 179 befindet sich eine Notiz.)

Durch Reciprocität geht man leicht vom speciellen Kirchhoff'schen Problem zu dem allgemeinen mit beliebiger Lage der Elektroden über. Auch dieser Fall wird gezeichnet und durch lemniscatische Spiegelung transformirt.

Endlich kommen noch die Specialfälle zur Sprache, bei denen die Elektroden beide auf der Peripherie des Kreises liegen oder wo eine auf der Peripherie, die andere im Innern oder Aeussern liegt. Auch diese Fälle werden nach entsprechenden Methoden in die lemniscatischen übertragen.

Das Schriftchen ist besonders geeignet, die Vortheile, welche die „isothermische Spiegelung" namentlich in constructiver Hinsicht zur Lösung gewisser Probleme gewährt, ins Licht zu setzen.

Dr. G. Holzmüller.

Perioden der Decimalbrüche. Von A. Böhme, Seminarlehrer a. D. Berlin 1882, Verlag von G. W. F. Müller. 48 S.

Der Verfasser, ein verdienter Schulmann, dessen Anleitung zum Unterricht im Rechnen bei Elementarlehrern in wohlerworbenem Ansehen stehen soll, reicht in diesem anspruchslosen Büchelchen seinen bisherigen Collegen und Colleginnen eine Abschiedsgabe beim Austritte aus der Thätigkeit an dem mit der Augustaschule in Berlin verbundenen Lehrerinnenseminar. Es ist eine Zusammenstellung mancher Eigenschaften periodischer Decimalbrüche, exemplificirt an den Perioden von $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$. Irgend zahlentheoretische Kenntnisse sind nicht vorausgesetzt.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. Mai bis 15. Juni 1883.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch., math.-physikal. Classe. 1882. 1 Mk.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. 14. Bd., 2. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1883, 1. Heft. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 45. Bd. Wien, Gerold. 44 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Cl., II. Abth. 86. Bd. 4. u. 5. Heft. Ebendas. 4 Mk. 90 Pf.

Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. 7. série, tome XXXI, Nr. 1 et 2. Leipzig, Voss. 2 Mk.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 22. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1884, herausgegeben vom hydrographischen Amt d. kaiserl. Admiralität. Berlin, Mittler. 1 Mk. 50 Pf.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam. Nr. 11, 3. Bds. 3. St. (Spektroskop. Beob. v. Vogel u. Müller). Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Berliner astronomisches Jahrbuch f. d. Jahr 1885, herausgeg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Reine Mathematik.

Ungar, M., Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber die doppeltperiodischen Functionen. (2. Art.) (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Mildner, R., Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen. (Ak.) Ebendas. 80 Pf.

Migotti, A., Zur Kreistheilungsgleichung. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Cantor, G., Grundzüge einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

RUPP, O., Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

ADLER, A., Ueber Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Art. Drei Abhandl. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 15 Pf.

KANTOR, S., Bemerkungen zu Herrn Durège's Abhandlung „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten". (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

HEGER, R., Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 3. Thl. Stereometrie, 4. Thl. Analyt. Geometrie d. Ebene. Breslau, Trewendt. 2 Mk. 80 Pf.

DORNHEIM, Leitfaden d. anal. Geom. f. d. 1. Cl. d. Realgymn. Minden, Bruns. 60 Pf.

MENGER, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Wien, Hölder. 2 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

IDELER, L., Handbuch der Chronologie. 2. Aufl. 6. Lief. (Schluss). Breslau, Köbner. 5 Mk.

LANG, V. v., Die Capillarwage. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

SCHREIBER, P., Handbuch der barometrischen Höhenmessungen. 2. Ausg. Weimar, Voigt. 4 Mk. 50 Pf.

SCHELL, A., Die Methode der Tachymetrie bei Anwendung des Ocular-Filiar-Schraubenmikrometers. Wien, Seidel. 1 Mk. 60 Pf.

Nivellements d. trigonom. Abthlg. d. kgl. preuss. Landesaufnahme. 5. Bd. Berlin, Mittler. 10 Mk.

WERNICKE, A., Grundzüge der Elementar-Mechanik. Braunschweig, Schwetschke. 4 Mk.

HERZ, N., Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

HOLETSCHEK, J., Bahnbestimmung des 4. Kometen d. J. 1874. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

KREUTZ, H., Ueber die Bahn des Kometen von 1771. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

OPPOLZER, TH. v., Ermittelung der Störungswerthe in den Coordinaten durch Variation entsprechend gewählter Constanten. (Akad.) Ebendas. 2 Mk.

——, Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen bei dem Kometenprobleme. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

STRUVE, L., Resultate aus den in Pulkova angestellten Vergleichungen von Procyon mit Nachbarsternen. Dorpat, Karow. 2 Mk.

ZECH, P., Elektrisches Formelbuch. Wien, Hartleben. 3 Mk.

FOURIER, M., Théorie analytique de la chaleur. Nouv. éd. Livr. 2—5 (fin). Breslau, Köbner. 32 Mk.

Physik und Meteorologie.

HELMHOLTZ, H., Wissenschaftliche Abhandlungen. 2. Bd. 2. Abth. Leipzig, Barth. 10 Mk.

STRUVE, H., Zur Theorie der Talbot'schen Linien. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 50 Pf.

HOLLEFREUND, K., Die Gesetze der Lichtbewegung in doppeltbrechenden Medien nach der Lommel'schen Reibungstheorie und ihre Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

KAYSER, H., Lehrbuch der Spectralanalyse. Berlin, Springer. 10 Mk.

SCHWARTZE, TH., Telephon, Mikrophon und Radiophon. Wien, Hartleben. 3 Mk.

WILKE, A., Die elektrischen Mass- und Präcisionsinstrumente. Ebendas. 3 Mk.

GRAETZ, L., Die Elektricität und ihre Anwendungen zur Beleuchtung, Kraftübertragung, Telephonie etc. Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

ABENDROTH, Leitfaden der Physik mit Einschluss der Elemente d. Chemie u. mathem. Geographie. 1. Curs. (Untersec.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1882.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.*

A.

Abbildung.

1. Ueber die conforme Abbildung von Flächen. F. Klein. Mathem. Annal. XIX, 159.
2. Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen. A. Voss. Math. Annal. XIX, 1.

Vergl. Oberflächen 304.

Analytische Geometrie der Ebene.

3. Sur le principe de l'homogénéité. Colart. Mathesis II, 287.
4. Die ersten Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten. E. Hain. Grun. Archiv LXVII, 425.
5. Formules nouvelles pour l'étude du mouvement d'une figure plane. Haton de la Goupillière. Compt. rend. LXXXV, 895.
6. Zur Theorie der asymptotischen Punkte. Fr. Schiffner. Grun. Archiv LXVII, 208.
7. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 109.
8. Sur les roulettes. E. Habich. Mathesis II, 145.
9. Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Chr. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 129.
10. Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles. Aoust. Compt. rend. LXXXIV, 385.
11. Des développoïdes directes et inverses de divers ordres. Aoust. Compt. rend. LXXXV, 331.
12. Intégrales des développantes obliques d'une ordre quelconque. Aoust. Compt. rend. LXXXV, 609.
13. Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes. H. Brocard. Mathesis II, 25, 49. — Mansion ibid. 29. — Neuberg ibid. 30.
14. Rectification à une communication précédente sur la détermination, par le principe de correspondance géométrique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. L. Saltel. Compt. rend. LXXXIII, 529. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 152.]
15. Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung. K. Nagel. Mathem. Annal. XIX, 433.
16. Propriétés d'une courbe de poursuite. E. Cesaro. Mathesis II, 8.
17. Sur la tractrice. Cesaro. Mathesis II, 217.
18. Trajectoires orthogonales des courbes $x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0$, λ étant un paramètre variable. H. Brocard. Mathesis II, 162.

---

* Wenn auch die Leser dieser Zeitschrift daran gewöhnt sein dürften, in dem Abhandlungsregister nicht ausschliesslich Abhandlungen des an der Spitze genannten Zeitraumes angegeben zu finden, so glauben wir doch gegenwärtigem Register eine besondere Entschuldigung beifügen zu müssen. Die in den Compt. rend. enthaltenen Abhandlungen konnten wir nämlich seit Bd. XXIII dieser Zeitschrift aus äusseren Hinderungsgründen nicht excerpiren. Gegenwärtig sind jene Hindernisse gehoben, und wir werden die Lücke so rasch als thunlich ausfüllen. D. Redaction.

19. Tangentenconstruction der Astroide. Stammer. Grun. Archiv LXVII, 222. — Stoll ibid. 447.
20. Suite de points appartenant à une même spirale logarithmique. H. Brocard. Mathesis II, 46.
    Vergl. Bipolarcoordinaten. Determinanten in geometrischer Anwendung 59. Ellipse. Geschichte der Mathematik 179, 180. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung 240, 241, 242. Normalen. Parabel. Quadratur. Rectification.

Analytische Geometrie des Raumes.

21. Grundzüge einer Dipolargeometrie. G. Leonhardt. Zeitschr. Math. Phys XXVII, 346.
22. Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Enneper. Mathem. Annal. XIX, 72.
23. Détermination, par la méthode de correspondance analytique du degré de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou d'une surface donnée. L. Saltel. Compt. rend. LXXXIII, 608.
24. Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface dont l'équation renferme n paramètres liés entre eux seulement par $n-2$ relations. L. Saltel. Compt. rend. LXXXIII, 894.
25. Ueber eine Raumcurve mit einem asymptotischen Punkte und deren Tangentenfläche. Fr. Schiffner. Grun. Archiv LXVII, 207.
26. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales de quatrième ordre. Appell. Compt. rend. LXXXIII, 1209.
    Vergl. Abbildung. Determinanten in geometrischer Anwendung 60, 61. Elliptische Transcendenten 102, 103. Krümmung. Infinitesimalgeometrie. Mannichfaltigkeiten. Normalen. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Paraboloid.

Astronomie.

27. Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction. J. Bertrand. Compt. rend. LXXXIV, 671, 731.
28. Occultations, prédiction graphique. Baills. Compt. rend. LXXXV, 1056.
29. Sur l'emploi des méthodes graphiques dans la prédiction des occultations. A. Tissot. Compt. rend. LXXXV, 1223.
30. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. S. C. Haretu. Compt. rend. LXXXV, 504.
31. Sur les déplacements séculaires du plan de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). F. Tisserand. Compt rend. LXXXIII, 1201, 1266.
32. Sur les mouvements des apsides des satellites de Saturne, et sur la détermination de la masse de l'anneau. F. Tisserand. Compt. rend. LXXXV, 695, 1131, 1194.
    Vergl. Geschichte der Mathematik 184. Nautik.

B.

Balistik.

33. Sur une question de balistique. Astier. Compt. rend. LXXXIII, 1033.

Bernoulli'sche Zahlen.

34. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. M. A. Stern. Crelle XCII, 349.
35. Théorie des nombres de Bernoulli et d'Euler. E. Lucas. Compt. rend. LXXXIII 539.

Bestimmte Integrale.

36. Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen. G. Leonhardt. Mathem. Annal. XIX, 578.
37. Das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y.dz}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen. E. Jürgens. Mathem. Annal. XIX, 435.
38. Exposition nouvelle et généralisation de la méthode de Gauss pour calculer approximativement une intégrale définie. A. Pujet. Compt. rend. LXXXIV, 1071.
39. Sur la formule de quadrature de Gauss. O. Callandreau. Compt. rend. LXXXIV, 1225.

40. On certain definite Integrals. J. C. Malet. Crelle XCII, 342.
Vergl. Elliptische Transcendenten. Fourier'sche Reihe. Mannichfaltigkeiten 255. Ultraelliptische Transcendenten.

Bipolarcoordinaten.

41. Exercise de calcul infinitésimal. Ph. Gilbert. Mathesis II, 17.

Brachistochrone.

42. Recherche de la brachistochrone d'un corps pesant, en égard aux résistances passives. Haton de la Goupillière. Compt. rend. LXXXIII, 884. — Phillips ibid. LXXXIV, 72.

C.

Cartographie.

43. Ein elementargeometrischer Satz als Beitrag zur Theorie der stereographischen Projection. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 383.

Combinatorik.

44. Sur les permutations alternées. Dés. André. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 167.
45. Le nombre $C_{m,p}$ ne contient pas le facteur λ, si m est de la forme $a\lambda^k-1$. E. Clevers. Mathesis II, 69.
46. Les nombres combinatoires $C_{m,1}, C_{m,2}, \ldots C_{m,m}$ sont tous impairs si $m=2^k-1$. E. Clevers. Mathesis II, 68.

Convergenzbedingungen.

47. Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. G. Kohn. Grun. Archiv LXVII, 63.

Crystallographie.

48. Ueber die Ableitung des krystallographischen Transformationssymbols. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1881, 152.
49. Ueber die Interpretation der empirischen Octaïd-Symbole auf Rationalität. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1881, 751.
50. Ueber eine Methode, die Brechungscoefficienten einaxiger Krystalle zu bestimmen. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1881, 958.
51. De la mesure des angles dièdres des cristaux microscopiques. Em. Bertrand. Compt. rend. LXXXV, 1175.

Cubatur.

52. Sur quelques corps engendrés par la révolution. G. Dostor. Grun. Archiv LXVII, 254.
53. Volume d'une cône. Petit-Bois. Mathesis II, 233. — Mansion ibid. 236.
54. Trouver une courbe plane AB telle qu'il existe un rapport constant k entre les volumes engendrés par le secteur OAB et par le segment $AabB$ tournant autour de l'axe OX, Aa et Bb étant perpendiculaires à OX. E. Clevers. Mathesis II, 62.
55. Trouver une courbe plane AB telle qu'il existe un rapport constant k entre le volume engendré par le secteur OAB tournant autour de OX et la sphère de diamètre Ob; O étant l'origine des coordonnées, Bb une perpendiculaire à l'axe OX. E. Clevers. Mathesis II, 63.
56. Volume d'une surface du 4. ordre et d'un ellipsoïde indépendant de certains éléments anguleux qui entrent dans la génération de ces surfaces. J. Neuberg. Mathesis II, 38. — Verstraeten ibid. 79.
Vergl. Maxima und Minima 262, 263.

D.

Determinanten.

57. Ueber eine Eigenschaft der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante. Hazzidakis. Crelle XCI, 238.
58. Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. F. Caspary. Crelle XCII, 123.
Vergl. Integration (unbestimmte). Quadratische Formen 347. Trigonometrie 379, 380.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

59. Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. E. Hunyady. Crelle XCII, 307. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 512.]

60. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 368.
61. Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades. E. Hunyady. Crelle XCII, 304.
Vergl. Kegelschnitte. Mannichfaltigkeiten 252.

Differentialgleichungen.

62. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten. L. Königsberger. Crelle XCI, 199.
63. Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle XCI, 265.
64. Ueber die Irreductibilität von Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle XCII, 291.
65. Sur l'intégration des équations différentielles totales. J. Bertrand. Compt. rend. LXXXIII, 1191.
66. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Thomé. Crelle XCI, 79, 341. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 319.]
67. Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients quelconques, avec ou sans second membre. Dés. André. Compt. rend. LXXXIV, 1018.
68. Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables. Dés. André. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 283. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 53.]
69. Sur les équations différentielles linéaires du deuxième ordre. L. Fuchs. Compt. rend. LXXXV, 947.
70. Sur l'équation de Lamé. F. Brioschi. Compt. rend. LXXXV, 1160.
71. Integrale von einigen linearen Differentialgleichungen. Gräfe. Crelle XCI, 262. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 322.]
72. Sur l'équation de Riccati. Genocchi. Compt. rend. LXXXV, 391.
73. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Poincaré. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 375.
74. Zur Integration der Differentialgleichungen. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 1. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 35.]
75. Ueber eine Transformation der Differentialgleichung $\varphi_0 \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 374.
76. Sur l'intégration de l'équation $(x\,dy - y\,dx)(a + bx + cy) - dy\,(a' + b'x + c'y) + dx(a'' + b''x + c''y) = 0$. Allégret. Compt. rend. LXXXIII, 1171.
77. Intégrer l'équation $(y^3 + 2\,xy^2)\,dy - 2y^3\,dx + (x+y)(x\,dy - y\,dx) = 0$. H. Brocard. Mathesis II, 163.
78. Intégrer l'équation différentielle du premier ordre $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y-x)^2$. H. Brocard. Mathesis II, 103.
79. Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen. Norb. Herz. Grun. Archiv LXVII, 312.
80. Intégration géométrique de l'équation aux dérivées partielles $L(px + qy - z) - Mp - Nq + R = 0$ dans laquelle L, M, N, R désignent des fonctions linéaires de x, y, z. G. Fouret. Compt. rend. LXXXIII, 794.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene. Bestimmte Integrale 37.

E.

Elasticität.

81. Sur la théorie des plaques élastiques planes. M. Levy. Compt. rend. LXXXIV, 596, 942. — G. Kirchhoff ibid. 740.
82. Sur les conditions aux limites dans le problème des plaques élastiques. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXV, 1157. — M. Levy ibid. 1277.
83. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. H. Hertz. Crelle XCII, 156.

Elektrodynamik.

84. Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. H. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1881, 191.
85. Recherches sur l'électrodynamique. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 129.
Vergl. Geschichte der Mathematik 183.

111. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. R. Dedekind & H. Weber. Crelle XCII, 181.
112. Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen. G. Cantor. Mathem. Annal. XIX, 588.
113. Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 176.
114. Zur Theorie der Punktmengen. Veltmann. Zeitschr. Math Phys. XXVII, 313.
115. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 41. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 75.]
116. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions lineaires. Poincaré. Mathem. Annal. XIX, 553.
117. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. F. Klein. Mathem. Annal. XIX, 565.
118. Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen. M. Nöther. Crelle XCII, 301.
119. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppeltperiodischen Functionen betreffend. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 125.
120. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Hermite. Crelle XCI, 54.
121. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. Ch. Hermite. Crelle XCII, 145.
12 Les périodes cycliques ou logarithmiques de la quadratrice d'une courbe algébrique du degré m sont les produits par $2\pi\sqrt{-1}$ des racines d'une équation algébrique de degré m, qu'on peut toujours obtenir et dont les coefficients sont des fonctions rationelles de ceux de l'équation de la courbe proposée Max. Marie. Compt. rend. LXXXIV, 27.
123. Sur les relations qui existent nécessairement entre les périodes de la quadratrice de la courbe algébrique la plus générale de degré m, et, à plus forte raison, d'une courbe particulière dans son degré. Max. Marie. Compt. rend. LXXXIV, 120.
124. Propositions d'algèbre et de géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité. Appell. Compt. rend. LXXXIV, 540, 1378.
125. Sur la période de l'exponentielle e^z. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXIII, 594.
126 Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable. Dés. André. Compt. rend. LXXXV, 1108.
127. Entwickelung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen. F. Lindemann. Mathem. Annal. XIX, 323.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 3. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Fourier'sche Reihe. Kettenbrüche. Quadratische Formen 349. Reihen. Substitutionen. Ultraelliptische Transcendenten. Zahlentheorie 402.

G.

Geometrie (descriptive).

128. Perspectivische Studien. G. Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 236. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 81.]
129. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwinkligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet. M. Petzold Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 252.
130. Ueber den Schnitt zweier Kegel zweiter Ordnung nach Curven zweiter Ordnung. Ig. Dickl. Grun. Archiv LXVII, 219.

Vergl. Cartographie.

Geometrie (höhere).

131. Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften. R. Sturm. Mathem. Annal. XIX, 461.
132. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 257.
133. Théorèmes relatifs à des couples de segments rectilignes, ayant un rapport constant. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 97.
134. Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments ayant un produit constant. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 589, 641.

135. Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments formant une longueur constante. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 757, 867.
136. Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux courbes étant d'ordre et de classe quelconques. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 1123.
137. Théorèmes concernant des couples de segments pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant ensemble une longueur constante, les courbes étant d'ordre et de classe quelconques. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 1195.
138. Théorèmes relatifs à des séries de triangles de même périmètre, satisfaisant à quatre autres conditions. M. Chasles Compt. rend. LXXXIV, 55.
139. Théorèmes relatifs à des séries de triangles isopérimètres qui ont un côté de grandeur constante et satisfont à trois autres conditions diverses. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIV, 471, 627.
140. Triangles isopérimètres ayant un côté de grandeur constante et un sommet en un point fixe. M. Chasles. Compt rend. LXXXIV, 1051.
141. Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconque, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante. — Exemples de la variété de solutions différentes que fournit, dans chaque question, le principe de correspondance M. Chasles. Compt. rend. LXXXIII, 467, 495, 519.
142. Formule symbolique donnant le degré du lieu des points dont les distances à des courbes algébriques données vérifient une relation donnée. G. Fouret. Compt. rend. LXXXIII, 605.
143. Deux lois générales des courbes géométriques. M. Chasles. Compt. rend. LXXXIV, 971.
144. Démonstration de deux lois géométriques énoncées par M. Chasles. G. Fouret. Compt. rend. LXXXV, 134.
145. Sur l'extension à l'espace de deux lois relatives aux courbes planes données par M. Chasles. G. Fouret. Compt. rend. LXXXV, 216.
146. Une loi générale des courbes géométriques, concernant l'intervention commune de chaque point d'une courbe et de la tangente de ce point, dans les questions de lieux géométriques ou de courbes enveloppes. Chasles. Compt. rend. LXXXV, 362.
147. Deux lois générales des courbes géométriques d'ordre et de classe m et n. M. Chasles. Compt. rend. LXXXV, 460.
148. Du nombre des branches de courbes d'un système $(\mu.\nu)$, qui coupent une courbe algébrique donnée, sous un angle de grandeur donnée, ou dont les bissectrices aient une direction donnée. G. Fouret. Compt. rend. LXXXIII, 633.
149. Sur les ordres et les classes de certains lieux géométriques. Halphen. Compt. rend. LXXXIII, 753.
150. Sur l'ordre (ou la classe) d'une courbe plane algébrique, dont chaque point (ou chaque tangente) dépend d'un point correspondant d'une autre courbe plane et de la tangente en ce point; extension aux surfaces. G. Fouret. Compt. rend. LXXXV, 844, 944.
151. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hilfe von Involutionen auf Kegelschnitten. L. Kotányi. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 248.
152. Beweis eines Satzes über projective Punktreihen. M. Pasch. Crelle XCI, 349.
153. Bemerkung über projective Punktreihen. M. Pasch. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 124.
154. Zwei projectivische Sätze. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 380. — A. Sachse ibid. 381.
155. Sur les podaires successives d'une courbe. H. Schoentjes. Mathesis II, 154.
156. Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini. W. Spottiswoode. Compt. rend. LXXXIII, 627.
157. Transversale d'un quadrilatère. Jeřabeck. Mathesis II, 228. — Sum ibid. 228.
158. Sur un problème de perspective. Jeřabeck. Mathesis II, 80.
159. Ueber das vollständige Viereck. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXVII, 324.
160. Sur la droite de Simson. Barbarin. Mathesis II, 106, 122 — J. Neuberg ibid. 108, 152.
161. Sur le centre des médianes antiparallèles. W. Tesch. Mathesis II, 151. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 89.]

162. Trouver sur une droite XY un segment qui soit vu de deux points A, B sou des angles α, β. Minoliti. Mathesis II, 69.
163. Propriétés générales de trois figures semblables. G. Tarry. Mathesis II, 73. — J. Neuberg ibid. 76.
164. Ueber besondere Lagen zweier Tetraeder. Schur. Mathem. Annal. XIX, 429.
165. Zur Geometrie des Tetraeders. Thieme. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 56.
166. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurve dritter Ordnung. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 321.
167. Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Classe. W. Stahl. Crelle XCII, 172.
168. Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe. W. Stahl. Crelle XCI, 1.
169. Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln. R. Sturm. Mathem. Annal. XIX, 487.
170. Ueber die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren. H. Vogt. Crelle XCII, 328.

Vergl. Infinitesimalgeometrie. Kegelschnitte. Kreis. Mannichfaltigkeiten. Oberflächen.

Geometrie der Lage.

171. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen auf dem Gebiete der Topologie. O. Simony. Mathem. Annal. XIX, 110.

Geschichte der Mathematik.

172. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. Supplem. 1.
173. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate. Fr. Hultsch. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. 41.
174. Der Tractat Franco's von Lüttich „De quadratura circuli" herausgegeben von Dr. Winterberg. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. Supplem. 135.
175. Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Ed. Mahler. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. 207.
176. Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme. H. Suter. Zeitschr Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. 121.
177. Ueber das sogenannte Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king von Sun-tsze und Tayen lei schu von Yih-hing. L. Matthiessen. Crelle XCI, 254.
178. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. P. Kramer. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. Supplem. 233.
179. Die Entdeckung der analytischen Geometrie und Marino Ghetaldi. E. Gelcich. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. Supplem. 191.
180. Propriété des podaires connue au Marquis de l'Hospital. E. Habich. Mathesis II, 149. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 85.]
181. Versuch neuer Tafeln der hyperbolischen Functionen. Aug. Forti. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist.-lit. Abth. 1.
182. Die Heimath Argand's. Hoüel. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, hist-lit. Abth. 125.
183. Geschichtliche Entwickelung der mathematischen Elektricitätslehre und Bedeutung des Potentials für die letztere. Aug. Kiel. Grun. Archiv LXVII, 113.
184. Discours prononcés lors des obsèques de Le Verrier. Compt. rend. LXXXV, 580.
185. Adresse zum 50jährigen Doctorjubiläum von E. E. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1881, 895.

Vergl. Astronomie 29. Functionen 109. Gleichungen 186, 190 Graphisches Rechnen. Hydrodynamik 205. Maxima und Minima 256. Planimetrie 330. Rectification. Reihen 359. Wahrscheinlichkeitsrechnung 397. Zahlentheorie 412, 414.

Gleichungen.

186. Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoené Wronski. Em. West. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 5.
187. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. A. Siebel. Grun. Archiv LXVII, 375. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 376.]

188. Sur une classe de fonctions symétriques. W. Kapteyn. Grun. Archiv LXVII, 102.
189. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Brioschi. Compt. rend. LXXXV, 1000.
190. Sur la réduction due à M. Schlömilch d'une équation du 4. degré à une équation réciproque. H. Brocard. Mathesis II, 181. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 112.]
191. Bemerkungen zu einer Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Ligowski. Grun. Archiv LXVII, 446.
192. Sur le problème de Kepler. A. de Gasparis. Compt. rend. LXXXIV, 333.
193. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1881, 535.
194. Nouvelle méthode pour l'élimination des fonctions arbitraires. R. Minich. Compt. rend. LXXXIV, 1496.
195. Sur un problème comprenant la théorie de l'élimination Ventéjols. Compt. rend. LXXXIV, 546.
196. Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten. Krey. Math Annal.. XIX, 497.
197. Solution d'un système de 2 équations cubiques. Verhelst & Pisani. Mathesis II, 155. — Gelin ibid. 156. — J. Neuberg ibid. 156.
198. Résolution d'un système de 3 équations quadratiques. V. Bortier. Mathesis II, 138.
Vergl. Zahlentheorie 402

Graphisches Rechnen.

199. Tables graphiques et géométrie anamorphique; réclamation de priorité. L. Lalanne. Compt. rend. LXXXV, 1012.
Vergl. Astronomie 28, 29.

H.

Hydrodynamik.

200. Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité. H. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 341.
201. Sur la vitesse de propagation des ondes. Laroche. Compt. rend LXXXIII, 741.
202. Ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Em. Guyon. Compt. rend. LXXXV, 1274.
203. De la propagation verticale des ondes dans les liquides. P. A. Cornaglia. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 289.
204. Propriétés communes aux canaux, aux tuyaux de conduite et aux rivières à régime uniforme. P. Boileau. Compt. rend. LXXXIV, 326; LXXXV, 429. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 170.]
205. Remarques historiques sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou variables, dans un fluide incompressible. G. A. Bjerknes. Compt. rend. LXXXIV, 1222, 1309, 1375, 1446, 1493.

Hyperbel.

Vergl. Parabel 323.

I.

Infinitesimalgeometrie.

206. Sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre de grandeur invariable. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXIV, 1373.

Integration (unbestimmte).

207. Ueber mehrfache Integrale, welche durch eine Transformation der Variabeln ihre Gestalt nicht ändern. S. Gundelfinger. Crelle XCI, 215.

Invariantentheorie.

208. Bemerkungen zur Invariantentheorie. Christoffel. Mathem. Annal. XIX, 280.
209. Sur les invariants fondamentaux de la forme binaire du huitième degré. Sylvester. Compt. rend. LXXXIV, 240, 532.
210. Sur la théorie algébrique des formes. Sylvester. Compt. rend. LXXXIV, 975, 1113, 1211, 1285, 1359, 1427.
211. Sur les invariants. Sylvester. Compt. rend. LXXXV, 992, 1035, 1091.
Vergl. Functionen 110. Zahlentheorie 402.

K.

Kegelschnitte.

212. Ueber ein Kriterium von Steiner in der Theorie der Kegelschnitte. Hunyady. Crelle XCI, 248.
213. Bemerkung zur Kegelschnitttheorie. Pasch. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 122.
214. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner nebst einigen daraus fliessenden geometrischen Relationen. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 363.
215. Sur une proposition générale de la théorie des coniques. Halphen. Compt. rend. LXXXIII, 791.
216. Ueber Büschel von Kegelschnitten. Gordan. Mathem. Annal. XIX, 529.
217. Kegelschnittbüschel-Constructionen. Fr. Bergmann. Grun. Archiv LXVII, 177.
218. Sur les caractéristiques des systèmes des coniques. Halphen. Compt. rend. LXXXIII, 537.
219. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. Halphen. Compt. rend. LXXXIII, 886.
220. Ueber ein System von vier Kegelschnitten in der Ebene. H. Schroeter. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 61.
221. Ueber einige Eigenschaften der Kegelschnitte. J. Blaschke. Grun. Archiv LXVII, 104.
222. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte mit vorgegebenem Brennpunkte. Fr. Hofmann. Grun. Archiv LXVII, 332.
223. Le lieu des centres des cercles qui touchent une circonférence donnée et divisent une autre circonférence donnée en deux parties égales est une conique. Derousseaux. Mathesis II, 222. —. Barbarin ibid. 223.
    Vergl. Determinanten 58. Determinanten in geometrischer Anwendung 59. Ellipse. Geometrie (descriptive) 130. Geometrie (höhere). Kreis. Mechanik 270. Optik 314. Parabel.

Kettenbrüche.

224. Die Entwickelung des Euler'schen Algorithmus. L. Klug. Grun. Archiv LXVII, 337.

Kreis.

225. Grundzüge der Geometrie des Zirkels. Fr. Bessell. Grun. Archiv LXVII, 44.
226. Exemples de la géométrie du compas. Polis. Mathesis II, 220. — J. Gillet ibid. 221. — P. Mansion ibid. 221.
227. Tracé pratique du cercle qu'il convient de substituer à une courbe donnée dans une étendue finie. H. Léauté. Compt. rend. LXXXV, 1049.
228. Soient r, R l'apothème et le rayon d'un polygone régulier; si ϱ est le rayon de la circonférence isopérimètre avec ce polygone, on a $\frac{1}{3}(r+2R) > \varrho > \sqrt[3]{r.R^2}$. E. Catalan. Mathesis II, 85. — J. Neuberg ibid. 88. — H. Brocard ibid. 245.
229. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks. E. Hain. Grun. Archiv LXVII, 106.
230. Sécante tirée par le point d'intersection de deux circonférences. Liénard. Mathesis II, 227. — Fauchamps ibid. 227.
231. L'axe radical de deux cercles est à égale distance des polaires du centre de chaque cercle par rapport à l'autre cercle. Servais. Mathesis II, 228. — J. Gillet ibid. 229.
232. Sur l'axe radical de deux circonférences, dont on connait des segments capables d'un même angle. Pisani. Mathesis II, 206. — J. Neuberg ibid. 207.
233. Théorème sur les cercles circonscrits et inscrits. Liénard. Mathesis II, 133.
234. Le lieu du sommet d'un triangle dont on connait la base et la somme des cotangentes des trois angles se compose de deux circonférences. Polet. Mathesis II, 186. — J. Neuberg ibid. 186. — J. Gillet ibid. 242.
235. Sur 6 droites menées par un point d'une circonférence. Liénard. Mathesis II, 110.
236. Ein Beitrag zur Kreislehre. Fr. Schiffner. Grun. Archiv LXVII, 111.
237. Circonférence passant par les sommets de 6 triangles semblables sur une même droite. Liénard. Mathesis II, 157.

238. Point situé sur le cercle des 9 points d'un triangle. Liénard. Mathesis II, 226.

239. Soient P, P' les projections de deux points M, M' d'une circonférence sur un rayon OA; le rapport des aires du triangle OMM' et du trapèze $MPP'M'$ ne change pas quand la corde MM' se déplace parallèlement à elle-même. Bortier. Mathesis II, 138.

Vergl. Geschichte der Mathematik 174. Maxima und Minima 259, 260, 261.

Krümmung.

240. Donner une méthode pour trouver les courbes dans lesquelles le rayon de courbure ϱ est une fonction donnée $f(\alpha)$ de l'angle α que la tangente à la courbe fait avec une direction fixe. Application aux cas où $f(\alpha) = a . \cos \alpha$, $f(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{a}$. H. Brocard. Mathesis II, 104.

241. Sur les rayons de courbure des podaires successives d'une courbe plane. Niewenglowski. Compt. rend. LXXXIV, 765.

242. Trouver une courbe plane telle que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses différents points, le lieu de la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur correspondant soit une courbe symétrique de la proposée par rapport au point fixe. H. Brocard. Mathesis II, 102.

243. Ueber die Krümmung der Flächen. O. Böklen Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 369.

244. Sur la courbure des surfaces. P. Serret. Compt. rend. LXXXIV, 543.

245. Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonction l'un de l'autre. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXIV, 932.

246. Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure moyenne varie suivant une loi donnée. H. Resal. Compt. rend. LXXXV, 5.

247. Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. H. v. Mangoldt. Crelle XCI, 23.

248. Construction pour un point de la courbe d'intersection de deux surfaces du centre de la sphère osculatrice de cette courbe. Mannheim. Compt. rend. LXXXIII, 1040.

M.

Magnetismus.

249. Sur l'aimantation des plaques circulaires où les lignes isodynamiques sont des circonférences concentriques. E. Duter. Compt. rend. LXXXV, 222.

Mannichfaltigkeiten.

250. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Veronese. Mathem. Annal. XIX, 161.

251. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions. Brunel. Mathem. Annal. XIX, 37.

252. Ueber Distanzrelationen. Study. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 140.

253. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVII, 29.

254. Berechnung einiger vierdehnigen Winkel. R Hoppe. Grun. Archiv LXVII, 269.

255. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction nebst Anwendung. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVII, 412.

Maxima und Minima.

256. Méthode, dite de Fermat, pour la recherche des maxima et des minima. P. Mansion. Mathesis II, 193.

257. Maximum et minimum de la fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. Catalan. Mathesis II, 5.

258. Sur certaines questions de Maximum. J. Neuberg. Mathesis II, 153.

259. Trouver le minimum de $x^2 + y^2 - z^2$, x, y, z étant les distances d'un point variable aux côtés d'un triangle donné. Doneux. Mathesis II, 40.

260. Maximum d'une aire définie dans une circonférence donnée. Pisani. Mathesis II, 21. — Ruex ibid. 22.
261. Maximum d'une aire définie entre deux circonférences données E. Clevers. Mathesis II, 22. — Ruex ibid. 23.
262. Maximum du volume d'un corps compris entre deux pyramides régulières. A. Lambert. Mathesis II, 34.
263. Questions de maximum et de minimum. Gelin. Mathesis II, 164.

Mechanik.

264. Sur les équations fondamentales de la dynamique. Janaud. Grun. Archiv LXVII, 160.
265. Sur quelques théorèmes de mécanique. H. Resal. Journ. mathém Sér. 3, VII, 33.
266. Bewegung und Stabilität eines laufenden Rades. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVII, 165.
267. Sur le problème des lignes géodésiques considéré comme problème de mécanique. M. Levy. Compt. rend. LXXXV, 904, 938, 1009, 1065, 1150.
268. Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum. E. Brassinne. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 215.
269. Sur quelques questions concernant les forces centrales. Ed. Combescure. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 239.
270. Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique. G. Darboux. Compt. rend. LXXXIV, 760, 936.
271. Des solutions singulières qui se présentent dans le problème du mouvement curviligne d'un point sous l'action d'une force centrale. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXIV, 944.
272. Sur les mouvements quasi circulaires d'un point soumis à l'attraction d'un centre fixe. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXV, 65.
273. Mouvement d'un point sur une surface. Ph. Gilbert Compt. rend. LXXXV, 1280.
274. Théorie des petits mouvements d'un point pesant sur une surface fixe décrite autour d'un axe de révolution vertical. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXV, 539.
275. Sur la transmission de mouvement. C. Rozé. Compt. rend. LXXXIV, 1148.
276. Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans menés par un même point d'un corps. J. Boussinesq. Compt rend. LXXXIII, 1168.
277. Ueber das Gyroskop. W. Hess. Mathem. Annal. XIX, 121.
278. Le dévioscope, appareil donnant directement le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de la Terre et celle d'un horizon quelconque autour de la verticale du lieu. G. Sire. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 161.
279. Sur la stabilité des voutes. H. Resal. Compt. rend. LXXXIV, 203.
280. Sur l'isochronisme du spiral réglant cylindrique. E. Caspari. Compt. rend. LXXXIII, 47.
281. Sur la théorie générale des régulateurs. Wischnegradski. Compt. rend. LXXXIII, 318.
282. Sur la théorie dynamique des régulateurs. Rolland. Compt. rend. LXXXIII, 418.

Vergl. Astronomie. Balistik. Brachistochrone. Elasticität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Quaternionen 357. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Molecularphysik.

283. Note concernant le travail intermoléculaire. P. Boileau. Compt. rend. LXXXV, 1135, 1199.

N.

Nautik.

284. Examen des nouvelles méthodes proposées pour la recherche de la position du navire à la mer. A. Ledieu. Compt. rend. LXXXIII, 23, 120, 188. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 242.]
285. Calcul de la longitude, à la mer, par les occultations d'étoiles. Baills. Compt. rend. LXXXV, 1158.

286. Sur la détermination du zénith du navire. H. Bertot. Compt. rend. LXXXIV, 1383.
287. Résumé des regles pratiques de la nouvelle navigation. Fasci. Compt. rend. LXXXIII, 442. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 243.]
288. Formes réduites pratiques du développement de Taylor. Rouyaux. Compt. rend. LXXXIV, 1014.
289. Du roulis en eau calme. Bourgois. Compt. rend. LXXXIV, 768.

Normalen.

290. Sur les normales qu'on peut mener d'un point donné à une conique. Laguerre. Compt. rend. LXXXIV, 181.
291. Trouver les courbes telles que, si par le point N où une normale quelconque rencontre l'axe OX, on mène une parallèle à la tangente en M, cette droite passe par un point A donné sur l'axe OY. Trouver les trajectoires orthogonales de ces courbes. H. Brocard. Mathesis II, 127. — P. Mansion ibid. 128.
292. Déterminer une courbe telle que menant par un point quelconque la tangente MT et la normale MN, les diagonales du quadrilatère $MNOT$ formé par ces deux droites et les deux axes OX, OY fassent un angle donné Θ. H. Brocard. Mathesis II, 168.
293. Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur la surface formée par ces normales. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXV, 212.
294. Condition pour que les normales principales d'une courbe soient normales principales d'une seconde courbe. J. A. Serret. Compt. rend. LXXXV, 307.
295. Note sur les courbes qui ont les mêmes normales principales. B. Niewenglowski. Compt. rend. LXXXV, 394.

O.

Oberflächen.

296. Zur Theorie der Flächentransformationen. Bäcklund. Mathem. Annal. XIX, 387.
297. Ueber allgemeine Flächentheorie. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXXVI, 96.
298. Sur l'application des méthodes de la physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. G. Darboux. Compt. rend. LXXXIII, 1037, 1099.
299. Sur une classe de systèmes orthogonaux, comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes. G. Darboux. Compt. rend. LXXXIV, 298.
300. Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du deuxième degré. G. Darboux. Compt. rend. LXXXIV, 336.
301. Démonstration, par le principe de correspondance, d'un théorème sur le contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique. G. Fouret. Compt. rend. LXXXIV, 436.
302. Sur les transformations de contact des systèmes de surface. G. Fouret. Compt. rend. LXXXV, 1224.
303. Sur une propriété des surfaces gauches. F. Chomé. Mathesis II, 82.
304. Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces reglées. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXV, 788, 847, 941.
305. Sur les surfaces osculatrices. Pepin. Journ. mathém. Sér. 3, III, 71.
306. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 160.
307. Ueber die Fläche 4. Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt. Bela. Mathem. Annal. XIX, 291.
308. Sur les lignes asymptotiques d'une surface du quatrième degré. E. Rouché. Compt. rend. LXXXIV, 434.
309. Détermination des lignes de courbure d'une classe des surfaces, et en particulier des surfaces tétraédrales de Lamé. G. Darboux. Compt. rend. LXXXIV, 382.
310. Ueber den geometrischen Ort des Durchschnittspunktes zweier von gegebenen Punkten ausgehenden und zu einer gegebenen Ebene gleichgeneigten Geraden. L. Klug. Grun. Archiv LXVII, 330.
311. Trouver l'équation d'une surface en employant les tangentes tirées de chacun de ses points à une sphère donnée. H. Brocard. Mathesis II, 161.

Vergl. Abbildung. Analytische Geometrie des Raumes 23, 24. Cubatur 56. Geschichte der Mathematik 185. Krümmung 243, 244, 245, 246, 247, 248. Mechanik 267. Ultraelliptische Transcendenten 391.

Oberflächen zweiter Ordnung.

312. Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung. Cardinaal. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 119.

Vergl. Cubatur 56. Kegelschnitte 219. Optik 316. Paraboloid.

Optik.

313. Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les Exercises d'Analyse et de Physique mathématique de Cauchy. Em. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 201.
314. Ueber Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 189.
315. Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel. Meisel. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 65.
316. Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkte auf ein gegebenes Ellipsoid fällt. Aug. Kiel. Grun. Archiv LXVII, 131.
317. De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation. Em. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 219.
318. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen. J. Morawetz. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 310.
319. Sur la réflexion de la lumière polarisée. Croullebois. Compt. rend. LXXXIV, 604.
320. Réfraction sphérique; exposition des lois et formules de Gauss en partant du principe de l'équivalence des forces physiques. Giraud-Teulon. Compt. rend. LXXXV, 326.
321. Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus. H. Bruns. Berl. Akad.-Ber. 1881, 48.

Vergl. Geschichte der Mathematik 178. Oberflächen 306.

P.

Parabel.

322. Construire un parabole au moyen de deux points et de deux tangentes et au moyen de trois points et d'une tangente. J. Neuberg. Mathesis II, 58.
323. Lieu des foyers des paraboles qui passent par deux points donnés et dont l'axe a une direction donnée. Cesaro. Mathesis II, 189. — Liénard ibid. 190. — Gérondal ibid. 190. — J. Neuberg ibid. 191.
324. Tangentes communes à une parabole et aux podaires d'une courbe prises sous différents angles. H. Schoentjes. Mathesis II, 155.
325. Enveloppe de la corde commune à deux paraboles dont l'une reste fixe tandis que l'autre se déplace en restant tangente à la première. Pisani. Mathesis II, 20. — Neuberg ibid. 21.

Paraboloid.

326. Sur la paraboloïde des huit droites. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXIV, 645.

Philosophie der Mathematik.

327. Philosophie et enseignement des mathématiques; sur la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXIII, 102.
328. Sur la conciliation de la liberté morale avec le determinisme scientifique. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXIV, 362.
329. Accord des lois de la mécanique avec la liberté de l'homme dans son action sur la matière. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXIV, 419.

Planimetrie.

330. Der Beweis des Ptolemäus'schen Satzes. Schnell. Grun. Archiv LXVII, 225.
331. Eine Billardaufgabe. Em. Hain. Grun. Archiv LXVII, 110.
332. Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. J. Lange. Grun. Archiv LXVII, 191.
333. Droites joignant les pieds des bissectrices extérieures et intérieures d'un triangle. Pisani. Mathesis II, 111. — J. Neuberg ibid. 113.

Q.

Quadratische Formen.

Quadratur.

Quaternionen.

R.

Rectification.

Reihen.

359. Digression sur les séries. Em. West. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 111.
360. Ueber eine Reihe von dem Werthe +1 oder −1, je nachdem $|x| < 1$ oder $|x| > 1$. J. Tannery. Berl. Akad.-Ber. 1881, 228.
361. Forme générale des coefficients de certains développements. Des. André. Compt. rend. LXXXV, 786.
362. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. H. Léauté. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 185.
363. Sur le développement des fonctions implicites en une série. Gomes Teixeira. Journ. mathém. Sér. 3, VII, 277.
364. Sur le développement de *arctgx* en série convergente. V. Jamet. Mathesis II, 52.
365. Série dérivant d'une manière très simple de la série du binome. E. Catalan. Mathesis II, 101.
366. Ueber neuere Formen von höheren Reihen. Fr. C. Lukas. Grun. Archiv LXVII, 327.
367. Sommation des piles de boulets. E. Verhelst. Mathesis II, 78. — H. Brocard ibid. 151.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Convergenzbedingungen. Elliptische Transcendenten 95. Fourier'sche Reihe. Functionen 115, 126, 127. Geschichte der Mathematik 185. Nautik 288. Trigonometrie 378. Ultraelliptische Transcendenten 388.

S.

Schwerpunkt.

368. Théorème sur le centre de gravité. J. Neuberg. Mathesis II, 59.

Sphärik.

369. Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks. P. v. Schaewen. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 126.
370. Sur le quadrilatère sphérique ayant deux angles opposés droits. Polst. Mathesis II, 188. — De Munck ibid. 189.

Substitutionen.

371. Sur la détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions linéaires. C. Jordan. Compt. rend. LXXXIII, 1035.
372. Détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions linéaires. C. Jordan. Compt. rend. LXXXIV, 1446.

T.

Trigonometrie.

373. Trouver la relation entre les deux angles sous lesquels on voit, d'un point quelconque d'une circonférence, les deux diagonales d'un carré circonscrit. Pisani. Mathesis II, 141. — A. Lambert ibid. 141.
374. Équivalence de deux triangles. Liénard. Mathesis II, 132. — J. Neuberg ibid. 133.
375. Limite du rapport de l'aire d'un quadrilatère à la somme des aires de projections consécutives du quadrilatère. Pisani. Mathesis II, 142.
376. Dans tout parallélipipède circonscrit à une sphère, chacune des arêtes d'un angle trièdre est proportionelle au sinus de l'angle formé par les deux autres. A. Lambert. Mathesis II, 142.
377. Résoudre l'équation $(1+k)\dfrac{\cos x.\cos(2x-a)}{\cos(x-a)} = 1 + k\cos 2x$. De Graeve. Mathesis II, 249.
378. $\cos^2 x + \cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{n}\right) + \cos^2\left(x+\dfrac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos^2\left(x+\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2}$. Lambert. Mathesis II, 185. — J. Gillet ibid. 242.
379. Équation entre des fonctions trigonométriques de 3 angles quelconques. Pisani. Mathesis II, 136. — Polet ibid. 137. — J. Neuberg ibid. 242.
380. Déterminant de fonctions trigonométriques de trois angles. Pisani. Mathesis II, 91.
381. Équation entre les fonctions trigonométriques de trois angles. Pisani. Mathesis II, 90.

382. Équation entre des fonctions trigonométriques de 3 angles quelconques. Pisani & Liénard. Mathesis II, 139. — Polet ibid. 140. — Gelin ibid. 140.
383. Résolution d'un système de deux équations. G. Noé. Mathesis II, 202. — De Rocquigny ibid. 203.
384. Résolution d'un système de trois équations. Lambert. Mathesis II, 203. — Bastin ibid. 204. — Polet ibid. 205. — Gelin ibid. 205. — J. Neuberg ibid. 205.

Vergl. Kreis 284. Sphärik.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

385. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. M. Krause. Mathem. Annal. XIX, 103.
386. Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. M. Krause. Mathem. Annal. XIX, 423, 489.
387. Sur l'approximation d'une classe de transcendantes qui comprennent comme cas particulier les intégrales hyperelliptiques. Laguerre. Compt. rend. LXXXIV, 643.
388. Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 317.
389. Sur un exemple de réduction d'intégrales abeliennes aux fonctions elliptiques. A. Cayley. Compt. rend. LXXXV, 265, 373, 426, 472.
390. Sur des cas de réduction des fonctions abéliennes aux fonctions elliptiques. Brioschi. Compt. rend. LXXXV, 708.
391. Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. Em. Picard. Mathem. Annal. XIX, 569.

W.

Wärmelehre.

392. Sur la théorie mécanique de la chaleur. M. Levy. Compt. rend. LXXXIV, 442, 491.
393. Sur un théorème relatif à la détente des vapeurs sans travail externe. G. A. Hirn. Compt. rend. LXXXIV, 592, 632, 680.
394. Sur la mesure exacte de la chaleur de dissolution de l'acide sulfurique dans l'eau. Croullebois. Compt. rend. LXXXV, 617.
395. Sur le problème du refroidissement des corps solides en ayant égard à la chaleur dégagée par la contraction. M. Levy. Compt. rend. LXXXIII, 136.
396. Sur la théorie des machines frigorifiques. A. Terquem. Compt. rend. LXXXIV, 602, 648.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

397. Das Petersburger Problem. Em. Czuber. Grun. Archiv LXVII, 1.
398. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Th. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 315.
399. Une question de probabilités. Cesaro. Mathesis II, 177.
400. Wahrscheinlicher Grad der Homogeneität einer Mischung. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVII, 98.

Wurzelausziehung.

401. Ueber das Kubiren und Kubikwurzelausziehen nach Horner's Methode. M. Rusch. Grun. Archiv LXVII, 291.

Z.

Zahlentheorie.

402. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. L. Kronecker. Crelle XCII, 1.
403. Sur les lois de réciprocité dans la théorie des résidus de puissances. Pepin. Compt. rend. LXXXIV, 762.
404. Untersuchungen über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 102.

405. Sur l'extension du théorème de Fermat généralisé et du Canon arithmeticus. Ed. Lucas. Compt. rend. LXXXIV, 489.
406. Théorèmes d'arithmétique supérieure. Ed. Lucas. Compt. rend. LXXXIII, 1286.
407. Énoncé de divers théorèmes sur les nombres. F. Proth. Compt. rend. LXXXIII, 1288.
408. Sur la division de la circonférence en parties égales. Ed. Lucas. Compt. rend. LXXXV, 136.
409. Sur la formule $2^{2^n}+1$. Pepin. Compt. rend. LXXXV, 329.
410. Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$. Gohierre de Longchamps. Compt. rend. LXXXV, 950.
411. Ueber magische Parallelepipeda. Th. Harmuth. Grun. Archiv LXVII, 238.
412. Carré et cube magique de Fermat. Ed. Lucas. Mathesis II, 243.
413. Formule d'arithmétique. E. Cesaro. Mathesis II, 97, 148.
414. Sur une question de Jean Bernoulli. Markoff. Mathem. Annal. XIX, 27.
415. Peser un poid d'un nombre quelconque de grammes à l'aide de poids de 1, 3, 9, 27, ... grammes et généralisation de ce problème. De Rocquigny. Mathesis II, 183. — S. B. ibid. 184.
416. Étant $n = \alpha + \beta + \ldots + \Theta$, $N = \frac{1.2 \ldots n}{1.2 \ldots \alpha \times 1.2 \ldots \beta \times \ldots \times 1.2 \ldots \Theta}$ est pair, si deux au moins des nombres $\alpha, \beta, \ldots \Theta$ sont impairs E. Clevers. Mathesis II, 67.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen 32. Combinatorik. Geschichte der Mathematik 172, 177, 185. Kettenbrüche. Oberflächen 305. Quadratische Formen.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber die Methode, nach der die alten Griechen (insbesondere Archimedes und Heron) Quadratwurzeln berechnet haben.

Von

W. SCHOENBORN
in Krotoschin.

Hierzu Taf. VI Fig. 11.

Auf irrationale Grössen — es ist ja wohl gestattet, den jetzt gebräuchlichen Namen auch für die Zeit eines Pythagoras anzuwenden — stiessen die griechischen Mathematiker zuerst bei Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke. (Cantor, Geschichte d. Mathem., Bd. I S. 154.) Sie standen vor der Aufgabe, Näherungswerthe für Quadratwurzeln zu finden, da sie sich bald überzeugten, es liessen sich $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. nicht genau durch Verhältnisse ganzer Zahlen darstellen. Auf rein arithmetischem Wege die Aufgabe zu lösen, werden sie schwerlich versucht haben; sie werden, wie sie es bei arithmetischen Untersuchungen gewöhnlich thaten, die rechtwinkligen Dreiecke zu Hilfe genommen haben. (Cantor, Gesch. d. Math., Bd. I S. 412.) Hier bot sich ihnen nun ein sehr einfacher Satz dar:*

> Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der rechte Winkel bei C liegt, und man schneidet auf AB von A aus ein Stück $AD = AC$ ab und errichtet in D auf AB das Loth, welches BC in F schneidet, so ist $DF = FC$, und BDF ist ein dem gegebenen Dreiecke ähnliches, dessen Seiten mithin in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks ABC.

* Bei Euklid findet sich der Satz allerdings nicht; sollte er auch bei anderen griechischen Mathematikern nicht erwähnt werden, so ist doch zu erwägen, dass über die Art, wie die Alten Quadratwurzeln berechnet, keine Nachrichten auf uns gekommen sind, dass es also nicht auffallend ist, wenn ein von ihnen hierzu benutzter Satz in den uns erhaltenen Schriften nicht erwähnt wird.

Bezeichnet man also die Seiten des $\triangle ABC$, wie jetzt gewöhnlich, mit a, b, c; die entsprechenden Seiten des $\triangle BDF$ mit a_1, b_1, c_1; verfährt mit diesem Dreieck auf gleiche Weise durch Bildung eines Dreiecks mit den Seiten a_2, b_2, c_2, und geht zu Dreiecken mit den Seiten a_3, b_3, c_3 etc. fort, so ist, wenn $b = \mu . a$ ($\mu \gtreqless 1$) war, auch $b_1 = \mu . a_1$, $b_n = \mu . a_n$. Da $c = b + a_1 = \mu . a + a_1$, $a = b_1 + c_1 = 2 . \mu . a_1 + a_2$ ist, so folgt:

$$c_n = b_n + a_{n+1} = \mu . a_n + a_{n+1}, \quad a_n = 2 . \mu . a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Dass die Seiten a; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ an Grösse rasch abnehmen, folgt aus der Construction. Somit kann man folgende Gleichungen bilden:

$$\text{I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} &= \frac{\mu . a + a_1}{\mu . a} \\ &= \frac{(2 . \mu^2 + 1) . a_1 + \mu . a_2}{2 \mu^2 . a_1 + \mu . a_2} \\ &= \frac{(4 \mu^3 + 3 \mu) . a_2 + (2 \mu^2 + 1) . a_3}{(4 \mu^3 + \mu) . a_2 + 2 \mu^2 . a_3} \\ &= \frac{(8 \mu^4 + 8 \mu^2 + 1) . a_3 + (4 \mu^3 + 3 \mu) . a_4}{(8 \mu^4 + 4 \mu^2) . a_3 + (4 \mu^3 + \mu) . a_4} \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Verfasser ist natürlich nicht der Ansicht, es hätten die griechischen Mathematiker diese Gleichungen gebildet und darnach in den einzelnen Fällen gerechnet. Sie werden wenigstens in der älteren Zeit in jedem einzelnen Falle die in dem genannten Satze angegebenen Constructionen ausgeführt, die Seiten c wie b als Summen der Katheten der kleineren Dreiecke berechnet und dann das Verhältniss $\frac{c}{b}$ bestimmt haben. Meist begnügten sie sich wohl mit Bildung der ersten Dreiecke, deren Seiten vorher mit a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 bezeichnet wurden, betrachteten auch nur Fälle, in denen μ eine ganze Zahl ist. Spätere, vielleicht schon Archimedes, dürften die einfachsten sich aus I), [II] ergebenden Formeln gekannt und darnach gerechnet haben.

Was die Bildung der Gleichung in I) betrifft, so ist leicht einzusehen, dass aus

$$\frac{c}{b} = \frac{m . a_n + s . a_{n+1}}{p . a_n + q . a_{n+1}}$$

als nächste Gleichung folgt

$$\frac{c}{b} = \frac{(2 \mu . m + s) . a_{n+1} + m . a_{n+2}}{(2 \mu . p + q) . a_{n+1} + p . a_{n+2}}.$$

Dass die Alten, wenn selbst einer oder der andere auf solche Art aus einer der Gleichungen die folgende entwickelt haben sollte, dabei nicht an Kettenbrüche und an Berechnung der Näherungswerthe derselben dachten, ist einleuchtend.

Aus jeder der Gleichungen in I) entnahmen die griechischen Mathematiker zuerst wohl nur einen Näherungswerth; war $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}=\frac{m.a_n+s.a_{n+1}}{p.a_n+q.a_{n+1}}$ eine der Gleichungen, so setzten sie $a_{n+1}=0$ und erhielten, wenn man das Zeichen $\sim$ für annähernd gleich benutzt, $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}\sim\frac{m}{p}$. Erst Archimedes — bei ihm lassen sich nämlich entsprechende Näherungswerthe aus Gl. II), die ganz ähnlich wie I) erhalten werden, nachweisen — dürfte auch den zweiten in der Gleichung liegenden Näherungswerth beachtet haben, indem er $a_n=a_{n+1}$ setzte und nun fand, dass $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$ zwischen $\frac{m}{p}$ und $\frac{m+s}{p+q}$ liegen müsse.

Der erste Näherungswerth ist grösser, der zweite kleiner als der volle Werth, wenn $\frac{m}{p}>\frac{s}{q}$ ist; das Umgekehrte ist der Fall, wenn $\frac{m}{p}<\frac{s}{q}$ ist.

Aus $\frac{m}{p}>\frac{s}{q}$ folgt nämlich

$$m.q.a_{n+1}>s.p.a_{n+1},$$

und da

$$m:p.a_n=m.p.a_n,$$

so ist

$$m.(p.a_n+q.a_{n+1})>p.(m.a_n+s.a_{n+1}),$$

d. h.

$$\frac{m}{p}>\frac{m.a_n+s.a_{n+1}}{p.a_n+q.a_{n+1}}.$$

Da aber auch

$$m.q.(a_n-a_{n+1})>s.p.(a_n-a_{n+1})$$

und

$$m.p.a_n+s.q.a_{n+1}=m.p.a_n+s.q.a_{n+1}$$

ist, so erhält man

$$m.p.a_n+s.q.a_{n+1}-m.q.(a_n-a_{n+1})<m.p.a_n+s.q.a_{n+1}-s.p.(a_n-a_{n+1}),$$

d. h.

$$\frac{m+s}{p+q}<\frac{m.a_n+s.a_{n+1}}{p.a_n+q.a_{n+1}}.$$

Ist ein erster Näherungswerth einer der Gleichungen grösser als der volle Werth der Wurzel, so ist der erste Näherungswerth der folgenden Gleichung kleiner als der volle Werth.

Aus

$$m.q>s.p \text{ und } 2\mu.m.p=2.\mu.m.p$$

folgt nämlich

$$2\mu.m.p-m.q<2.\mu.m.p-s.p,$$

d. h.

$$p.(2\mu.m+s)<m.(2.\mu.p+q)$$

oder

$$\frac{2.\mu.m+s}{2.\mu.p+q}<\frac{m}{p}.$$

Hatte man es erst versucht, die Länge der Hypotenuse aus den bekannten Längen der Katheten zu bestimmen, so war der Schritt zur Bestimmung der Länge einer Kathete aus den bekannten Längen der Hypotenuse und der andern Kathete leicht gemacht. Betrachtete man wieder ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse $c=\mu.a$ ist, so ergeben sich auf demselben Wege wie vorher die Gleichungen:

$$b=c-a_1,\quad c_1=\mu.a_1,\quad a=b_1+c_1=2.\mu.a_1-a_2$$

und allgemein

$$b_n=c_n-a_{n+1},\quad c_n=\mu.a_n,\quad a_n=b_{n+1}+c_{n+1}=2.\mu.a_{n+1}-a_{n+2}.$$

Mithin erhält man folgende Gleichungen:

$$\text{II)}\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}&=\frac{\mu.a-a_1}{\mu.a}\\&=\frac{(2.\mu^2-1).a_1-\mu.a_2}{2\mu^2.a_1-\mu.a_2}\\&=\frac{(4.\mu^3-3\mu).a_2-(2\mu^2-1).a_3}{(4\mu^3-\mu).a_2-2.\mu^2.a_3}\\&=\frac{(8.\mu^4-4.\mu^2+1).a_3-(4\mu^3-3\mu).a_4}{(8\mu^4-4\mu^2).a_3-(4\mu^3-\mu).a_4}\ \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Entsprechend den Gleichungen in I) folgt aus $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}=\frac{m.a_n-s.a_{n+1}}{p.a_n-q.a_{n+1}}$ als nächste Gleichung

$$\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}=\frac{(2.\mu.m-s).a_{n+1}-m.a_{n+2}}{(2.\mu.p-q).a_{n+1}-p.a_{n+2}}.$$

Auch hier ergeben sich aus jeder Gleichung zwei Werthe, zwischen denen $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$ liegen muss. Ist $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}=\frac{m.a_n-s.a_{n+1}}{p.a_n-q.a_{n+1}}$, so liegt $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$ zwischen $\frac{m}{p}$ und $\frac{m-s}{p-q}$; ist ferner $\frac{m}{p}<\frac{s}{q}$, so ist $\frac{m}{p}>\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}>\frac{m-s}{p-q}$. Aus $\frac{m}{p}<\frac{s}{q}$ folgt nämlich

$$m.q.a_{n+1}<p.s.a_{n+1},$$

und da

$$m.p.a_n=m.p.a_n$$

ist, so ist

$$m.(p.a_n-q.a_{n+1})>p.(m.a_n-s.a_{n+1}),$$

d. h.

$$\frac{m}{p}>\frac{m.a_n-s.a_{n+1}}{p.a_n-q.a_{n+1}}.$$

Ferner ist

$$m.p.a_n + s.q.a_{n+1} = m.p.a_n + s.q.a_{n+1},$$
$$m.q.(a_n - a_{n+1}) < s.p.(a_n - a_{n+1}),$$

folglich

$$m.p.a_n + s.q.a_{n+1} - m.q.a_n - s.p.a_{n+1} > m.p.a_n + s.q.a_{n+1} - s.p.a_n - m.q.a_{n+1},$$

d. h.

$$\frac{m.a_n - s.a_{n+1}}{p.a_n - q.a_{n+1}} > \frac{m-s}{p-q}.$$

Da jetzt auch $2.\mu.m.p - m.q > 2.\mu.m.p - s.p$ oder $\frac{m}{p} > \frac{2\mu.m-s}{2\mu.p-q}$ wird, so ergiebt sich der Satz:

> Ist in einer der Gleichungen in II) der erste Näherungswerth grösser als der volle Werth, so ist auch jeder folgende erste Näherungswerth grösser, der zweite mithin kleiner als der volle Werth.

Von den aus den Gleichungen I) und II) herzuleitenden Näherungswerthen haben die griechischen Mathematiker vorzugsweise die sich aus den ersten Gleichungen ergebenden benutzt.

Aus $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b} = \frac{(2.\mu^2+1).a_1+\mu.a_2}{2\mu^2.a_1+\mu.a_2}$ folgt $\sqrt{b^2+a^2} \backsim b.\left(1+\frac{1}{2\mu^2}\right)$ $= b + \frac{a^2}{2b}$ und $\sqrt{b^2+a^2} \backsim b\left(1+\frac{1}{2\mu^2+1}\right) = b + \frac{a^2}{2b+a}$, oder $\sqrt{b^2+a^2}$ liegt zwischen $b+\frac{a^2}{2b}$ und $b+\frac{a^2}{2b+a}$, womit ausgesprochen ist, dass $\sqrt{b^2+a}$ $\backsim b+\frac{a}{2b}$ sei. — Aus $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c} = \frac{(2\mu^2-1).a_1-\mu.a_2}{2.\mu^2.a_1-\mu.a_2}$ erhält man $\sqrt{c^2-a^2}$ $\backsim c\left(1-\frac{1}{2\mu^2}\right) = c - \frac{a^2}{2c}$ und $\sqrt{c^2-a^2} \backsim c\left(1-\frac{1}{2\mu^2-\mu}\right) = c - \frac{a^2}{2c-a}$, oder $\sqrt{c^2-a^2}$ liegt zwischen $c-\frac{a^2}{2c}$ und $c-\frac{a^2}{2c-a}$, woraus folgt $\sqrt{c^2-a}$ $\backsim c - \frac{a}{2c}$.

Soll nun der Beweis dafür erbracht werden, dass die Griechen unter Benutzung des am Anfang dieser Mittheilung stehenden Satzes und der daraus sich ergebenden Folgerungen Quadratwurzeln berechnet haben, so würde zu zeigen sein, dass die uns überlieferten Werthe sich leicht und ohne Zwang aus den entwickelten Gleichungen herleiten lassen. Dies soll im Folgenden geschehen; der Verfasser führt die dabei vorkommenden Rechnungen in der jetzt gebräuchlichen Art aus. — Herr Dr. S. Günther hat in seiner schätzenswerthen Abhandlung: „Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden" im 4. Hefte der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik die überlieferten Quadratwurzeln auf das Sorgfältigste zusammengestellt; das Verzeichniss derselben, besonders das auf S. 11, 16—18, hat der Verfasser durchweg benutzt.

Zunächst ist zu bemerken, dass der Werth von $\sqrt{M}$ meist verschieden ausfallen wird, je nachdem man $M = x^2 + y$ oder $= x^2 - y$ nimmt; die Alten scheinen im Allgemeinen der Ansicht gewesen zu sein, dass die eine oder die andere Annahme auf die Genauigkeit des Resultates wenig Einfluss habe. Hierfür zunächst einige Beispiele aus den von Archimedes bestimmten Wurzeln, die auch, wären selbst seine Werthe für $\sqrt{3}$ nicht bekannt, zeigen dürften, dass er die Formel $\sqrt{c^2 - a^2} \sim c - \frac{a^2}{2c - a}$ benutzt hat.

Wird $349450 = 591^2 + 13^2$ gesetzt, so liegt nach der Formel $\sqrt{b^2 + a^2} \sim b + \frac{a^2}{2b}$ und $b + \frac{a^2}{2b + a}$ $\sqrt{349450}$ zwischen $591\frac{169}{1182}$ und $591\frac{169}{1195}$, beide Werthe stimmen eher mit $591\frac{1}{7}$ als mit $591\frac{1}{8}$, welchen Werth Archimedes hat. Nimmt man $349450 = 592^2 - 1014$, so ist, da $\sqrt{1014} \sim 32$ ist, $\sqrt{349450} \sim 592 - \frac{1014}{1184 - 32} = 591\frac{23}{192} \sim 591\frac{1}{8}$.

Wird $1373943\frac{33}{64} = 1173^2 - 1985\frac{31}{64} \sim 1173^2 - 1985\frac{1}{2}$ genommen, so erhält man, da $\sqrt{1985} \sim 45$ ist, $\sqrt{1373943\frac{33}{64}} \sim 1173 - \frac{3971}{2(2346 - 45)} = 1172\frac{631}{4602}$; der Bruch liegt zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$, den letzteren Werth hat Archimedes genommen.

$$\sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} = \sqrt{2340^2 - 3467\tfrac{15}{16}} \sim 2340 - \frac{3468}{4680 - 58}$$
$$= 2339\tfrac{577}{2311} \sim 2339\tfrac{1}{4}.$$

Durch Anwendung der Gleichung $\sqrt{b^2 + a} \sim b + \frac{a}{2b}$ erhält man

$$\sqrt{1018405} = \sqrt{1009^2 + 18^2} \sim 1009\tfrac{162}{1009} \sim 1000\tfrac{1}{6},$$
$$\sqrt{4069284} = \sqrt{2017^2 + 995} \sim 2017\tfrac{995}{4034} \sim 2017\tfrac{1}{4},$$
$$\sqrt{3380929} = \sqrt{1837^2 + 6360} \sim 1837\tfrac{3180}{1837} = 1838\tfrac{1343}{1837} \sim 1838\tfrac{9}{11}.$$

Die Formel $\sqrt{b^2 + a^2} \sim b + \frac{a^2}{2b + a}$ scheint angewendet bei

$$\sqrt{9082321} = \sqrt{3013^2 + 4152} \sim 3013 + \frac{4152}{6026 + 64};$$

der Bruch ist nahe $= \frac{15}{22}$, dafür ist $\frac{3}{4}$ gesetzt.

Bei $\sqrt{3}$ hat Archimedes zwei Werthe angegeben, also auch durch seine Methode der Berechnung gefunden, zwischen denen die Wurzel liegt. Setzt man in Gleichungen II) $c = \mu = 2$, $a = 1$, und berechnet die aufeinander folgenden Näherungswerthe, so erhält man folgende Reihe von Ungleichungen:

$$\tfrac{7}{4} > \sqrt{3} > \tfrac{5}{3},\quad \tfrac{26}{15} > \sqrt{3} > \tfrac{19}{11},\quad \tfrac{97}{56} > \sqrt{3} > \tfrac{71}{41},\quad \tfrac{362}{209} > \sqrt{3} > \tfrac{265}{153},$$
$$\tfrac{1351}{780} > \sqrt{3} > \tfrac{989}{571}.$$

In dieser Reihe treten neben dem vielfach gebrauchten $\frac{26}{15}$ auch die von **Archimedes** angegebenen Werthe und zwar als aufeinanderfolgende Glieder einer Entwickelung auf, so dass sich unmittelbar ergiebt, weswegen $\frac{265}{153}$ neben $\frac{1351}{780}$ benutzt ist.

Was die Wurzelwerthe des **Heron** betrifft, so rechnet der Verfasser zu den nach der Formel $\sqrt{b^2+a} \sim b+\frac{a}{2b}$ gefundenen die folgenden, wobei er bemerkt, dass über die Berechnung der ersten vier Beispiele wohl alle Neueren übereinstimmen.

$$\sqrt{1125} = \sqrt{33^2+6^2} \sim 33\tfrac{6}{11} = 33+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{22},$$
$$\sqrt{1081} = \sqrt{32^2+57} \sim 32\tfrac{57}{64} = 32+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{64},$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{7^2+1} \sim 7\tfrac{1}{14},$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{8^2+11} \sim 8\tfrac{11}{16} = 8+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16},$$
$$\sqrt{43+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{175} = \tfrac{1}{2}\sqrt{13^2+6} \sim \tfrac{1}{2}(13+\tfrac{3}{13}) = 6+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{26},$$
$$\sqrt{886-\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14175} = \tfrac{1}{4}\sqrt{119^2+14} \sim \tfrac{1}{4}(119+\tfrac{1}{17}) = 29+\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{68},$$
$$\sqrt{108} = \sqrt{10^2+8} \sim 10\tfrac{2}{5} = 10+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{15}.$$

Dass **Heron** bei dem von ihm angewendeten Verfahren die Wurzel zwischen bestimmten Grenzen, also $\sqrt{b^2+a^2}$ zwischen $b+\frac{a^2}{2b}$ und $b+\frac{a^2}{2b+a}$ liegend fand, dürfte sich aus folgenden Beispielen ergeben.

$\sqrt{54}=\sqrt{7^2+5}$ liegt, da $\sqrt{5}$ etwas grösser ist als 2, zwischen $7\frac{5}{14}$ und $7\frac{5}{16}$, **Heron** hat $7\frac{1}{3}$. $\sqrt{208}=\sqrt{14^2+12}$ liegt, wenn $\sqrt{12} \sim 4$ genommen wird, zwischen $14\frac{3}{7}$ und $14\frac{3}{8}$; zwischen beiden Werthen liegt $14\frac{5}{12} = 14+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$, welchen Werth **Heron** angiebt.

Die Formel $\sqrt{b^2+a^2} \sim b+\frac{a^2}{2b+a}$ dürfte benutzt sein in folgenden Fällen:

$$\sqrt{43+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}} = \sqrt{(\tfrac{13}{2})^2+\tfrac{58}{36}} \sim \tfrac{13}{2}+\frac{29:18}{13+\frac{4}{3}} = 6+\tfrac{1}{2}+\tfrac{29}{258} \sim 6+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{9},$$

$\sqrt{356+\frac{1}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{113^2+7^2} \sim \frac{1}{6}.(113+\frac{49}{233}) = 18+\frac{607}{699}$ (für den Bruch setzt **Heron** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{31}{36}$; es ist $\frac{607}{699}-\frac{31}{36}=\frac{61}{8388}$),

$\sqrt{615+\frac{15}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{39375} = \frac{1}{8}\sqrt{198^2+171} \sim \frac{1}{8}\left(198+\frac{171}{396+13}\right) = 24+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{171}{3272}$ (für den letzten Bruch setzt **Heron** $\frac{2}{51}+\frac{1}{68}=\frac{11}{204}=\frac{176}{3264}$).

Hierher gehört auch $\sqrt{2460+\frac{15}{64}}$; da $2460 = 4.615$, so hat **Heron** den vorhergehenden Wurzelwerth nur mit 2 multiplicirt und erhält $49+\frac{1}{2}+\frac{1}{17}+\frac{1}{51}+\frac{1}{34}$.

Nach der Formel $\sqrt{c^2-a} \sim c-\frac{a}{2c}$ lassen sich berechnen:

$$\sqrt{58+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{935}=\tfrac{1}{4}\sqrt{33^2-154}\sim\tfrac{1}{4}(33-\tfrac{7}{3})$$
$$=\tfrac{1}{4}(30+\tfrac{2}{3})=7+\tfrac{2}{3},$$

$$\sqrt{444+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{4000}=\tfrac{1}{3}\sqrt{64^2-96}\sim\tfrac{1}{3}(64-\tfrac{3}{4})$$
$$=\tfrac{1}{3}(63+\tfrac{1}{4})=21+\tfrac{1}{12},$$

$$\sqrt{3400}=\sqrt{60^2-200}\sim 60-\tfrac{5}{3}=58+\tfrac{1}{3},$$

$$\sqrt{63}=\sqrt{8^2-1}\sim 8-\tfrac{1}{16},$$

$$\sqrt{720}=\sqrt{27^2-3^2}\sim 27-\tfrac{1}{6}=26+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},$$

$\sqrt{356}=\sqrt{19^2-5}\sim 19-\frac{5}{38}=18+\frac{33}{38}$ (statt des Bruches setzt Heron $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ und ist $\frac{7}{8}-\frac{33}{38}=\frac{1}{152}$).

Auch $\sqrt{167+\frac{1}{169}}$, von Herrn Günther S. 111 erwähnt, dürfte hierher gehören. Es ist $=\sqrt{13^2-\frac{337}{169}}\sim 13-\frac{337}{4394}=12+\frac{4057}{4394}$; der von Heron benutzte Werth, der ja genau ist, lautet statt des Bruches $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{78}=\frac{12}{13}=\frac{4056}{4394}$.

In einigen Fällen, die sich sämmtlich in der Form $m.\sqrt{\mu^2-1}$ darstellen lassen, ist angewendet die Gleichung $\sqrt{c^2-a^2}\sim c.\frac{4\mu^2-3}{4\mu^2-1}$ $=c.\frac{4c^2-3a^2}{4c^2-a^2}$.

$$\sqrt{135}=\sqrt{12^2-3^2}\sim 12.\tfrac{61}{63}=\tfrac{244}{21}=11+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{21},$$
$$\sqrt{1575}=5.\sqrt{8^2-1}\sim 40.\tfrac{253}{255}=\tfrac{2024}{51}=39+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{51},$$
$$\sqrt{6300}=2.\sqrt{1575}\sim 79+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{34}+\tfrac{1}{102},$$
$$\sqrt{216}=\sqrt{15^2-3^2}\sim\tfrac{485}{33}=14+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{33},$$

$\sqrt{8+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}.\sqrt{135}$. Benutzt man den oben für $\sqrt{135}$ gefundenen Werth, so erhält man $\frac{61}{21}=2+\frac{76}{84}$; Heron setzt dafür $2+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=2+\frac{77}{84}$.

Herr Günther führt noch folgende Wurzeln an.

Es liegt $\sqrt{10}$ nach Gleich. I) zwischen $3\frac{1}{6}$ und $3\frac{1}{7}$, der letztere ist a. a. O. S. 55 angegeben. Für $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$ ergeben sich die Ungleichungen $\frac{11}{3}>\sqrt{13}>\frac{7}{2}$, $\frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{299}{83}$; $\frac{18}{5}$ ist S. 38 erwähnt.

Für $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}$ erhält man $\frac{9}{4}>\sqrt{5}>\frac{11}{5}$; $\frac{38}{17}<\sqrt{5}<\frac{47}{21}$. Auf S. 49, 99 wird $\frac{38}{17}$ angeführt, aber Herr Günther hat S. 125 nachgewiesen, dass Heron auch $\frac{11}{5}$ gekannt habe.

Um $\sqrt{2}$ zu finden, hat man in Gleich. I) $\mu=b=a=1$ zu setzen. Man erhält die Ungleichungen

$$\tfrac{3}{2}>\sqrt{2}>\tfrac{4}{3},\quad \tfrac{7}{5}<\sqrt{2}<\tfrac{10}{7},\quad \tfrac{17}{12}>\sqrt{2}>\tfrac{24}{17}.$$

Es ist $\frac{7}{5}$ der von den Alten vielfach benutzte Werth; aber auch $\frac{17}{12}$ wird S. 59 nachgewiesen. Aus $\sqrt{2}$ liegt zwischen $\frac{7}{5}$ und $\frac{17}{12}$ dürfte $\sqrt{5000}\sim 70\frac{3}{4}$ zu erklären sein. Es ist $\sqrt{5000}=50.\sqrt{2}$, die Wurzel

liegt mithin zwischen 70 und $70\frac{5}{8}$, als zwischenliegend ist $70\frac{3}{4}$ genommen. — Da bei $\sqrt{2}$ das $\triangle ABC$ wie $\triangle BDF$ gleichschenklig sind, so dürfte das vom Verfasser angegebene Verfahren der Berechnung hier zuerst angewendet worden sein, und liegt in der Schwierigkeit der Rechnung wohl kein Grund vor, weswegen der Werth $\frac{7}{5}$ nicht schon zu Platon's Zeiten sollte gefunden sein.

Die in der Heronischen Trigonometrie vorkommenden Wurzeln anlangend, so hat Herr Günther Recht mit der Annahme, Heron habe $\sqrt{3} \backsim \frac{26}{15}$ und $\backsim \frac{7}{4}$, $\sqrt{5} \backsim 2$ und $\backsim \frac{11}{5}$, $\sqrt{2} \backsim \frac{17}{12}$ genommen, aber auch $\sqrt{2} \backsim \frac{4}{3}$ dürfte sich beim regulären Elfeck nachweisen lassen. Im Uebrigen kann man $\sqrt{45} \backsim 6\frac{2}{3}$ erhalten aus $\sqrt{7^2-2^2} \backsim 7 - \frac{4}{14-2} = 6\frac{2}{3}$. Bei dem regulären Siebeneck erhält man $\frac{7}{12}\sqrt{7^2-3^2} \backsim \frac{7}{12}\left(7 - \frac{9}{14-3}\right) = \frac{119}{33}$; dafür setzt Heron $\frac{43}{12}$; es ist $\frac{119}{33} - \frac{43}{12} = \frac{1}{44}$. Beim Neuneck ist $\frac{9}{12}\sqrt{9^2-3^2} \backsim \frac{3}{4}(9-\frac{1}{2}) = \frac{51}{8}$. Beim Elfeck ist $\frac{11}{12}\sqrt{11^2-3^2} = \frac{11}{3}\sqrt{7} = \frac{11}{3}\sqrt{3^2-2}$ zu berechnen; wird $\sqrt{2} \backsim \frac{4}{3}$ gesetzt, so ist $\frac{11}{3}\sqrt{7} \backsim \frac{11}{3}.\left(3 - \frac{2}{6-\frac{4}{3}}\right) = \frac{66}{7}$, welchen Werth Heron hat.

Von einzelnen Seiten ist die Ansicht ausgesprochen worden, es hätten die Alten die Berechnung der Quadratwurzeln irgendwie auf Lösung der Gleichung $x^2 - a.y^2 = \pm 1$ zurückgeführt. Der Verfasser möchte doch das Umgekehrte für das Wahrscheinlichere halten. Ueberzeugte sich der Rechner durch die Probe von der Richtigkeit seiner Rechnung, so musste er z. B. bei $\sqrt{2}$ finden, dass die aufeinander folgenden Näherungswerthe $\frac{m}{p}$ [der Gl. I)] abwechselnd genügten zur Lösung der Gleichung $m^2 - 2p^2 = \pm 1$, während sie sich bei $\sqrt{3}$ als Wurzeln der Gleichung $m^2 - 3p^2 = +1$ zeigten. Werden nur die ersten Näherungswerthe beachtet, also $\sqrt{c} = \sqrt{b^2+a} \backsim \frac{2b^2+a}{2b} = \frac{m}{p}$ und $\sqrt{c} = \sqrt{b^2-a} \backsim \frac{2b^2-a}{2b} = \frac{m}{p}$, so ergab sich ohne Schwierigkeit, dass $\frac{m}{a}$, $\frac{p}{a}$ rationale Wurzeln der Gleichung $x^2 - cy^2 = +1$ waren, für $a=1$ also ganzzahlige.

Nachschrift. Der Verfasser der vorstehenden Mittheilung, die schon im Februar d. J. der Redaction eingesendet war, geht von der Ansicht aus, dass die alten Mathematiker Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln anfangs durch Abmessung der Seiten rechtwinkliger Dreiecke zu erhalten suchten. Wurde der einmal eingeschlagene Weg der Berechnung weiter verfolgt und nach und nach verbessert, so erhielt man eine Methode, nach welcher sich, wie die Mittheilung wohl ergiebt,

die überlieferten Wurzelwerthe des Archimedes wie Heron herleiten lassen. Man hat dabei nicht nöthig, die Annahme zu machen, es habe schon Archimedes die Lehre der Kettenbrüche und die Berechnung ihrer Näherungswerthe gekannt, oder derselbe habe den von Theon Smyrnaeus erwähnten Satz über Seiten- und Durchmesserzahlen gekannt, aus dem sich allerdings, wie Herr Heilermann im 26. und Herr Dr. Weissenborn im 28. Bande dieser Zeitschrift gezeigt haben, die Wurzelwerthe des Archimedes rasch und leicht ergeben.

Hat Gerbert, dessen ja Herr Heilermann wie Herr Weissenborn a. a. O. erwähnen, bei der Berechnung von $\sqrt{3}$ sich der in vorstehender Mittheilung angegebenen Methode bedient, aber nur die Werthe berechnet, die grösser als $\sqrt{3}$ sind, so fand er $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$; jeder folgende Werth ist genauer als der vorhergehende; zog er vom letzten $\frac{1}{56}$ ab, so erhielt er $\frac{96}{56}=\frac{12}{7}$ und konnte nun allerdings schreiben, er habe früher, wo er nur die beiden ersten Näherungswerthe berechnet, $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$ angenommen, nun aber, nachdem er die Rechnung genauer wiederholt, nämlich auch den dritten Näherungswerth berechnet, $\frac{12}{7}$ gefunden, und irrte er nur darin, dass er meinte, der genauere Werth $\frac{97}{56}$ bleibe auch noch der genauere, wenn er $\frac{1}{56}$ (allerdings kleiner als die Hälfte von $\frac{1}{25}$) davon abzog.

Krotoschin, im Juli 1883.

Recensionen.

P. DU BOIS-REYMOND, **Die allgemeine Functionentheorie.** Erster Theil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function. Tübingen 1882. X u. 292 S.

Die feineren Untersuchungen aus der Theorie der Functionen einer reellen Variabeln, welche in der neuesten Zeit ausgeführt wurden, machten es nothwendig, die Grundlagen der gesammten Analysis kritisch zu revidiren und eventuell strenger zu legen. Die irrationale Zahl trat dabei in den Vordergrund des Interesses. Diejenigen Mathematiker (Dedekind, Weierstrass, Heine, G. Cantor, Méray), die sich mit der begrifflichen Festsetzung der Irrationalzahlen beschäftigten, zogen es vor, diese Zahlen zu definiren als Gruppen oder Reihen von unendlich vielen rationalen Zahlen, die gesetzmässigerweise von einem (oder mehreren) Stellenzeigern abhängen und einer gewissen Bedingung genügen. Damit war man im Stande, eine vollständig einwurfsfreie, in sich consequente Analysis aufzubauen, die nirgends sich auf geometrische Betrachtungen zu stützen braucht.

Will man diese Analysis aber auf Gegenstände der äusseren Erfahrung anwenden, so kann man zwar zeigen, dass zwei Strecken, deren eine man durch die andere misst, eine Zahl bestimmen; dagegen stösst der Beweis des umgekehrten Satzes: dass eine irrationale Zahl zusammen mit einer Einheitsstrecke eine zweite Strecke bestimme, auf Schwierigkeiten, die mit dem Wesen der Stetigkeit der geraden Linie zusammenhängen. Die meisten Mathematiker waren und sind wohl geneigt, diesen Satz als ein Axiom oder geradezu als die Definition der Stetigkeit der Geraden anzusehen. Einen andern Standpunkt finden wir in dem vorliegenden Werke vertreten, dessen Verfasser untersucht, ob der fragliche Satz nicht eine nothwendige Folge unserer Anschauungen und Begriffe von den geometrischen Gebilden sei, oder mit anderen Worten, ob er nicht durch psychologische Betrachtungen bewiesen werden könne.

Die Erörterung dieser Frage geschieht, indem ein „Idealist“ und ein „Empirist“ ihre Ansichten wechselsweise vortragen und gegenseitig kritisiren. Der Erstere operirt mit einer genauen Geraden und mit vollkommen exacten Maassen, und der Angelpunkt seiner Erörterungen ist die Unterscheidung zwischen Unbegrenzt und Unendlich. Diese läuft

darauf hinaus, dass Etwas, was uns Menschen als unbegrenzt gross erscheint, objectiv, „an sich", unendlich gross ist, d. h. einer Messung gar nicht unterworfen werden kann. Daraus ergiebt sich dann, dass die Anzahl der Punkte, die man auf einer Strecke annehmen kann, unendlich ist, so dass die Distanz von je zwei benachbarten unendlich klein ist, dass ferner zwei Längen gleich sind, wenn ihr Unterschied unendlich klein ist.

Auf diese Ueberlegung sich stützend, kann der Idealist nun auch einen Beweis des oben angeführten umstrittenen Satzes geben. Der Empirist freilich erkennt die Bestimmung der Begriffe Unbegrenzt und Unendlich nicht an und bestreitet dem Idealisten das Recht, mit den nur in Gedanken existirenden genauen Geraden und genauen Messungen zu operiren. Er betrachtet eine Gerade als einen sehr dünnen Cylinder, einen Punkt als einen nach jeder Richtung sehr kleinen Körper, wobei noch die Dimensionen dieser Gebilde nach Bedürfniss verkleinert werden können. Weiter zeigt dann der Empirist, wie sich nach seiner Anschauung der Beweis führen lasse, dass jeder Zahl ein Punkt entspricht und wie man die ganze Analysis, insbesondere auch die Rechnung mit Differentialien der empiristischen Theorie entsprechend entwickeln könne.

Eine Möglichkeit, zwischen beiden Theorien zu entscheiden, zeigt sich nicht und folglich muss für die Darstellung eine Methode gewählt werden, die den Idealisten wie den Empiristen befriedigt. Diese ergiebt sich, wenn man empiristische Sprache mit idealistischen Beweisen verbindet.

Dies sind in Kürze die Grundgedanken der beiden ersten Capitel des vorliegenden Werkes. Referent ist der Ansicht (für die er aber natürlich keine Beweise beibringen kann), dass es gestattet ist, mit dem Idealisten Operationen auf der idealen, absolut genauen Geraden vorzunehmen und von absolut scharfen Maassen zu sprechen; dagegen scheint ihm die von Jenem getroffene und vom Empiristen bekämpfte Unterscheidung von Unbegrenzt und Unendlich nicht stichhaltig. Darin aber stimmt Ref. mit dem Verf. ganz überein, dass es unmöglich ist, den öfter erwähnten Satz vom psychologischen Standpunkte aus zu erweisen, weil bei solchen Versuchen stets die Stellung des Einzelnen den Fragen der Erkenntnisstheorie gegenüber in Betracht kommt, die immer von den zu Grunde gelegten Hypothesen abhängen wird — und ohne solche wird wohl schwerlich jemals eine Theorie der Erkenntniss entworfen werden können.

Für den Mathematiker dürfte es hiernach am bequemsten sein, die Analysis rein arithmetisch zu gestalten und, bei den Anwendungen auf die Geometrie, als Hypothese, die von der Erfahrung bestätigt wird, anzunehmen, dass jeder Zahl auch ein Punkt entspricht.

Von den drei weiteren Capiteln des Buches ist das dritte dem Argument, das vierte der Function und das fünfte dem Endverlauf der Functionen gewidmet.

Im dritten Capitel werden besonders die Zahlenmengen untersucht, die sich aus der Gesammtheit aller Zahlen herausheben lassen, wobei hauptsächlich die Eintheilung in pantachische (nach G. Cantor überall dichte) und apantachische Mengen, sowie der Begriff der Abzählbarkeit hervortreten. Im Capitel über die Function wird zunächst der Unterschied zwischen directen und indirecten Functionswerthen erörtert und dann daran die Lehre von der Stetigkeit geknüpft. Diese führt zu den Begriffen der oberen und unteren Grenze und dem Beweise der Existenz von Maximum und Minimum für eine stetige Function. Im fünften Capitel werden für eine Function $f(x)$ die Unbestimmtheitsgrenzen O und U und die Unbestimmtheitsenveloppen $O(x)$ und $U(x)$ construirt. Diese letzteren sind zwei Functionen, die nur abnehmen oder nur zunehmen und die unzählig oft $f(x)$ gleich werden. Die Grenzen O und U dagegen sind die Grenzen, bei welchen sich $O(x)$ und $U(x)$ bei wachsendem x nähern. Die Vergleichung von zwei Functionen endlich liefert die Grundzüge des Infinitärcalculs.

Die äussere Ausstattung des Buches nach Papier, Typen und correctem Drucke macht der Verlagshandlung (Laupp in Tübingen) alle Ehre.

Für die folgenden Theile sind die Lehre von den Reihen, von der Differentiirbarkeit und Integrirbarkeit der Functionen, vom bestimmten Integral u. s. w. in Aussicht genommen. Hoffentlich gelingt es dem Verf., diese Dinge rascher zu bewältigen, als es mit dem ersten Theile der Fall war, dessen Bearbeitung über vier Jahre in Anspruch nahm.

J. Lüroth.

Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Von Dr. Eugen Netto, a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E. Leipzig, B. G. Teubner. 1882.

Die französische Literatur besitzt seit geraumer Zeit in Serret's „Cours d'algèbre supérieur“ und insbesondere in Jordan's „Traité des substitutions et des équations algébriques“ umfassende Werke, welche die Verbindung der Substitutionentheorie mit der Gleichungstheorie behandeln, wie sie durch die Untersuchungen von Lagrange und Cauchy, von Gauss und Abel begründet, von Galois in ihrem wesentlichsten Punkte fixirt worden ist. In Deutschland hat ein derartiges Werk bisher gefehlt und es ist mit Freude zu begrüssen, wenn in dem vorliegenden Werke eine erste Einführung gegeben ist in jene gruppentheoretischen Untersuchungen, die sich gerade in der neueren Entwickelung der Gle'

ungstheorie als eines ihrer wichtigsten und wesentlichsten Instrumente erwiesen haben.

Als ein Vorläufer dieses Werkes darf ein Aufsatz über die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen betrachtet werden, den der gleiche Autor im 62. Bande von Grunert's Archiv für Mathematik und Physik veröffentlicht hat und in welchem eine kurze Zusammenstellung der hauptsächlichsten gruppentheoretischen Sätze, soweit sie sich auf ihre unmittelbare Anwendung in der Algebra beziehen, enthalten ist.

Die Ausdehnung des Gebietes der Gruppentheorie und Gleichungstheorie, seine Verbindung mit zahlentheoretischen und functionentheoretischen Fragen, wie sie in den neueren und neuesten Untersuchungen immer schärfer zur Geltung kommt, fordert für ein in den Gegenstand einführendes Lehrbuch eine Auswahl des Stoffes, deren Begrenzung sich nach dem individuellen Empfinden des Autors richtet. Der Verfasser des vorliegenden Werkes führt uns die Theorie der Substitutionen in der speciellen Form vor, wie sie unmittelbar dem Bedürfniss einer nachherigen rein algebraischen Anwendung entspricht. Aus gewissen Fragen der Gleichungstheorie heraus hat sich auch historisch genommen die Gruppentheorie als ein selbstständiges Gebiet entwickelt und es führt uns ohne Frage dieser historische Weg leicht und natürlich zur Erkenntniss von Ziel und Zweck gruppentheoretischer Fragen, die, einer solchen speciellen Formulirung entkleidet, bei einem ersten Eindringen in den Gegenstand vielleicht zu farblos erscheinen könnten.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte, deren erster unter steter Bezugnahme auf die Theorie der ganzen Functionen von n Grössen die Grundzüge der Substitutionentheorie entwickelt, während der zweite der Anwendung der Substitutionentheorie auf die algebraischen Gleichungen gewidmet ist.

Wir folgen der Darstellung ins Einzelne und wenden uns zunächst dem 1. Abschnitte: „Theorie der Substitutionen und der ganzen Functionen“ zu.

Die Capitel 1 und 2 zunächst sind der Entwickelung des Begriffes einer Substitution, in der Form der Operation der Vertauschung gewisser Elemente, und der Definition einer Gruppe solcher Operationen gewidmet. Ausgangspunkt bilden dabei die symmetrischen und alternirenden Functionen von n Elementen. Von hier ab gelangt man zur Einführung beliebiger rationaler Functionen von n Elementen und einer zugehörigen Gruppe von Vertauschungen derselben, welche diese Function ungeändert lassen.

Die Capitel 3, 5 und 6 beschäftigen sich sodann mit den Beziehungen der Functionen von n Elementen und ihren zugehörigen Gruppen. In Capitel 3 sind zunächst die verschiedenen Werthe einer rationalen Function von n Elementen, welche dieselbe bei allen Vertauschungen dieser

Elemente annimmt, in ihrem gegenseitigen Zusammenhange untersucht. Vom Standpunkte der Gruppentheorie fliessen hieraus die Sätze über ähnliche Substitutionen und ähnliche Gruppen. Aus ihnen folgt der Beweis des Cauchy-Sylow'schen Satzes, nach welchem aus der Theilbarkeit der Ordnung einer Gruppe G durch die Potenz p^α einer Primzahl p das Vorhandensein einer Untergruppe der Ordnung p^α folgt. In Capitel 2 war schon vorher eine Gruppe der Ordnung p^f aus n Elementen durch successiven Aufbau hergestellt, von der sich jetzt ergiebt, dass in ihren Untergruppen alle überhaupt möglichen Typen p von Gruppen der Ordnung p^α enthalten sind. Von algebraischer Seite entsteht hier die Frage nach den verschiedenen Werthen einer rationalen Function, wobei insbesondere die Discriminante solcher Functionen einer speciellen Untersuchung unterworfen wird und der grösste gemeinsame Theiler aller Discriminanten der zu einer „Gattung" gehörigen Functionen bestimmt wird.

Hier schiebt sich Capitel 4 ein mit der Entwickelung der für die Gleichungstheorie fundamentalen Begriffe der Primitivität, Transitivität und Zusammensetzung einer Gruppe. Die Definition der beiden ersten Eigenschaften schliesst sich an Cauchy (Exerc. d'Analyse III) unmittelbar an. Für die Zusammensetzung der Gruppe, deren Definition auf Galois zurückführt, sind die ausführlichen Entwickelungen des Jordan'schen Werkes (Ueber die Anzahl und Anordnung der Factoren der Composition u. s. w.), sowie eigene Untersuchungen des Verfassers herangezogen. Den Schluss des Capitels bilden die Untersuchungen über die Möglichkeit der isomorphen Beziehung zweier Gruppen aufeinander, wie sie auf Jordan und Capelli zurückführen.

Nun werden weiter in Capitel 5 die Cauchy'schen Sätze über die gegenseitige Stellung der zu einer Gruppe gehörigen Functionen abgeleitet. Sie liefern sofort die Eintheilung der Functionen in Gattungen und Untergattungen (in der von Kronecker eingeführten Terminologie), deren algebraische Beziehungen aus den im Capitel 4 gegebenen Eigenschaften der jedesmal zugehörigen Gruppen sich ergeben.

Das Capitel 6 behandelt, unter Heranziehung der in Capitel 4 abgeleiteten Sätze über Transitivität, Primitivität und Composition einer Gruppe, die Frage nach der Anzahl der Werthe ganzer Functionen von n Elementen.

Capitel 7 beschäftigt sich mit der Untersuchung einzelner specieller Gruppen. — Es sind dies zunächst die transitiven Gruppen, für welche Grad und Ordnung gleich ist, von welchen insbesondere diejenigen der Ordnung $p.q$ (p, q Primzahlen) vollständig aufgezählt werden. Sodann die sogenannten metacyklischen und halbmetacyklischen Gruppen, welche zu einer ersten analytischen Formulirung der Substitutionen einer Gruppe führt durch Angabe der Indexänderung der p Elemente $x_1 \dots x_z \dots x_p$ in der bekannten Form $|z \;\; \alpha z + \beta| \; mod p$. An diese Formulirung knüpft

eine kurze Betrachtung der allgemeinen Gruppe der *modp* genommen linearen gebrochenen Substitutionen der Determinante ± 1 an, welche zu den in der Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen wohlbekannten Gruppen des Grades $p+1$ und der Ordnung $p.(p^2-1)$ bez. $\frac{p.(p^2-1)}{2}$ führt. Endlich sind hier die Kronecker'schen Untersuchungen über Gruppen mit vertauschbaren Operationen angeschlossen.

Die in Capitel 7 an zwei Beispielen eingeführte analytische Darstellung der Substitutionen einer Gruppe wird in Cap. 8 in allgemeiner Form zu Grunde gelegt, der Hermite'sche Satz über die Bedingung einer solchen Darstellung abgeleitet und nun die von Cauchy eingeführten arithmetischen und geometrischen Substitutionen charakterisirt, deren letztere zu der sogenannten linearen Gruppe des Grades m^n führen.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Anwendung der Substitutionentheorie in der Theorie der algebraischen Gleichungen, beginnend (im Capitel 9) mit einer (kurzen) Behandlung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Hiernach folgt (Capitel 9, 10) eine erste Fixirung derjenigen Theile der Theorie der algebraischen Gleichungen, welcher mit gruppentheoretischen Untersuchungen in Beziehung steht. Dahin gehört zunächst die Präcisirung der Forderung der „Auflösung einer algebraischen Gleichung, der Reduction einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades auf eine specielle, wie sie in algebraischem Sinne durch die Adjunction gewisser Gattungen von Functionen von n Elementen sich ergiebt. Aus den als „bekannt" geltenden Functionen der Wurzeln einer Gleichung folgt die „Gruppe" derselben, deren Transitivität die Irreductibilität der Gleichung kennzeichnet. Unter den Gattungen der Functionen von n Elementen innerhalb eines gegebenen Rationalitätsbereiches (in der Kronecker'schen Terminologie) nimmt die Galois'sche Gattung eine besondere Stellung ein. Von ihr aus entwickelt sich das Princip der Resolventenbildung in der allgemeinsten Form, an welches speciell die Darlegung der Lagrange'schen Untersuchungen geschlossen ist.

Die Capitel 10—12 bringen die Theorie specieller Classen von Gleichungen. Voran stehen (im Cap. 10) die Kreistheilungsgleichungen. Cap. 11 behandelt die Abel'schen Gleichungen, dabei zunächst ausgehend von der Untersuchung irreductibler Gleichungen, bei denen eine Wurzel rationale Function einer andern ist. Das Studium dieser Gleichungen und insbesondere die Aufstellung gewisser Resolventen derselben führt zur Fixirung einer speciellen Classe solcher Gleichungen, für welche jene resolvirenden Gleichungen wieder Gleichungen derselben Classe sind*. Die irreductiblen Abel'schen Gleichungen er-

* Untersuchungen, die Herr Netto schon früher, Mathem. Annalen Bd. 20, veröffentlicht hat.

weisen sich als ein specieller Fall dieser Gleichungen. Es schliesst sich die Discussion der (reductiblen und irreductiblen) Abel'schen Gleichungen im Sinne von Abel, Kronecker und Galois an.

Capitel 12 bringt die Untersuchung der sogenannten Galois'schen Gleichungen, d. h. derjenigen irreductiblen Gleichungen, bei denen alle Wurzeln rationale Functionen von zweien unter ihnen sind, und als einfachstes Beispiel hierzu die binomische Gleichung $x^p - A = 0$. Hieran schliesst sich die Behandlung gewisser „Tripelgleichungen" — in der von Nöther eingeführten Terminologie. Es handelt sich dabei zunächst um die Aufstellung von Tripelsystemen bei Gleichungen der Grade $n = 6m + 1$ und $n = 6m + 3$. Die Gruppe einer derartigen Gleichung wird durch lineare Substitutionen zwischen den Indices p, q, r dreier zusammengeordneter Wurzeln charakterisirt und aus ihr gewisse Resolventen abgeleitet. Zum Schlusse wird der Fall eines Tripelsystems von neun Elementen behandelt, welcher eine vollständige algebraische Auflösung ermöglicht und welcher in unmittelbarer Beziehung zu der zuerst von Hesse behandelten Wendepunktsgleichung der Curven dritter Ordnung steht.

Die nun folgenden Capitel 13 – 15 kehren wieder zu den allgemeinen Fragen über die Auflösung algebraischer Gleichungen zurück.

In Capitel 13 ist zunächst die Stellung rein gruppentheoretischer Fragen zu algebraischen Problemen gekennzeichnet und dadurch die Grenze der Berechtigung gruppentheoretischer Schlüsse im Gebiete der algebraischen Untersuchungen markirt, ein Punkt, der in anderen Lehrbüchern nicht hervorgehoben ist. Nach dieser Fixirung gliedert sich der Abel'sche Beweis der Unauflösbarkeit allgemeiner algebraischer Gleichungen höherer Grade — dessen Darstellung nun wesentlich in der von Kronecker gegebenen präcisen Form folgt — in einen ersten Theil, der die Berechtigung gruppentheoretischer Schlüsse durch Einführung einer canonischen Form für die Lösung einer „durch Wurzelzeichen auflösbaren" Gleichung ergiebt; und in einen zweiten, gruppentheoretischen Theil, der die Herstellung einer gewissen Function der Wurzeln und damit die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichungen n^{ten} Grades ($n > 4$) als unmöglich erweist. Die specielle Form der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung lässt insbesondere irreductible auflösbare Gleichungen vom Primzahlgrade als Galois'sche Gleichungen charakterisiren.

Das Capitel 14 ist noch einmal der Gruppe einer Gleichung gewidmet, und hier ist es zunächst die Herleitung der Beziehungen zweier Gleichungen derselben Gruppe und dann die Gliederung der Auflösung der Gleichungen von zusammengesetzter Gruppe, welche im Anschluss an die früheren, parallel laufenden gruppentheoretischen Untersuchungen formulirt wird.

Capitel 15 endlich behandelt die durch Wurzelzeichen auflösbaren Gleichungen, kennzeichnet die Eigenschaften ihrer Gruppen und zeigt, dass die Lösung jeder solchen Gleichung auf die Auflösung von Gleichungen der Grade p^k führt (p Primzahl), welche nun näher, speciell für $k=1$ und 2 (an Arbeiten von C. Jordan anknüpfend) untersucht werden.

Wir haben geglaubt, im Vorstehenden auf den Inhalt des Werkes mit einiger Ausführlichkeit eingehen zu müssen, weil gerade die Anordnung und Auswahl des Stoffes dem Buche ein charakteristisches Gepräge verleiht. Es bietet eine systematisch sich entwickelnde Einführung in die Beziehungen der Gruppentheorie zur Gleichungstheorie im engeren Sinne. Functionentheoretische und geometrische Probleme, wie sie sich an gruppentheoretische Fragen anschliessen, mussten bei der vorliegenden Begrenzung des Stoffes ausser Betracht bleiben. Dagegen war der Verfasser bestrebt, eine Reihe rein algebraischer Untersuchungen eingehend zu verfolgen. Dass er hierbei insbesondere die Kronecker-schen Untersuchungen heranzuziehen gewusst hat und in mancher Darstellung dem Ideengange Kronecker's, wie er in einem persönlichen Verkehr mit ihm und in dessen Vorlesungen zur Geltung kommt, gefolgt ist, dafür wird man ihm besondern Dank wissen.

Leipzig. WALTHER DYCK.

Der Basisapparat des General Ibañez und die Aarberger Basismessung. Von Dr. C. KOPPE. Zürich, Druck von Orell, Füssli & Comp. 1881. 4°. 11 S.

Nach einer Einleitung wird das Mess-Geräth und Verfahren anschaulich geschildert, unterstützt von deutlichen Abbildungen. Es kommt eine einzige Messstange von 4 m Länge zur Verwendung. Sie ist stark aus Eisen gefertigt und hat alle halben Meter einen feinen Strich auf eingelegtem Platin. Diese Stange wird genügend oft neben die Basis, dieser parallel gelegt. Ihre Richtung wird mit Hilfe zweier Theodolithe und ihre Verschiebungen parallel zur Basis mit Hilfe zweier Mikroskope überwacht, welche unverrückbar mit den Theodolithen verbunden sind. Diese Thedolithe sind so eingerichtet, dass mit ihrem Fernrohr auch senkrecht abwärts gezielt werden und die Absehrichtung dann genau mit der Vertikalaxe des Instrumentes zusammenfallend gemacht werden kann. Sei der eine Theodolith so aufgestellt, dass das senkrecht abwärts gerichtete Absehen genau auf Basisanfang trifft; dann erhebt man das Fernrohr zur ungefähr wagerechten Lage und dreht um die unverrückbar über Basisanfang verbleibende Vertikalaxe, bis das Absehen in die Basisrichtung (entferntes Zeichen) kommt. 4 m weiter nach vorn wird ein ganz ähnlicher Theodolith aufgestellt und mikrometrisch so geschoben,

dass ein auf seiner Vertikalaxe befindliches Zeichen in die Absehrichtung des ersten Fernrohrs, also senkrecht über einen Punkt der Basis zu stehen kommt, dann wird auch das zweite Fernrohr in die Basisrichtung gedreht. Die Messstange ruht auf besonderen Stativen, welche mit jenen der Theodolithe keinerlei Berührung haben. An jedem der beiden Theodolithe ist ein senkrecht abwärts gerichtetes Mikroskop befestigt, dessen optische Axe eine unveränderliche und in allen Mikroskop-Theodolithen die gleiche Entfernung (20 cm) von der Vertikalaxe des Theodoliths, also von der Basis hat, und zwar auf einem Halbmesser, der rechtwinklig zur Absehrichtung des Theodolithfernrohrs, also auch zur Basisrichtung ist. Ein Doppelfaden im Gesichtsfelde des Mikroskops bestimmt durch seine Mitte eine rechtwinklig zur Basisrichtung durch die Vertikalaxe des Theodoliths gelegte Ebene. Die Messstange wird auf ihren Trägern so verschoben, dass ihr Nullstrich genau zwischen die Fäden des Mikroskops des ersten (über Basisanfang gestellten) Theodoliths trifft und dass die Fäden des vordern Mikroskops durch eine Verschiebung des vordern Mikroskop-Theodolithen parallel zur Basis optisch an den Endstrich der Messstange gebracht werden können. Nun wird der am Anfangspunkt stehende Theodolith mit Stativ um die doppelte Stangenlänge vorgerückt, mittels des unverrückt bleibenden vordern Mikroskoptheodoliths in die Basisrichtung gebracht, wie beschrieben. Die Messstange wird alsdann aufgehoben und auf vorbereitete Stative so gelegt, dass ihr Nullstrich optisch zwischen die Fäden des stehen gebliebenen Mikroskoptheodoliths fällt, also dahin, wo eben noch der Endstrich (4 m-Strich) lag. So wird fortgefahren. Es findet also ein optisches Ablothen statt, welches genauer ist, als das mit einem materiellen Senkel; es wird vermieden das Aneinanderstossen von Messlatten und die dabei eintretenden Verschiebungen, welche selbst dann nicht ganz fehlen, wenn die Stangen nicht zur Berührung gebracht werden und der Zwischenraum mittelst eines leichten Reichenbach'schen Messkeiles gemessen wird.

Es ist erforderlich, die Mikroskoptheodolithe in Mikrometerbewegung rechtwinklig und parallel zur Basis auf ihren Stativen verschieben zu können, um ihre Vertikalaxen genau auf die Basis und den Doppelfaden des Mikroskops genau an den vordern Endstrich der liegenden Messlatte (auch das senkrecht abwärts gerichtete Absehen des Fernrohrs über Basisanfang, eventuell Ruhepunkte, bei denen die Messung unterbrochen worden war) einstellen zu können. Auch die Messstange selbst muss dieselben zwei Bewegungen erfahren können, um sie parallel zur Basisrichtung und ihren Nullstrich optisch zwischen die Fäden des stehen gebliebenen Mikroskopes schieben zu können. Dafür sind an den Stativen der Mikroskop-Theodolithe, wie an den Unterlagen der Messstange zwei zu einander rechtwinklige Schlitten angebracht, der eine muss die Bewegung parallel, der andere rechtwinklig zur Basisrichtung leiten. In

der besprochenen Beschreibung (ebenso in einer andern, von Westphal in Zeitschrift für Instrumentenkunde I [1881], S. 173) vermisse ich die Angabe, wie die Schlitten genau in diese Richtungen gestellt werden; der Leser muss sich das ergänzen.

Es wird keine Zeit damit verloren (und Abkürzung der Messungsdauer ist von wesentlichem Vortheil), die Messlatte genau wagerecht zu legen; ihre zufällige Neigung J gegen den Horizont wird mittelst Libelle mit einer Genauigkeit von $10''$ gemessen. Zur Reduction der schiefen auf wagerechte Länge wird $\frac{1}{2} Sin^2 J$ mal Stablänge abgezogen. Das ist die übliche, wenn gleich nicht ganz genaue Art der Verbesserung. $Cos\, J$ ist gleich $1-2\, Sin^2 \frac{J}{2}$, nicht $1-\frac{1}{2} Sin^2 J$. Die bei der Aarberger Messung vorgekommene grösste Neigung J betrug nur $1{,}5^0$. Da ist es wohl statthaft, die Näherungsformel zu gebrauchen (Fischer, Lehrbuch der höheren Geodäsie, lässt [S. 89] die Vertauschung der zwei Ausdrücke zu, so lange die Neigung J nicht weit über 2^0 geht). Nach dem Princip des Basisapparats von Ibañez kann die Neigung aber auch grösser werden und deshalb empfiehlt es sich, die Verbesserung genau zu machen, um so mehr, da die Berechnung der Tafel für $2\, Sin^2 \frac{J}{2}$ nicht mühsamer ist, als jene für $\frac{1}{2} Sin^2 J$. Eine andere kleine Ungenauigkeit liegt darin, dass für die Correctur wegen schiefer Lage die Messstangenlänge immer bei Normaltemperatur, nicht bei der zufällig während der Messung stattgehabten genommen wird. Das ist ganz entschieden für die Rechnung bequemer, und da der Fehler äusserst klein, so ist diese Ungenauigkeit nicht zu tadeln.

Bei dem gegenwärtigen Stande der Basismessungen ist die Frage, wie die Temperatur der Messstangen gemessen werden soll, von hervorragender Wichtigkeit. Ibañez fand es vortheilhafter, die Metallthermometer, deren einer Bestandtheil von der Messstange selbst gebildet wird, aufzugeben und Quecksilberthermometer (4), möglichst gut in die Stange gebettet, anzuwenden. Es ist schwer zu sagen, ob das ein Fortschritt oder ein Rückschritt ist. Die neuesten Erfahrungen gelegentlich der Messung der Göttinger Basis mit Bessel'schen Messstangen und Metallthermometer (Schreiber in Zeitschr. f. Vermessungswesen XI [1882], 1) lassen die Metallthermometer als ungenügend erkennen; ältere Messungen und Vergleichungen waren zu Ungunsten der Quecksilberthermometer und auch die Aarberger Messung giebt hinsichtlich ihrer zu Bedenken Anlass, wenn auch diesen in der vorliegenden Schrift entgegengetreten wird. Man wird bei der Unsicherheit, welche beide Arten von Thermometern belassen, sich wohl entschliessen müssen, die Messstange während ihres Gebrauchs bei der Basismessung, gerade so, wie man bei ihrer Vergleichung mit dem Muttermaass thut, in einem Bade

aus Wasser, Petroleum oder dergleichen zu verwenden (vergl. Haupt in Zeitschrift f. Instrumentenkunde II [1882], 241). Zu bemerken ist noch, dass die Stange des Ibañez-Apparats nicht, wie die Bessel'sche, in einem gegen schnelleren Temperaturwechsel schützenden Holzkasten liegt, sondern frei verwendet wird. Dafür wird im Schatten von Zelten gemessen, was freilich bedeutende Schwankungen in der Temperatur nicht hindert (mindestens von 15,5° auf 28° nach der Mittheilung).

Die Schrift schildert noch einen Anlegemassstab, welcher den in der Basislänge oder der Länge der Sektionen verbleibenden Rest, Bruchtheil eines halben Meters, zu messen gestattet, und eine Vorrichtung, den Ruhepunkt oder den Endpunkt einer Section festzulegen, nämlich auf dem Boden einen Punkt senkrecht unter der Vertikalaxe des Mikroskop-Theodoliths, dessen Mikroskopfaden auf das Ende der letztgelegten Messstange zeigt, zu bezeichnen. Von diesem Fixpunkte an ist andern Tags die Messung, wie beim Beginn vom Basisanfang an, fortzuführen.

Den Schluss der Schrift bilden Erörterungen über den wahrscheinlichen Fehler in der Aarberger Messung und Angaben über den Verlauf des Messgeschäfts. Der Leser wird dadurch in den Stand gesetzt, neben den Verbesserungen in den Einzelheiten, welchen der Ibañez-Apparat gegen den hundert Jahre älteren von Hassler zeigt, mit welchem er grundsätzlich übereinkommt, auch die vortreffliche Anordnung des ganzen Messgeschäfts anzuerkennen. Eine ausgezeichnete Gliederung und Arbeitstheilung findet statt. Man kann nichts Beweisenderes zum Lobe beibringen, als dass das schweizer Personal, welches keine vorgängige Uebung besass, nachdem es die geschulten Spanier die Messung hin und zurück hatte machen sehen, nur für einen kurzen Theil der Basis die Leitung der Spanier benutzte und den Haupttheil allein mass, mit einem Ergebnisse, das so wenig von den spanischen Messungen abwich, als diese untereinander. Die schweizer Messung änderte nichts am mittlern Fehler, wie aus den zwei von den geübten Spaniern gefundenen Werthen folgt.

Bohn.

Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen mit besonderer Berücksichtigung der stereographischen, Bonne'schen und Mercatorprojection. Für höhere Lehranstalten, sowie zum Selbstunterrichte herausgegeben von Oskar Möllinger, Ingenieur, früher Lehrer am mathematischen Institut in Fluntern-Zürich. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren. Zürich, Cäsar Schmidt. 1882. 8°. VIII u. 142 S.

Durch das Buch soll der Leser möglichst rasch mit den Verfahren bekannt gemacht werden, nach welchen zweckmässigst die Netze für Erd- und Himmelskarten zu entwerfen sind. Der Verfasser beschränkt

sich, wie schon der Titel angiebt, auf die wichtigsten Kartenprojectionen, erwähnt andere gar nicht oder nur kurz. Die Behandlung der Aufgaben ist eine recht gute und erregt den Wunsch, es möchten auch andere Abbildungsweisen in ähnlich lehrreicher Art ihre Bearbeitung finden. So dürften von den perspectivischen Projectionen die orthographische (Augenpunkt in unendlicher Entfernung) und die centrale (Auge im Kugelmittelpunkt) einer Erwähnung wohl werth erachtet werden.

Während in manchen derartigen Lehrbüchern die Beschreibung und Ausführung des Zeichnengeschäfts den ganz vorwiegenden Theil bildet oder gar allein steht, wird hier die rechnende Bestimmung der Lage der Netzpunkte bevorzugt, wodurch, mit grösster Schärfe, Uebersichtlichkeit und Leichtverständlichkeit erzielt werden. Die Zeichnungsverfahren sind darüber nicht vernachlässigt, die diesbezüglichen Vorschriften sind, genügend ausführlich, mitgetheilt und begründet, ja es wird sogar in der Einleitung noch die willkommene Beschreibung und Abbildung einer kleinen, von Prof. Otto Möllinger erfundenen Geräthschaft zum Zeichnen von Kreisbogen, des „Peripheriezirkels“, gegeben.

Die vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten sind jene, die an Mittelschulen erworben werden können; nur im Abschnitte über Mercatorprojection wird etwas Integralrechnung angewendet. Die vorkommenden mathematischen Entwickelungen sind gar nicht immer die elegantesten, wie es, wenn an der Voraussetzung verhältnissmässig geringer mathematischer Kenntnisse festgehalten werden soll, nicht wohl anders möglich sein dürfte; doch ist bei aller Leichtverständlichkeit nicht etwa überflüssige und lästige Weitläufigkeit zu rügen. Des Verfassers Darstellung kommt am nächsten überein mit jener in Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde“, und es ist zu verwundern, dass unter den im Vorwort aufgezählten Werken über Kartenprojectionen nicht auch die gedrängte und elegante Arbeit Bauernfeind's gefunden wird.

Der erste Abschnitt ist der stereographischen Projectionslehre gewidmet; er ist der ausführlichste und wohl gelungen. Nach Vorführung der Grundlagen werden die allgemeinen Formeln abgeleitet, auf welchen die Einrichtung stereographischer Kartennetze beruht, dann werden im Einzelnen besprochen und bildlich zur Anschauung gebracht die Projection auf einen Meridian (Planiglobien, Sternkarten), jene auf den Aequator (Polkarten), dann eingehender jene auf den Horizont eines beliebigen Ortes mit Anweisung, die betreffenden Abmessungen zu berechnen, und Angabe der erforderlichen Zahlenwerthe für Herstellung des Netzes einer Karte des mittleren Europa. Im Einzelnen wird noch besprochen die stereographische Projection eines gegebenen Kugelabschnittes auf eine dem Grenzkreise des Abschnittes parallele Ebene, und die wünschenswerthen Zahlenangaben für eine Karte von Europa (Horizont in 48° Breite) und für eine solche von Deutschland mitgetheilt. Tafel I (S. 60)

giebt im Maassstabe 1:40000000 das stereographische Kartennetz von Europa, wobei noch für den Vergleich das Netz nach Bonne'scher Projection eingezeichnet ist.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich, kürzer, mit den cylindrischen Projectionen, hebt deren Bedeutung für die Zwecke der Schifffahrer besonders hervor und bringt zweckmässig und genügend die zeichnende Lösung der auf den Lauf eines Schiffes bezüglichen Aufgaben. Immerhin würden einige weitere Bemerkungen über Loxodrome recht erwünscht sein. Bei der Mercatorprojection findet die Erdabplattung Berücksichtigung.

Im dritten Abschnitte werden die Kegelprojectionen besprochen, jene von Delisle und von Flamsteed nur kurz, hingegen ausführlich die von Bonne, letztere auch mit Berücksichtigung der Erdabplattung. Das Bonne'sche Netz von Europa (für Kugelgestalt) wird um je 10° in Meridianen und Parallelen fortschreitend berechnet.

Der interessanteste und selbstständige Abschnitt ist der vierte. Er bringt eine Vergleichung der stereographischen und der Bonne'schen Projectionen und führt die Rechnungen durch für die Kartennetze von Europa, von Deutschland und von der Schweiz. Für die europäische Karte wird insbesondere das Viereck Lissabon — Constantinopel — Petersburg, Reikiavik als Beispiel durchgerechnet und die betreffenden sechs Entfernungen auf der Kugel, in der Bonne'schen und in der stereographischen Projection miteinander verglichen. Das Viereck ist so gewählt, dass zwei Orte (Constantinopel und Petersburg) in der Nähe des Hauptmeridians, die zwei anderen an der Grenze der Karte liegen. Nur hinsichtlich der Entfernung Reikiavik — Lissabon zeigt sich ein wesentlicher Vortheil der Bonne'schen Methode; die anderen Entfernungen weichen, nach beiden Methoden der Projection berechnet, von den sphärischen Distanzen so ziemlich gleichviel ab. So wenig auffallend der Unterschied ist, glaubt der Verfasser, für eine Karte von ganz Europa der Bonne'schen Methode immerhin gegen die stereographische den entschiedenen Vorzug einräumen zu sollen (S. 109). Für die Karte des Kugelabschnittes, der mit einem Halbmesser von 8° um den Ort in 50° nördl. Breite und 30° östl. Länge (Ferro) beschrieben ist, werden die Vergleichungen für Paris, Turin, Triest, Berlin und zwei Punkte A und C, die in Bezug auf den Hauptmeridian symmetrisch zu Paris und Turin liegen, durchgerechnet; für die Schweizerkarte sind Genf, Zürich, Basel, Airolo gewählt. Das Hauptergebniss der Vergleichungen ist, „dass für Karten, welche kleinere Kugelabschnitte, wie Deutschland, Frankreich, die Schweiz u. s. w. darstellen sollen, die stereographische Projectionsmethode an der Stelle der Bonne'schen Methode zur Anwendung kommen kann, indem die aus einer solchen Karte entnommenen Distanzen nicht mit wesentlich grösseren Fehlern behaftet sind, als dies bei der

Bonne'schen Methode der Fall ist, da sich ... nach der stereographischen Projectionsmethode sowohl Parallelkreise, als Meridiane wieder als Kreise projiciren, die aufeinander senkrecht stehen, während bei der Bonne'schen Methode nur die Parallelkreise als Kreise gezogen werden, die Meridiane aber Curven sind" (schief die Parallelen schneidend), „deren genaue Construction umständlich ist, so wird man es nach meinem Dafürhalten in Zukunft vorziehen, bei der Projection kleinerer Kugelabschnitte die stereographische Projection in Anwendung zu bringen." (S. 117.)

Die übrigen Abschnitte: 5. von den äquivalenten Abbildungen, 6. von den conformen oder orthomorphen Abbildungen und 7. Construction der Netze für Erd- und Himmelsgloben, sind mehr als Anhang behandelt. Hinsichtlich des 5. und 6. Capitels wird der Wunsch nach grösserer Ausführlichkeit recht lebhaft*, doch sind sie auch in ihrer Kürze recht dankenswerth.

Durchgehends ist für das ganze Buch Zweckmässigkeit der Auswahl und gute Darstellung zu rühmen. Das Werkchen kann nicht nur Solchen sehr empfohlen werden, welche eine erste Belehrung über den Gegenstand suchen, sondern wird auch von Jenen willkommen geheissen werden, die bereits Studien auf diesem Gebiete gemacht haben.

Gelegentlich einer neuen Auflage, die wohl zu erwarten, jedenfalls zu wünschen ist, dürften einige Verbesserungen schon gemacht werden. Die Zeichnungen stehen nicht auf der Höhe des Textes, die Curven sind oft von schwankender Hand gezogen, und möchte überhaupt die Darstellung weisser Linien auf dunklem Grunde (die technisch sogar bequemer ist) empfehlenswerther sein. Die erst in den „Berichtigungen" am Schlusse gegebene Figur, stereographische Horizontalprojection der Halbkugel, ist ungenau gezeichnet, wie hinsichtlich der Meridiane sofort auffällt. Anlangend die für mathematische Bücher besonders wünschenswerthe Genauigkeit des Ausdruckes, so fordert die Zulassung von „Kugelhemisphäre" (S. 71 u. a. a. O.) viel Nachsicht und selbst der nachsichtigste Recensent wird „ganze Kugelhemisphäre" (S. 16) nicht mehr formal unbeanstandet lassen können.

Bohn.

Kritik der drei Kepler'schen Gesetze. Von A. Heindorf. 26 S.

Nach dem Verfasser hat die Gravitation keinen Sinn und die Ableitung der Kepler'schen Gesetze aus ihr gelingt nur durch Missbrauch

* Solche findet man u. A. in dem kürzlich erschienenen sehr empfehlenswerthen Buche: „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik", von Dr. G. Holzmüller. Leipzig, Teubner. 1882.

der Differentialrechnung, wie er an dem Lehrbuch von Antenheimer nachzuweisen sucht. Etwas Anderes ist nicht an die Stelle gesetzt. Es ist nach ihm „mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, den Deductionen der Differentialrechnung mit dem Verstande zu folgen". Die Wissenschaft hat mit solchen Angriffen nichts zu thun.

P. Zech.

Das Zodiakallicht, von Dr. Suchsland. Stolp, zum Programm des Gymnasiums zu Stolp. 12 S.

Das Zodiakallicht soll durch Lichtstrahlen entstehen, welche die Marsatmosphäre treffen und dort „total" reflectirt werden. Wie diese Reflexion zu Stande kommt, ist nicht gesagt. Es wird nur auf den Satz von den Brennpunkten der Ellipse hingewiesen, wornach die reflectirten Strahlen durch den zweiten Brennpunkt der Marsbahn gehen sollen. Da ihm alle astronomischen Hilfsmittel fehlen, überlässt es der Verfasser berufeneren Händen, seine Vermuthungen zu bestätigen.

P. Zech.

Die Flächen kleinsten Widerstands und grössten Antriebs, von Freiherrn von Lamezan. 56 S.

Das Werk enthält Studien über die Curve des kleinsten Widerstands von Newton, die zugleich als Curve grössten Antriebs erkannt wird. Der Verfasser bedient sich dabei zum Theil einer seiner individuellen Anschauung entsprechenden Ausdrucksweise, welche das Verständniss ziemlich erschwert. Auch die Sätze der Variationsrechnung werden mit Rücksicht auf das vorliegende Problem in besonderer Weise vorgetragen. Es wird dann die Newton'sche Curve für die Construction des Vordertheils und Hintertheils der Schiffe verwerthet, ihre Anwendung bei der Begrenzung der Pulverkammer in einem Geschütz als vortheilhaft nachgewiesen und dieselbe als besttragende Curve dargestellt. Endlich wird noch die Cycloide als diejenige Curve nachgewiesen, welche für die Zuglinie der Feuerrohre am passendsten sei.

P. Zech.

Ebbe und Fluth, von C. Schwarz. 87 S.

Der Verfasser glaubt, die Erklärung der Ebbe und Fluth aus der Anziehung von Sonne und Mond stimme nicht mit den beobachteten Erscheinungen; er will sie deswegen aus der dreifachen Bewegung der Erde: Axendrehung, Bewegung um die Sonne und um den mit dem Monde gemeinschaftlichen Schwerpunkt, ableiten. Infolge der Axendrehung bewegen sich die äusseren Theile der Erde, die weiter von der Sonne abstehenden rascher als die inneren. So entsteht auf der einen Seite der Erde eine Tendenz der Materie zur Verdichtung, auf

der andern zur Verdünnung, und dies zeigt sich zunächst in den Barometerschwankungen. Der Verfasser sucht die bekannten Schwankungen mit seiner Theorie in Einklang zu bringen: dass die Sonnenwärme von Einfluss ist, wird nicht berücksichtigt. In ähnlicher Weise soll nun auch das Wasser sich verhalten wie die Luft: der wesentliche Unterschied von Wasser und Luft in Beziehung auf Ausdehnung und Zusammenziehung wird ignorirt. Es wird dann die Reaction der starren Masse der Erde gegen die Fluthbewegung betrachtet und daraus die Präcession abzuleiten gesucht. Nur bei der Fluth der Atmosphäre werden Zahlen berechnet, sonst im Allgemeinen von der Möglichkeit der neuen Erklärung gesprochen.

P. Zech.

Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung, von Dr. Dronke. 96 S.

Eine Zusammenstellung eines Theils des Nachlasses des Prof. Beer in Bonn, wie früher die Elektrostatik, Magnetismus und Elektrodynamik von Plücker, Elasticität und Capillarität von Giesen besorgt wurde. Der Wärmestrahlung ist ein kleiner Theil des Ganzen zugewiesen, die Wärmeleitung wird ausführlicher behandelt. Die Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung der Wärmebewegung soll sich durch ihre Anschaulichkeit auszeichnen; es ist aber schwer einzusehen, wie eine Umformung mit verschiedenen partiellen Ableitungen zur Anschaulichkeit führen soll. Die einfache Ableitung Lamé's ist, wie der Verfasser sagt, leichter und, wie wir hinzusetzen, gewiss auch dem Anfäger verständlicher, und es handelt sich ja um eine „Einleitung". Das Studium der nachgelassenen Werke von Beer hat überhaupt dem Unterzeichneten den Eindruck des Sprungweisen gemacht, sehr häufig wird eine Formel angeführt, die nicht abgeleitet ist, die man „leicht" findet, wie unser Verfasser mit Vorliebe an verschiedenen Stellen sagt, die aber dem Anfänger zum Theil unübersteigliche Schwierigkeit macht. Auszüge aus grösseren Abhandlungen, wie sie Beer gemacht hat, müssen an der Hand dieser Abhandlungen vervollständigt werden, wenn sie eine „wirkliche" Einleitung für Anfänger geben sollen. Sonst ist das Studium der Originalabhandlungen vorzuziehen. Nachdem allgemeine Bemerkungen über die Integration der Differentialgleichungen gemacht sind, kommt derjenige Theil, welcher für den Anfänger am nützlichsten sein wird, die Betrachtung der Wärmebewegung in Ebenen, Kegeln, Cylindern. Zum Schlusse wird die Differentialgleichung der Wärmeleitung in Krystallen abgeleitet, die sich von der der homogenen Körper nur dadurch unterscheidet, dass von den zweiten Ableitungen der Temperatur nach den Coordinaten jede ihren besondern Factor hat; die Werthe dieser Factoren für einzelne Krystalle werden nach den Beobachtungen von Sénarmont und Jeannettaz angeführt.

P. Zech.

Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle, von Rector Dr. Böklen. Zum Programm der Realanstalt Reutlingen. 50 S. mit 4 Figurentafeln.

Es ist in diesem Programm Alles aufgeführt, was bisher über die Wellenfläche publicirt worden ist. Insbesondere ist am Schlusse der Titel aller von Fresnel an publicirten Abhandlungen nebst Hauptinhalt vollständig gegeben. In knappem, für Denjenigen, der mit dem Gegenstand nicht vertraut ist, wohl allzu kurz zugemessenem Ausdruck werden die Formeln für die Wellenfläche, die Entstehung derselben, der Begriff der optischen Axen gegeben, dann die Wellengeschwindigkeitsfläche in gleicher Art behandelt. Darauf folgt die Theorie der doppelten Brechung nach Fresnel und die sich anschliessenden Arbeiten von Plücker, Hamilton und Biot. Der letzte Theil des Programms ist den neuesten Forschungen von Walton, Niven und Anderen gewidmet, und insbesondere den Abhandlungen über die Krümmungslinien der Wellenfläche. Die Wellenfläche ist eine so interessante Fläche nach allen Richtungen hin, dass die hier gegebene Darstellung der gesammten Forschungen über sie von grossem Verdienste ist. Zu wünschen wäre nur eine erweiterte Form des Gegebenen zu behaglicherem Studium.

P. Zech.

Lehrgang der populären Astronomie und mathematischen Geographie, von Kaspar Schelle. 2. Aufl. 112 S.

Ein Lehrbuch für Gymnasien, welches den gesammten Stoff kurz darstellt, in einem Umfange, zu dem die spärlich zugemessene Zeit wohl kaum ausreichen wird. Es werden die scheinbaren Bewegungen, die verschiedenen Arten sphärischer Coordinaten, die Messinstrumente und die Geschichte der Astronomie im ersten Abschnitte behandelt. Im zweiten Abschnitte wird die Axendrehung der Erde, die Bestimmung der Zeit und die Carthographie besprochen, im dritten das Sonnensystem mit seinen wahren Bewegungen, im vierten die Zeitrechnung. In den beigegebenen Uebungsaufgaben werden die Formeln für das sphärische Dreieck vorausgesetzt. Das Buch ist nur für die Hand des Lehrers, der Satz für Satz seine Erläuterungen zu geben haben wird.

P. Zech.

Lehrbuch der Physik, von Dr. P. Münch. 7. Aufl. 428 S.

Im 24. Jahrgang dieser Zeitschrift wurde die 5. Auflage kurz besprochen. Was dort ausgesetzt wurde, steht auch noch in der neuen Auflage. Es scheint keine Aenderung vorgegangen zu sein, als ein besserer Druck; der Erfinder des Typendrucktelegraphen wird immer noch Hugkes geschrieben, der Morse-Telegraph wird immer noch mit falscher Leitungsverbindung dargestellt, das Metersystem als nur „modificirt“ in Deutschland eingeführt erwähnt u. s. w.

P. Zech.

Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme, von Dr. Wilhelm Fiedler. Mit 16 lithographirten Tafeln. Leipzig, bei Teubner. 1882.

In der Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen" im I. Bande des Crelle'schen Journals versprach Steiner, in einem Bande von etwa 25—30 Bogen seine Untersuchungen über das Schneiden (mit Einschluss der Berührung) der Kreise in der Ebene, das Schneiden der Kugeln im Raume und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche zu veröffentlichen. Bekanntlich ist dies nicht geschehen. Als Endziel dieser Untersuchungen ist wohl die Auflösung der Aufgabe zu betrachten: Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln unter gegebenen reellen oder imaginären Winkeln schneidet. Die Auflösung dieser Aufgabe findet sich in der synthetischen Geometrie der Kugeln von Reye, welche mit der vorliegenden Cyklographie, wenn auch auf verschiedenem Wege, demselben Ziele zustrebt, die Eigenschaften der Potenzlinien, Potenzebenen, Aehnlichkeitspunkte der Kreise und Kugeln darzustellen. Neuerdings ist von Herrn Professor Badorff in einem Programm des Gymnasiums von Baden-Baden eine inhaltsvolle Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlicht worden. Das Reye'sche Buch benutzt als Beweisprincip die Kreisverwandtschaft oder das Princip der reciproken Radien; Fiedler's Cyklographie sucht die Kreis- und Kugeleigenschaften mittelst der Methoden der darstellenden Geometrie abzuleiten. Jeder Punkt P des Raumes wird in einer Ebene η als Kreis abgebildet; man findet seinen Mittelpunkt Q als Fusspunkt des von P auf η gefällten Perpendikels und seinen Radius gleich PQ. Dieser Kreis $Q^{(2)}$ ist der Bildkreis von P. — Die Bildkreise aller Punkte einer Geraden a bilden eine lineare Kreisreihe, deren sämmtliche Kreise den Schnittpunkt A der Geraden a und der Ebene η zum Aehnlichkeitspunkte haben; die Bildkreise aller Punkte einer Ebene ε bilden ein planares System, welches also die Eigenschaft hat, dass der Aehnlichkeitspunkt eines seiner Kreispaare stets auf der Schnittlinie e der Ebenen η und ε liegt, dessen sämmtliche Kreise diese Gerade also unter demselben reellen oder imaginären Winkel schneiden. Zwei planare Systeme durchdringen sich in einer linearen Kreisreihe; ein planares System und eine lineare Kreisreihe haben einen gemeinschaftlichen Kreis. Hierin liegt die Quelle zahlreicher Aufgaben, von denen die wichtigeren besprochen werden. Zwei lineare Kreisreihen gehören einem planaren System an, wenn sie einen Kreis gemein haben. Die Geraden, als deren Bilder die Kreisreihen erscheinen, müssen in diesem Falle einen Schnittpunkt haben, dessen Bildkreis der gemeinschaftliche Kreis ist. Haben von drei linearen Kreisreihen keine zwei einen gemeinschaftlichen Kreis, so sind die drei Geraden abc, als deren Bilder sie zu betrachten sind, windschief zu einander. Alle Transver-

salen derselben erfüllen eine Regelschaar und diese wird von einer zweiten Regelschaar geschnitten. Beide erfüllen eine Regelfläche. Die Gesammtheit der Bildkreise ihrer Punkte ordnet sich in zweifacher Art in lineare Kreisreihen; man fasst sie als ein System zweiten Grades von linearen Kreisreihen zusammen.

Wenn man von einem Punkte P einer gleichseitigen Hyperbel die Senkrechte PQ auf die Nebenaxe fällt, so ist dieselbe so gross, wie die Entfernung zwischen Q und den Scheiteln. Der Kreis $Q^{(2)}$, welcher um Q mit QP beschrieben wird, geht also durch die beiden Scheitel und schneidet den Scheitelkreis diametral. Denkt man die Ebene einer gleichseitigen Hyperbel senkrecht zur Ebene η und in dieser die Nebenaxe, so haben alle Bildkreise einer gleichseitigen Hyperbel zwei gemeinschaftliche Punkte und bilden ein Büschel mit reellen Grundpunkten.

Fällt man aus dem Punkte P einer gleichseitigen Hyperbel das Perpendikel PQ auf die Hauptaxe und beschreibt um Q mit demselben den Kreis, so schneidet er den Scheitelkreis orthogonal. Alle Bildkreise einer gleichseitigen Hyperbel, deren Hauptaxe in der Ebene η liegt und deren Nebenaxe zu ihr normal ist, bilden also ein Büschel mit imaginären Grundpunkten.

Dreht man die Hyperbel um die zur Ebene η normale Axe, so erhält man im ersten Falle ein zweifaches, im andern ein einfaches gleichseitiges Rotationshyperboloid; die Bildkreise der Punkte eines solchen schneiden einen festen Kreis diametral oder orthogonal und bilden ein Kreisnetz.

Damit ist die Geometrie der Kreisbüschel und Kreisnetze auf diejenige der gleichseitigen Hyperbel und des gleichseitigen Rotationshyperboloids zurückgeführt.

Projicirt man aus einem Punkte S irgend eine Figur $\mathfrak{A}$ einer Ebene α auf die feste Ebene η in die Figur $\mathfrak{A}_1$ und dreht die Ebene α um die Schnittlinie der Ebenen α und η, bis sie mit η zusammenfällt, so gelangt die Figur $\mathfrak{A}$ in die Lage $\mathfrak{A}_2$. Das Bild $\mathfrak{A}_1$ und die Umlegung $\mathfrak{A}_2$ liegen perspectivisch oder in centrischer Collineation.

Irgend zwei Kreise sind stets auf doppelte Weise entsprechende Figuren einer centrischen Collineation, deren Centrum einer der Aehnlichkeitspunkte und deren Axe die Potenzlinie ist. Hieraus folgen die Eigenschaften der Potenzlinie, des Potenzkreises und das Princip der reciproken Radien. Letzteres oder die Kreisverwandtschaft erscheint also als specieller Fall der allgemeinen centrischen Collineation und lässt sich leicht auf den Raum ausdehnen.

Die Probleme des Winkelschnittes der Kreise werden auf doppelte Art gelöst, durch die Methoden der darstellenden Geometrie und durch die Kreisverwandtschaft.

Von der Aufgabe: „Einen Kreis zu construiren, welcher vier gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet", wird der specielle Fall näher behandelt, in welchem die vier gegebenen Kreise die Berührungskreise eines Dreiecks sind. Der Schnittwinkel wird 0 und der Schnittkreis wird der Feuerbach'sche Kreis. Die nähere Theorie dieses Kreises findet sich am Schlusse des Werkes noch einmal ausführlicher entwickelt.

Die Kreisbüschel und Netze werden durch Kreisverwandtschaft wieder in Büschel und Netze umgeformt; die Kreise einer linearen Reihe formen sich in solche um, welche zwei gegebene Kreise unter bestimmten Winkeln schneiden, deren Mittelpunkte also auf einem Kegelschnitte liegen. Der Zusammenhang zwischen der Theorie der Kreissysteme und Kegelschnitte erscheint dadurch in einer neuen Beziehung und führt unmittelbar zur Theorie der letzteren.

Den Schluss des Werkes bildet die Geometrie der Kreise auf der Kugel.

Der Leser wird in ihm eine Fülle von Anregung finden; die sämmtlichen Resultate sind aus einheitlichem Princip hergeleitet. Ob die Grundidee des Werkes eine Steiner'sche ist und wir derselben die von dem grossen Geometer mitgetheilten Resultate aus der Geometrie der Kreise und Kugeln verdanken, bleibe dahingestellt. Die von Reye in seiner Kugelgeometrie und die von Fiedler in der vorliegenden Cyklographie zur Herleitung der Kreis- und Kugeleigenschaften benutzten Methoden haben das Gemeinsame, dass sie dieselben theilweise an transformirten Figuren ausführen. Einen andern Weg schlägt Badorff in der schon angeführten Abhandlung ein, indem er die Eigenschaften der Kreis- und Kugelgebilde an ihnen selbst entwickelt, wobei er allerdings der Rechnung mehr Einfluss einräumen muss, als jene anderen Methoden verlangen.

Die vorliegende Cyklographie ist mit derjenigen Klarheit geschrieben, die wir an den Werken Fiedler's gewöhnt sind. Zahlreiche Figuren unterstützen die Anschauung und so wird dieselbe ihren Zweck erreichen, die Geometrie der Kreise und Kugeln auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

Weissenburg, den 8. Januar 1883. MILINOWSKI.

Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, auf fünf Decimalen bearbeitet von E. BECKER, Dr. phil. und Erstem Observator an der königl. Sternwarte in Berlin. Stereotypausgabe. Verlag von Bernhard Tauchnitz. Leipzig 1882. XVI, 104 S.

Diese dem Andenken von Carl Bruhns, welcher die Entstehung der Tafeln beeinflusste, gewidmete Logarithmentabelle lässt an Eleganz

der Ausstattung, man darf wohl sagen, Nichts zu wünschen übrig. Für die Vermeidung von Fehlern wurde mindestens durch äusserste Sorgfalt zu wachen gesucht, und das Lesen von nicht weniger als sechs Correcturen durch fünf verschiedene Persönlichkeiten bürgt, soweit dieses überhaupt möglich ist, zum Voraus für das Gelingen. Der Verfasser hat in der Anordnung seiner Tafeln sich vielfach an bewährte Muster angeschlossen, namentlich hat er die vorzügliche durch Bremiker eingeführte Sonderung der Zeilen in Gruppen von je drei, und die Einschliessung der jeweils zehnten Zeile durch Doppellinien sich angeeignet, wie in der Vorrede unter Nennung des Vorbildes angegeben ist. Es fehlt indessen auch nicht an Eigenthümlichkeiten, welche dem Erscheinen der neuen Tabellen zur Berechtigung dienen. So ist insbesondere bei der zweiten Abtheilung, welche den Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Winkeln bis zu fünf Graden angehört, abweichend von sonstiger Uebung ein doppelter Eingang gewählt, indem die Tafel senkrecht abwärts nach von Minute zu Minute wachsenden Winkelgrössen geordnet ist, während wagerecht das Fortschreiten um Zehntel einer Minute berücksichtigt ist; angegebene Secunden sind dementsprechend allerdings in Decimaltheile einer Minute umzurechnen.

Cantor.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen von Dr. Hermann Schubert, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. I. Heft: Für mittlere Classen. Potsdam 1883, Verlag von Aug. Stein. VIII, 222 S.

Die Reform des mathematischen Schulunterrichts vollzieht sich gegenwärtig, wenn auch nicht in allseitiger Uebereinstimmung, wie das bei Reformbewegungen auch billigerweise nicht verlangt werden kann, doch bei zahlreichster Betheiligung. Ihr verdanken Schriften, wie die von Heilermann und Diekmann, wie die von Henrici und Treutlein, ihr verdankt auch die uns vorliegende Aufgabensammlung das Dasein. Der Bearbeiter der Abzählenden Geometrie hat die eigenen Untersuchungen, so beifällig sie aufgenommen wurden, unterbrochen, um der Ausarbeitung einer elementaren Aufgabensammlung sich zu unterziehen. Er wollte zeigen, dass Strenge und Fasslichkeit schon bei den ersten auf Knaben berechneten Anfängen sich in Einklang bringen lassen, und wenn der Name des Verfassers die Bürgschaft gewähren kann, dass der Strenge genügt ist, so zeigt ein Blick in das Büchlein, wie wenig die Fasslichkeit dabei zu kurz gekommen ist. Als erziehlich wichtig erscheinen uns insbesondere gewisse Fragen, welche gewissen jedem Lehrer aus

Erfahrung bekannten Fehlern steuern sollen. Greifen wir einige derselben heraus.

Darf man wohl in $a(b+c+d)+e(b+c+d)+f(b+c+d)$ für $b+c+d$ der Kürze wegen a setzen? (S. 20.)

Warum darf die 0 bei 40 nicht fortgelassen werden, während doch bei $4+0$ das Zeichen $+0$ fortgelassen werden darf? (S. 57.)

Um wieviel verrechnet man sich, wenn man $103-3.4$ berechnet, indem man es gleich $(103-3).4=100.4=400$ setzt? (S. 74.)

Ist der Satz richtig: Von einem Producte wird subtrahirt, indem man von beiden Factoren subtrahirt und die erhaltenen Differenzen multiplicirt? (S. 96.)

Neben diesen den Schüler warnenden Fragen (unter welchen wir eine vermissen: Darf man Brüche so addiren, dass Zähler zu Zähler und Nenner zu Nenner addirt wird?) möchten wir zur Empfehlung des Büchleins auf die ungemein geschmackvolle Einkleidung vieler Aufgaben hinweisen, die sich mannigfach an die sprachlichen und geschichtlichen Unterrichtsgegenstände der Mittelschule anschliesst.

Nur gegen einen Ausspruch legen wir Verwahrung ein. Herr Schubert sagt, im Einklang mit vielen Schriftstellern, bei Besprechung der Division (S. 95): „Man verfährt jedoch am zweckmässigsten, wenn man im Dividendus und im Divisor die Glieder so ordnet, dass die Exponenten entweder eine aufsteigende oder eine absteigende Reihe bilden, und dann immer mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividendus dividirt.“ Das ist und bleibt mangelhaft ausgedrückt. Nicht zweckmässig, vielmehr durchaus nothwendig ist das beiderseitige Ordnen der Glieder, wenn im Quotienten nicht statt eines geschlossenen Ausdruckes eine regel- und gesetzlose unendliche Reihe erscheinen soll.

Cantor.

Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide, von Dr. F. Grube, Oberlehrer. Beilage zum Oster-Programm 1883. Schleswig 1883.

Unter den Aufgaben, welche der Lehre von den in ihrer Wirkung dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Kräften entstammen, spielt die der Anziehung der Ellipsoide eine hervorragende Rolle. Beginnend mit dem einfachsten Falle der Kugel, übergehend erst zum Umdrehungsellipsoid, dann zum dreiaxigen Ellipsoid, haben die hervorragendsten Mathematiker von Newton bis zu Dirichlet und Cayley an der Lösung des Problems gearbeitet, an ihm die mannigfachsten Methoden erprobt. Es konnte kein geeigneterer Geschichtsschreiber dieser Aufgabe auftreten als Herr Grube, der Herausgeber von Dirichlet's Vorlesungen über jene Kräfte. In einem Schulprogramm,

welches Verbreitung weit über Schulgrenzen hinaus verdient, schildert uns Herr Grube die Versuche von Newton, von Cotes, von Stirling, von Clairaut, von Daniel Bernoulli, von Euler, von Maclaurin, von Simpson, von Lagrange, von d'Alembert. Die Ersteren werden nur kurz angedeutet; bei d'Alembert's Arbeiten verweilt der Verfasser mit dankenswerther Ausführlichkeit und zeigt, wie derselbe nicht weniger als sieben von einander verschiedene Methoden anwandte, deren letzte das heute als Endergebniss bekannte elliptische Integral ergeben haben würde, wenn d'Alembert nicht, einem schülerhaften Rechenfehler verfallend, beim Reduciren eines Ausdruckes eine Klammer vergessen hätte. Indem wir Herrn Grube für dieses ungemein interessante Programm unsern öffentlichen Dank aussprechen, hoffen wir, er werde bei diesem Bruchstücke nicht stehen bleiben, uns vielmehr im nächsten Jahre mit der Fortsetzung erfreuen, für welche die Untersuchungen von Laplace, von Ivory, von Chasles, von Dirichlet und vielen Anderen hinlängliches Material sicher stellen.

Cantor.

Lehrbuch der Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dr. Rottok, Professor und Rector am Gymnasium und Realgymnasium zu Rendsburg. 2. Aufl. (Mit 57 Figuren im Text.) Leipzig, Verlag von Hermann Schultze. 1883. X, 74 S.

Lehrbuch der Stereometrie etc. 2. Aufl. (Mit 27 Figuren im Text.) Ebenda, 1883. V, 59 S.

Zwei kleine anspruchslose, aber, wie uns scheint, recht brauchbare Büchlein aus der Feder eines tüchtigen Schulmannes, von dem wir bereits eine Einleitung in die neuere Geometrie besitzen, deren sich Referent bei seinem eigenen Unterrichte schon mit Vortheil bedient hat (in der Zeitschr. f. m. u. n. Unt. von Prof. Matthiessen besprochen). Wie die nicht eben grosse Seitenzahl der in kleinem Octavformat gedruckten Bücher schon vermuthen lässt, beschränkt sich die getroffene Auswahl im Lehrstoffe nur auf das unbedingt Erforderliche, aber dies ist auch sehr gut gegeben. Bei den Winkeln beginnend, erledigt der Verf. die Parallelentheorie mittelst einer sehr kurzen Betrachtung, die selbstverständlich keinen Anspruch auf Exactheit machen kann, für Schulzwecke aber gewiss mit ebendemselben Rechte benutzbar sein dürfte, wie so manche weitschweifigere Untersuchung. Dann folgen gleich die Sätze von der Winkelsumme im Dreieck und n-Eck. Der Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck beruht doch streng genommen auf dem Nachweis der Congruenz zweier Dreiecke und hätte deshalb besser seinen Platz hinter Abschnitt III angewiesen bekom-

men, in welchem die Lehre von der Congruenz kurz und bündig abgehandelt wird. Hieran reihen sich die besonderen Vierecke; auf den Satz, dass Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind, folgt als unmittelbare Anwendung der Pythagoräer. Jetzt erst wird der Kreis eingeführt; an dem ihm gewidmeten Abschnitte V hätten wir höchstens die Figur 25 zu tadeln, welche nur einem Specialfalle des zu beweisenden Theorems angepasst ist. Abschnitt VI, in welchem von der gegenseitigen Lage zweier Kreise und ihren gemeinschaftlichen Tangenten die Rede ist, beendet den ersten, rein constructiven Theil; der zweite beginnt mit einem Abriss der Proportionenlehre, der gewiss jedem Lehrer willkommen ist, da sehr viele Schüler, wenn sie bis zur Aehnlichkeit vorgedrungen sind, längst Alles vergessen haben, was sie früher von den Verhältnissen wussten. Die Proportionalität gewisser Strecken und die Aehnlichkeit der Figuren lassen sich mit diesen Mitteln leicht abmachen. Ein relativ ausführlicher Abschnitt (XI) beschäftigt sich mit den Transversalen und merkwürdigen Punkten des Dreiecks. In Abschnitt XII werden verschiedenartige Gegenstände zusammengenommen: Chordale, Summen- und Differenzlinie zweier Kreise (letztere in einer dem Verf. anscheinend eigenthümlichen Darstellung), Ptolemaeischer Satz, harmonische Theilung und goldener Schnitt; dadurch wird man hinübergeleitet zum Schlusscapitel, regelmässige Vielecke und Kreisrechnung enthaltend. Die letztere gründet sich, wenn s_n die Seite des n-Ecks um den Einheitskreis bedeutet, auf die bekannte Kettenwurzelentwickelung

$$2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{3}}}}}:\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{3}}}}}.$$

Erwähnt sei beiläufig, dass die bekannte Näherungsformel $\pi=\frac{355}{113}$ nicht dem Peter, sondern dem Adriaan Metius ihre Entstehung verdankt.

Die Stereometrie giebt über die Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im Raume guten Aufschluss; namentlich werden auch die wichtigsten Sätze über Projectionen abgeleitet. Die Darstellung der Lehre vom n-Kant ist leicht fasslich und erschöpfend, doch hat auch sie uns nicht in unserer Ueberzeugung wankend machen können, dass diese Sätze — man vergl. Koppe's Lehrgang in dessen bekanntem Lehrbuch der Stereometrie — eigentlich in die Sphärik gehören. Nachdem der Euler'sche Lehrsatz bewiesen ist, wird die Ausmessung der üblichen elementaren Körperformen wesentlich in der bekannten Weise gelehrt, nur macht das Buch darin eine anerkennenswerthe Ausnahme von zahlreichen Collegen, dass es auch dem Obelisken gerecht wird und die nicht eben complicirte Formel für dessen Volumen bringt, aus welcher alle die übrigen Kubaturen als Corollare fliessen. Ebenso ist die Zugabe einer Aufgabensammlung zu billigen, welche nicht blos dem rechnerischen, sondern auch dem constructiven Elemente Rechnung trägt.

Die zwei kleinen Lehrbücher, die etwa in je einem Jahrescurse bequem absolvirt werden können, sind frisch geschrieben und in ähnlicher Weise zu empfehlen, wie das kleine Lehrbuch der ebenen Geometrie des Dänen Petersen (deutsch von Fischer-Benzon). Namentlich aber ist auch die feine und der Verlagshandlung Ehre machende äussere Ausstattung zu loben.

Ansbach. Dr. S. GÜNTHER.

Drei Mittheilungen über neue Würfelversuche. Von Dr. RUDOLF WOLF, Professor der Astronomie in Zürich. Zürich, Druck von Zürcher & Furrer. 1881—83. 59 S.

Ueber das Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und des als „mathematische Wahrscheinlichkeit" bezeichneten Begriffes herrscht in manchen Kreisen noch eine merkwürdige Unklarheit. Man macht sich keine bestimmte Vorstellung davon, dass lediglich unter dem nivellirenden Einflusse des Gesetzes der grossen Zahlen der Unterschied zwischen der berechneten und der Erfahrungswahrscheinlichkeit sich verwischen kann, dass aber natürlich Derjenige, der eine an sich sehr kleine, wenn auch für seine Geduld ausreichend grosse Versuchsreihe anstellt, die erheblichsten Differenzen wahrnehmen wird. Ganz ein Anderes wird es natürlich sein, wenn ein Mann von der ehernen Ausdauer, die Jedermann an dem verdienten Director der Züricher Sternwarte kennt und bewundert, eine Experimentaluntersuchung über diesen Gegenstand in Angriff nimmt. Schon im Jahre 1851 hat Herr Wolf in den Mittheilungen der Berner naturforschenden Gesellschaft Würfelversuche bekannt gemacht; später hat er den Grundgedanken etwas verändert und im Verein mit dem Baseler Mathematiker Merian die empirische Bestimmung der Zahl π geliefert. Zieht man auf einer ebenen Tafel ein System äquidistanter Parallellinien und wirft ein Stäbchen von gleichbleibender Länge beliebig oft auf die Tafel, berechnet sodann die Wahrscheinlichkeit, die dafür besteht, dass der Stab eine der Parallelen schneide oder nicht schneide, so geht in die bezügliche Formel auch π ein, und wenn man also genügendes Beobachtungsmaterial zur Verfügung hat, kann die fragliche Constante mit einer von der Menge des letzteren abhängenden Genauigkeit ermittelt werden. Die böhmische mathematische Zeitschrift Časopis hat unlängst einen in ähnlichem Sinne gehaltenen Artikel gebracht. Wolf jedoch scheint den einfachen Würfelversuch, das klassische Beispiel, auf welches sich alle neueren Bearbeiter des Wahrscheinlichkeitscalculs beziehen, immer noch für das beste Mittel zur Controlirung der Wahrscheinlichkeit *a priori* zu halten, und so stellte er denn drei neue gigantische Versuchsreihen an, über welche die Züricher Vierteljahrsschrift resp. in den Jahren 1881, 1882, 1883 das Nähere enthielt. Alle drei

Berichte sind es, die jetzt als vereinte Separatausgabe vor uns liegen und hier einer kurzen Besprechung unterzogen werden sollen.

Nummer 1 giebt eine Uebersicht über 100 Versuche, welche mit zwei — roth und weiss gefärbten — Würfeln in der Weise angestellt wurden, dass jeder einzelne Cyclus 100 Versuche umfasste. Aus den 10000 Einzelwürfen, die man auf solche Art erhielt, wurden nun die Wahrscheinlichkeiten beider Gattungen berechnet und bei der Zusammenstellung fand sich ein interessantes Ergebniss — die Zahlen stimmten nicht soweit überein, als nach früheren Proben wohl hätte erwartet werden dürfen. Wer blos die Möglichkeit jener zufälligen Fehler zuzulassen geneigt wäre, die ja der Theorie nach einzig und allein einer Ausgleichung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen sind, der müsste in Verlegenheit kommen; allein der Tieferblickende nimmt hier das Walten einer gewissen, wenn auch vorerst noch unbekannten Gesetzlichkeit wahr und sucht derselben auf die Spur zu kommen.

Es liegt nahe, hier einen Vergleich anzubringen. So lange die Geodäten daran festhielten, dass jene Classe von Irrungen, welche bei einer grossen Vermessung unter dem Namen der Lothstörungen zusammengefasst werden, durch die Methode der kleinsten Quadrate beseitigt werden könne, liess sich durchaus keine Harmonie zwischen den an verschiedenen Stellen unseres Erdballes vorgenommenen Gradmessungen erzielen; dies gelang vielmehr erst dann, als Pratt und Philipp Fischer uns belehrten, es seien jene Ablenkungen des Lothes von der Niveau-Normalen nichts Zufälliges, sie liessen sich vielmehr gesondert in Rechnung ziehen und ihrer Wirkung nach eliminiren. Ganz ähnlich nun hat Wolf aus den von ihm wahrgenommenen Discrepanzen den Schluss gezogen, es müssten hier Fehlerquellen von ganz bestimmtem Charakter vorhanden sein, und zwar erkannte er eine hervorragend wichtige in der nicht vollkommenen Homogeneität der Würfel. Unter der Annahme, „es sei die Chance eines Wurfes zum Abstande des Schwerpunktes von der Gegenseite reciprok“, gelang ihm eine sehr befriedigende Aufklärung. Die zweite Mittheilung enthält neben dem riesigen statistischen Stoffe neuer Versuche Andeutungen über die Mittel, deren sich der Verf. und sein Assistent, Herr Wolfer, zur Abkürzung der erforderlichen Arbeiten bedienten, sowie auch über eine gewisse andere Kategorie von Anomalien, mit welcher sich dann das dritte Stück im Einzelnen beschäftigt. Es wird dargethan, dass die mathematische Wahrscheinlichkeit allerdings häufig mit unerfüllten und unerfüllbaren Voraussetzungen operirt, und dass man da, wo es angeht, jenen aprioristischen Zahlen die aus ihnen mit Berücksichtigung gewisser Erfahrungsdaten abgeleiteten empirischen Daten substituiren muss. Ganz originell ist die Idee, die eigenthümlichen Zusammendrängungen und Stauungen in den Tabellen mit den Stauprocessen in Vergleich zu bringen, welche beim Abfliessen

einer Sandmasse durch eine Trichteröffnung eintreten und vom Verf. experimentell geprüft werden. In Summa darf die Wolf'sche Arbeit allen Jenen bestens empfohlen werden, welche einer tieferen Erfassung des bislang nur ziemlich unbestimmt umschriebenen Begriffes der Erfahrungswahrscheinlichkeit ihr Interesse zuwenden.

In einem Anhang wird die auf 200 Stellen (von Dase) berechnete Zahl π nach den in den vorstehenden Theilen erörterten Grundsätzen analysirt, und es ergiebt sich die merkwürdige Thatsache: „Die Decimalen von π bilden eine Reihe, welche sich in allen untersuchten Beziehungen ganz wie eine sogenannte gesetzlose Reihe von gleicher Ausdehnung verhält.“ Gewiss eine beachtenswerthe Bestätigung des von Lindemann und Hermite auf streng theoretischem Wege gefundenen und das alte Problem der Kreisquadratur endgiltig lösenden Ergebnisses, dass π eine absolut transcendente, durch keine irgend gesetzmässige Aufeinanderfolge rechnerischer Operationen darstellbare Zahl ist.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Berichtigung zu meiner Recension über „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen etc. von Dr. G. Holzmüller“.

„Da Herr Holzmüller, wie ich jetzt weiss, bei $f(z, i) = X + Yi$ in $z = x + yi$ sowohl als bei dem i, das ausser demselben auftritt, gleichzeitig das Vorzeichen wechselt, was ich früher irrthümlicher Weise übersah, und meine Forderung bei seinen Operationen in der That erfüllt wird, so hat pag. 144 Zeile 3 von unten die Bemerkung: „S. 193 werden in Z. 12 v. o.“ bis „sämmtliche Coefficienten reell sein müssen“ zu entfallen, da die Beweise auch bei complexen Coefficienten aus obigem Grunde richtig sind.“

Dr. A. Puchta.

Bibliographie

vom 16. Juni bis 31. Juli 1883.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem J. 1882. Berlin, Dümmler. 6 Mk. 30 Pf.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1882. Ebendas. 30 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1883, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Abhandlungen der königl. bayr. Akademie d. Wissenschaften. Mathem.-physikal. Classe. 14. Bd. 2. Abth. Ebendas. 7 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe, II. Abth. 86. Bd. 4. u. 5. Heft. Wien, Gerold. 4 Mk. 90 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 45. Bd. Ebendas. 44 Mk.

Verhandlungen der permanenten Commission der europäischen Gradmessung. Jahrg. 1882, Confer. im Haag. Redig. v. A. Hirsch u. Th. v. Oppolzer. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Publicationen des königl. preuss. geodätischen Instituts. Astronom.-geodät. Arbeiten aus den Jahren 1881 u. 1882. Berlin, Friedberg & Mode. 15 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. von Mittag-Leffler. II. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. pro compl. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld u. A. Winnecke. 18. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. 32. Jahrg., herausgegeben von R. v. Hanstein. Juli — December 1882. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von A. Krüger. 106. Bd. (24 Nrn.) Nr. 2521. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 15 Mk.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte zu Magdeburg (Station I. O.), herausgeg. von R. Assmann. 1. Jahrg. 1881 u. 1882. Magdeburg, Faber. 7 Mk. 50 Pf.

Fortschritte der Meteorologie. Nr. 8, 1882. Cöln, Mayer. 2 Mk.

Geschichte und Philosophie der Mathematik.

BERGK, TH., Fünf Abhandlungen zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astronomie, herausgegeben von C. HINRICHS. Leipzig, Fues. 4 Mk.

JACOBSON, J., Die Axiome der Geometrie und ihr „philosophischer Erklärer" Herr Benno Erdmann. Königsberg i. Pr., Beyer. 1 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

LIE, S., Untersuchungen über Differentialgleichungen. I. u. II. Christiania, Dybwad. 60 Pf.

RASCHKE, W., Ueber die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung etc. Heidelberg, Winter. 1 Mk. 60 Pf.

MANN, F., Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik. Würzburg, Stahel. 1 Mk. 20 Pf.

SCHREINER, J. E., Lehrbuch der Algebra. Eichstätt, Stillkrauth. 3 Mk.

JANKE, F., Sammlung algebraischer Aufgaben. Bernburg, Bacmeister. 30 Pf.

BUNKOFER, W., Die ersten Elemente der Determinantengeometrie. Tauberbischofsheim, Lang. 50 Pf.

LIE, S., Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verbunden sind. Christiania, Dybwad. 30 Pf.

BAUER, G., Die Hesse'sche Determinante einer Hesse'schen Fläche dritter Ordnung. (Akad.) München, Franz. 50 Pf.

BRAUNMÜHL, A. v., Ueber die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung der Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

KRIMMEL, O., Die Kegelschnitte in elementar-geometrischer Behandlung. Tübingen, Laupp. 2 Mk. 60 Pf.

BURMESTER, L., Grundzüge der Reliefperspective. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Euclidis opera omnia, edd. L. HEIBERG et H. MENGE. Euclidis elementa, ed. L. HEIBERG, vol. I. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

SCHRAM, R., Hilfstafeln zur Chronologie. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Mk. 80 Pf.

BAUERNFEIND, C. v., Das bayerische Präcisionsnivellement. 6. Mittheil. (Akad.) München, Franz. 2 Mk. 50 Pf.

ISRAEL-HOLZWART, K., Einige Abänderungen der Delambre'schen Methode zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Pein, A., Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst mit Hilfe der Planimetrie und ebenen Trigonometrie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Fourier, M., Théorie analytique de la chaleur. Nouvelle éd. livr. 4. Breslau, Köbner. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

Neumann, F., Einleitung in die theoretische Physik. Vorlesungen, herausgegeben von C. Pape. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Ditscheiner, L., Ueber die Guebhard'schen Ringe. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Klemenčič, J., Ueber die Capacität der Plattencondensatoren. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Margules, M., Notiz über den dynamoelektrischen Vorgang. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Wassmuth, A., Ueber den inneren, aus der mechan. Wärmetheorie folgenden Zusammenhang mehrerer elektromagnetischen Erscheinungen. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

Kaempfer, D., Ueber die Messung elektrischer Kräfte mittelst des elektrischen Flugrads. (Dissert.) Berlin, Friedländer & S. 1 Mk.

Lissner, A., Skizze einer Theorie der Elektromotoren etc. Wien, Spielhagen & Schurich. 1 Mk. 60 Pf.

Mascart, E., Handbuch der statischen Elektricität, deutsch bearbeitet von G. Wallentin. 1. Bd. 1. Abth. Wien, Pichler. 14 Mk.

Maxwell, J. C., Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, übersetzt von B. Weinstein. 2. Bd. Braunschweig, Vieweg. 14 Mk.

Hellmann, G., Repertorium der deutschen Meteorologie v. d. ältesten Zeiten bis zum Schluss des Jahres 1881. Leipzig, Engelmann. 14 Mk.

Böcker, F., Die aspiratorische Thätigkeit der Niveauflächen als Entstehungsursache barometrischer Minima etc. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie.

Von

P. Treutlein,

Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.

Im vorliegenden Aufsatze werde ich versuchen, das folgende scheinbar dreigliedrige, aber, wie sich herausstellen wird, in sich doch einheitliche Thema:

„Der besondere Pythagoreische Lehrsatz — die zahlenmässige Bestimmung von rationalen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks — das zweite Buch der Elemente Euklid's“

rücksichtlich seiner geschichtlichen Entstehung und Entwickelung einer erneuten Behandlung zu unterziehen. Zwar haben in den letzten zwei Jahrzehnten Forscher wie Cantor, Röth, Bretschneider, Hankel, Günther, zum Theil wiederholt, sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, und es ist das Ergebniss ihrer Untersuchungen in dem so verdienstlichen Werke von Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Theil“, niedergelegt, und ich will auch sofort beifügen, dass ich mit der hierin gegebenen Darstellung im Grossen und Ganzen einverstanden bin. Aber mir scheint es, als ob die jetzt geltende Auffassung über die geschichtliche Entwickelung des beregten Gegenstandes eine Stufe, nämlich die anfängliche Induction bei der Genesis, ausser Acht lasse oder wenigstens nicht genügend hervorhebe; aus diesem Grunde, und weil überhaupt die Art, wie ich mir die Entstehung der Sache denke, der unmittelbar sinnlichen Anschauung mehr Spielraum gewährt, also auch, wie ich wenigstens meine, der geschichtlichen Wahrheit näher kommt, ferner weil ich zugleich, wenn auch nur in untergeordneten Punkten, thatsächliche Richtigstellungen zu bringen vermag, so wage ich, den Gegenstand hier zur Besprechung zu bringen. Und wenn ich zuweilen speciell gegen Cantor's Darstellung mich wenden werde, so möge der geehrte Mitherausgeber und jeder andere Leser

dieser Zeitschrift dies dadurch für begründet erachten, dass die betreffenden Capitel bei Cantor die ausführlichste zusammenhängende Darlegung enthalten und jedenfalls die, welche am meisten aufgesucht und gelesen wird und werden wird.

I. Der besondere Pythagoreische Lehrsatz. — 1. Mancher mag beim Lesen dieser Ueberschrift der Zeiten gedenken, wo er in gespannter, vielleicht auch nicht gespannter Erwartung der Dinge, die da kommen sollten, vor der Schultafel sitzend auf dieser die typische Gestalt der Euklid'schen Beweisfigur vor seinen Augen auftauchen sah, und mag der Stunden und Tage nachher gedenken, wo der zugehörige Beweis gelernt und eingeübt wurde, nicht schwer gerade, interessant sogar, auch Ueberzeugung gewährend von der Wahrheit der bezüglichen Behauptung — und doch ein gewisses Gefühl des Unbehaglichen hinterlassend, gleich als ob eine Ueberrumpelung, eine Gefangennahme stattgefunden habe. Wohl mag auch der Eine und Andere sich der begleitenden Nebenumstände erinnern, wie der Lehrer die Wichtigkeit des „Magister matheseos" angepriesen, vielleicht auch des bösen Beinamens der „Eselsbrücke" Erwähnung gethan, weil nämlich Esel im Geiste nicht über die so schwer passirbare Brücke des Beweises hinüber zu gelangen vermöchten. Gar hat auch einer von Denen, welchen diese Zeilen vor Augen kommen, in seiner Schulzeit gehört, dass mit Hilfe eben jener Euklid'schen Beweisfigur eine telegraphische Verbindung mit etwaigen in geistiger Beziehung den Menschen ähnlichen Mondbewohnern möglich sei: denn hätten diese wirklich ein der Menschenseele verwandtes geistiges Princip in sich, so müssten gewiss auch sie den im irdischen Bereich so berühmten Satz des Pythagoras, nicht minder dessen vorhin erwähnten Beweis erfunden haben, so dass man nur eine in genügend grossem Maassstabe und in passenden Farbencontrasten gewählte Anpflanzung der Beweisfigur auf der Erde auszuführen habe, um bald in der auf dem Monde geschehenden Reproduction derselben Figur die Antwort unserer Trabantenbrüder und den Anfang einer Correspondenz mit denselben verwirklicht zu sehen.

Nun, der letztere Vorschlag, falls er jemals ernstlich gemeint war, geht doch von der Annahme aus, dass der Pythagoreische Satz und gar auch dessen Beweis durch den alten alexandrinischen Mathematiker ein nothwendiges Product, ja die Kenntniss davon ein Attribut des menschlichen Geistes sei. Wohl möchte man beim Durchlesen von Werken über Geometrie oder beim Anhören von mathematischen Unterrichtsstunden der Gegenwart auch zuweilen meinen, dass die betreffenden Verfasser oder Lehrer einer fast ähnlichen Ansicht huldigen, da sie den Inhalt und den Beweis unseres mehrfach erwähnten Satzes so unvermittelt den Lernenden überliefern. Es giebt ja mehrfache Versuche, den soeben

angedeuteten misslichen Zustand zum Guten zu ändern — doch von Didaktischem habe ich hier nicht unmittelbar zu reden.

2. Jahrhunderte lang hat man sich jedenfalls auch um die Entdeckungsgeschichte dieses Satzes gar nicht gekümmert, die Frage gar nicht aufgeworfen, wie denn Pythagoras überhaupt dazu kommen konnte, einen solchen Lehrsatz aufstellen zu wollen. Man bewies ihn und nahm ihn hin als eine interessante und zu praktischen Folgerungen führende geometrische Thatsache, und es sind nicht viele Jahrzehnte verflossen seit der Zeit, wo einzig seine Kenntniss noch als Beweis einer ziemlich soliden mathematischen Allgemeinbildung galt. Dass freilich jene Fragestellung nicht erst unserm Jahrhundert, wie gewöhnlich geglaubt wird[1]), im Besondern dem Jahre 1833 angehört, wird sich weiterhin zeigen.

Die wissenschaftliche Pythagorasfrage überhaupt in Fluss gebracht zu haben, ist das Verdienst von Röth (1862), aber den richtigen Standpunkt gewählt zu haben zur geschichtlichen Beurtheilung von des Pythagoras und der Pythagoreer mathematischen Leistungen, ist das ebenso wenig bestreitbare Verdienst von Cantor (1858). Gegen des Letzteren sogleich zu präcisirenden Standpunkt war es ein Rückgang von Seiten Bretschneider's (1870), wenn dieser sich dahin ausspricht[2]), dass „die Beantwortung der Frage, auf welchem Wege der Erfinder zu seinem Satze gelangt ist, kann nur von einem bestimmten Punkte aus unternommen werden, indem man nämlich die Stelle berücksichtigt, welche der Satz in des Euklides Elementen einnimmt". Für viel richtiger, wie gesagt, halte ich den Standpunkt Cantor's, der von sich selbst sagt[3]), dass er „wohl zuerst die Entdeckung dieses Satzes in Zusammenhang mit den übrigen Pythagorischen Lehren gebracht" und der, wie Günther mit Recht bemerkt[4]), zuerst nachdrücklich auf das Experimentiren, auf das stete, vermuthlich durch bestimmte hodegetische Grundsätze geregelte Probiren, als auf den Grundcharakter Pythagoreischer Mathematik hingewiesen hat[5]).

In der That, hier liegt der Kernpunkt, von wo aus die Lösung unserer geschichtlichen Frage gelingt, und in seiner Fixirung stimme ich ganz mit Cantor überein, nur dass ich das dem Pythagoras und seinen Schülern zuzuschreibende Vorgehen als ein ganz unmittelbar durch Anschauung vermitteltes auffasse, als ein für das geometrische, wie für das arithmetische Gebiet sinnlich fassbares, ja das arithmetische Experimentiren sogar noch als das dem geometrischen vorausgehende und das letztere erst bedingende.

3. Die Zahl ist das Wesen aller Dinge, Alles ist seinem Wesen nach Zahl — diese Grundbehauptung und allgemeinste Unterscheidungslehre Pythagoreischer Philosophie in Verbindung mit der Neigung des griechischen Geistes zur Versinnlichung und anschaulichen Gestaltung, dazu die auf die altpythagoreische Schule schon zurückgehenden Namen der

Dreieckszahlen, der Flächen- und Körperzahlen[6]) müssten allein schon zu der Annahme führen, dass die Pythagoreer die ohnedem wohl für das praktische Rechnen gebrauchten Rechensteine auch zu zahlentheoretischen Untersuchungen halb wissenschaftlicher, halb mystischer Natur verwendet haben. Allein es wird auch für die altpythagoreische Schule direct überliefert[7]), dass „Eurytus die Bedeutung der einzelnen Zahlen dadurch beweisen wollte, dass er die Figuren der Dinge, die sie bezeichnen sollten, aus der ihnen entsprechenden Anzahl von Steinchen zusammensetzte", und bei Aristoteles findet sich auch mit Bezug auf die Pythagoreer die andere Stelle[8]), wo es heisst: die Einen führen die Zahlen auf Figuren wie das Dreieck und Viereck zurück.

Es wird also der Wahrheit entsprechen, wenn ich annehme, dass Pythagoras schon in solcher Weise vorging und sich würfelförmige oder, da „unter den ebenen Gebilden der Kreis am schönsten", unseren Damenbrettsteinen ähnliche Stein- oder Holzplättchen bildete und diese aneinander reihte. Die Unterscheidung in „gerade" und „ungerade" und die vielleicht unmittelbar sich anschliessende Eintheilung in verschiedene Unterarten[9]) ergab sich leicht. Die Aneinanderreihung ferner nach Art von Fig. 1 und 2 ergab höchst einfach nicht nur die bildliche

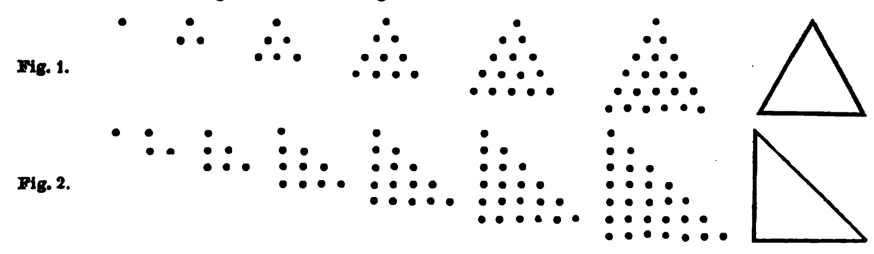


Fig. 1.

Fig. 2.

Darstellung der natürlichen Zahlen, sondern auch die einfachen Grundformen des gleichseitigen und des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, nicht minder aber auch die Begründung dafür, die so zur Darstellung gekommenen Zahlen

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ \frac{n(n-1)}{2}$$

mit dem Namen der Dreieckszahlen zu belegen.*

Andersartige Anordnung:

also:

Fig. 3.

* So findet auch der Bericht des Lucian (vergl. Cantor Gesch., S. 143) seine einfachste Erklärung. Derselbe berichtet nämlich, Pythagoras habe Einen zählen lassen. Dieser sagte also: „1, 2, 3, 4", worauf Pythagoras dazwischen fuhr: Siehst du? Was du für 4 hältst, das ist 10 und ein vollständiges Dreieck und unser Eidschwur! (Vergl. die vierte Gestaltung in Fig. 1.)

nämlich allmälige Ränderung der Viertelsumrahmung, d. h. Zufügung von ungeraden Anzahlen von Rechensteinen in Gestalten je eines Winkelhakens (Gnomons), führte, wenn man von der Einheit ausging, zu der Form des Quadrates und zu den in ihr sich darstellenden Quadratzahlen

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

als Summe von ungeraden Zahlen, wenn man aber von der Zweiheit

Fig. 4. also:

ausging (Fig. 4), zu der Form des Rechtecks und zu den in ihr sich darstellenden sogenannten heteromeken Zahlen

$$2, 6, 12, 20, 30, \ldots, n(n-1)$$

als Summen der je von 2 ab genommenen geraden Zahlen.

Dass sich hier auch die Ableitung gewisser mystischer Eigenschaften der Zahlen anschloss, bedarf nur der Erwähnung.

4. Diese einfachsten Aneinanderfügungen von Rechensteinen führten nun zugleich auch zum gleichseitigen Dreieck, gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck und Quadrat, als den Grundfiguren von gewisser Regelmässigkeit, d. i. innerer Harmonie, und es ist naheliegend, anzunehmen, dass diese Grundfiguren

Fig. 5.

sowie ihre Hälften

Fig. 6.

von Pythagoras ebenfalls in Holz oder sonstigem Stoffe geformt wurden, um auch durch deren Aneinanderlegen die früheren und neuere,

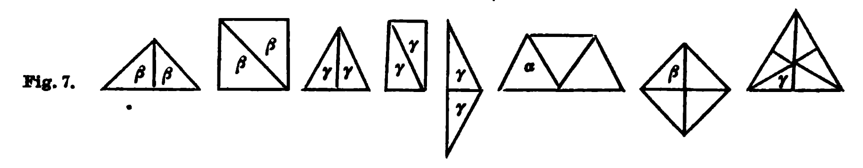


Fig. 7.

zusammengesetztere Figuren abzuleiten, wie etwa Fig. 7, deren Entstehung unmittelbar ersichtlich ist.

5. Waren je nach den verschiedenen Mengen von zusammengefügten Einheiten, entsprechend den obigen Figuren 3 und 4, auch verschieden grosse Platten gebildet, so gaben sich bei deren Aufeinanderlegen, sowie dann beim Nachzeichnen im Sande deutlich auch die Gnomonen kund. Dass gerade solches „Anlegen von Flächen, ihr Ueberschiessen, ihr

ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις)

Dreieckszahlen, der Flächen- und Körperz… …er Muse sind", ist uns
zu der Annahme führen, dass die Pytha… möchte, für die früheste Stufe
praktische Rechnen gebrauchten Rech… zu verstehen.*
Untersuchungen halb wissenschaft… Fälle zeigte die Eigenthümlichkeit,
haben. Allein es wird auch … …schiessende ebensoviele Einheiten enthält,
liefert[7]), dass „Eurytus … gebildeten Quadrattafeln, d. h. dass der
beweisen wollte, dass e… selbst eine Quadratzahl** ist, nämlich
ten, aus der ihnen ent…
und bei Aristot…
die andere Ste… …anderlegen und wiederum Zerlegen von mit Zahlen
Figuren wie … gewiss auch arithmetische Sätze gefunden; wie dies
… folgenden zwei Beispielen erläutert werden.

Es w… Angenommen, es wurden zwei aufeinander folgende Gestal-
Pythag… oben erwähnten Fig. 2 aneinander gelegt (Fig. 8), Gestal-
da „… ten also, welche Dreieckszahlen bedeuten, etwa die siebente und
Dar… achte $\left(\text{d. i. } \frac{7.8}{2} + \frac{8.9}{2} = 28 + 36 = 64 = 8^2\right)$, so war sofort zu sehen,
dass die eine rechts überschiessende Reihe unten angefügt ein Quadrat vervollständige, d. h. man erkannte, in unseren Zeichen ausgedrückt, dass

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n(n-1) + n$$
$$= n(n-1+1) = n^2$$

sei, d. h. dass jede Dreieckszahl mit der nächstfolgenden vereinigt eine Quadratzahl giebt[10]).

Fig. 9.

Ebenso war (Fig. 9), diesem Gedankengange des Zusammenhanges zwischen Dreieckszahl und Quadratzahl folgend, ziemlich leicht zu erkennen, dass jede Quadratzahl gleich dem um 1 vergrösserten Achtfachen einer Dreieckszahl ist[11]); wie wir nämlich schreiben, ist in der That $8 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 4n(n-1) = 4n^2 - 4n + 1 = (2n+1)^2$.

** Cantor und ihm folgend Günther denken sich[12]) die Auffindung dieser Thatsache etwas anders. Pythagoras habe nämlich eifrigst Summationen von aufgeschriebenen Zahlenreihen vorgenommen; nämlich so, wie er aus

$1 = 1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 3 + 5 = 9, \; \ldots$ die Quadratzahlen und aus
$2 = 2, \quad 2 + 4 = 6, \quad 2 + 4 + 6 = 12, \; \ldots$ die heteromeken Zahlen

fand, so habe er auch die Reihe der Quadratzahlen und mit Weglassung von 1 die Reihe der ungeraden Zahlen unter einander geschrieben und addirt:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots & n^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 16 & \ldots & 2n+1 \\ \hline 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots & (n+1)^2 \end{array}$$

und habe so wieder die Quadratzahlen gefunden; er habe dann auch die Reihe der Dreieckszahlen angeschrieben und darunter dieselbe nochmals mit Weglassung von 1, um so durch Summation derselben

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \ldots & \frac{n(n+1)}{2} \\ \hline 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots & n^2 \end{array}$$

$$16+9=25.$$

…rgleichen der entsprechenden drei Quadrattafeln führte zum Anfügen derselben; an dieser Figur, welche also schon die Grund…'er des Euklid'schen Beweises war, ergab sich die Rechtwink…h den Augenschein.

…ill ich freilich nicht leugnen, dass Pythagoras aus Aegypten …er aus Babylon die Thatsache wissen konnte, dass sich durch …sammenfügen von drei Stäben, deren Maasszahlen 3, 4, 5 sind, ein rechter Winkel construiren lasse; aus meiner vorhin gegebenen Darlegung geht aber hervor, dass ganz wohl auch Pythagoras selbst zu dieser Entdeckung gelangen konnte. Dass sich jedenfalls in seinem Bewusstsein, wie Cantor sagt, die geometrische und die arithmetische Wahrheit zu einem gemeinschaftlichen Satze vereinigten, ist wohl gewiss.

6. Der Gedanke lag nun nahe, einerseits zu versuchen, ob sich bei weitergehender Ränderung eines Quadrates wieder der Fall ereignen könne, dass der zu verwendende Gnomon selbst ein Quadrat ist — und dass dies durch Pythagoras durchgeführt wurde, wird der Abschnitt II meines Aufsatzes zeigen —, andererseits zu probiren, ob solche neuen drei Quadrate zusammengefügt auch wieder einen rechten Winkel ergaben. Die Probe zeigte die Richtigkeit der Vermuthung, und nun erst dürfte wohl der Gedanke in das Bewusstsein des Pythagoras eingetreten sein, dass auch umgekehrt die Summe der Quadrate der Katheten jedes recht-

---

abermals die Quadratzahlen zu erhalten; ferner habe er auch die Reihe der Quadratzahlen zweimal unter einander geschrieben (das zweite Mal wieder mit Weglassung von 1 und nach deren Addition

1	4	**9**	16	25	36	...
4	9	**16**	25	36	49	...
5	13	**25**	41	61	85	...

das „höchst auffallende Ergebniss“ gefunden, dass die Summe der Quadratzahlen 9 und 16 die nächstfolgende Quadratzahl 25 ergab, und dass nur bei ihnen sich diese Erscheinung zeigte, für uns heute leicht begreiflich, weil die Gleichung $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$ nur die Wurzeln 4 und 0 besitzt, von welchen die letztere natürlich für die Alten unzulässig war.

Dass die hier reproducirte Art der Gewinnung von arithmetisch interessanten Ergebnissen bei den neupythagoreischen Arithmetikern (etwa 120 n. Chr.) gebräuchlich war, steht fest, aber mehr als das beweisen alle die bei Cantor a. a. O. citirten Stellen nicht, er selbst „wagt ja auch nur eine unmittelbar nicht auf Ueberlieferung sich stützende Vermuthung“; ich will auch noch zugeben, dass die späteren Altpythagoreer, ja selbst die Schüler des Pythagoras derartige auf hingeschriebene Zahlenreihen sich gründende Zahlenbetrachtungen angestellt haben; was ich aber als unwahrscheinlich bestreite, ist, dass die Genesis des Pythagoreischen Satzes — und darauf allein kommt es hier an — derartig gewesen sei. Man könnte dies auch kurz so aussprechen: Andere glauben, dass die Erkenntniss von $9+16=25$, ich meine, dass die Erkenntniss von $16+9=25$ zur Auffindung des Pythagoreischen Satzes geführt habe.

winkligen Dreiecks dem Quadrat über der Hypotenuse desselben gleichflächig sei.

Dass für diese Wahrheit auch der Beweis erbracht wurde, ist höchst wahrscheinlich; wie dieser Beweis aber gestaltet war, ist durchaus unbekannt, obwohl gern zugegeben werden mag, dass der bei Bretschneider[13]) und Hankel[14]) sich findende der Wahrheit nahe kommt.

7. Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch zwei Bemerkungen kritischer Art beigefügt. Erstens findet sich bei Cantor die folgende Stelle[15]): „‚Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze, sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadratzahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben.‘ So drückte sich ein deutscher Gelehrter (J. F. Wurm) bereits 1833 aus, welcher vermuthlich zuerst diese, wie wir glauben, richtige Anschauung von dem Entwickelungsgange sich aneignete.“ Für richtig halte auch ich, wie die obige Darlegung zeigt, Wurm's Auffassung; aber sie ist nicht von diesem zuerst, sondern ist ein Vierteljahrhundert früher schon von Klügel (1808) ausgesprochen worden[16]): „Pythagoras oder einer seiner Nachfolger mag darauf durch eine arithmetische Frage gekommen sein, über die Zusammensetzung einer rationalen Quadratzahl aus zwei rationalen Quadraten. Denn ...“.

Ja schon im 16. Jahrhundert haben Einige denselben Gedanken gehabt. In der von Clavius besorgten Ausgabe[17]) des Euklid nämlich (1589) schreibt Clavius: „*Inventio porro admirabilis atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur ... Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, ut theorema hoc investigaret. Cum enim hos tres numeros* 3, 4, 5 *diligenter esset contempletus* ...“.

Meine zweite Bemerkung soll sich auf die Frage beziehen, wer wohl zuerst den der Wahrheit am nächsten kommenden Versuch gemacht hat, den Gedankengang des Pythagoras wieder herzustellen, soweit dieser den geometrischen Beweis unseres Satzes betrifft. Als solcher Wiederhersteller gilt[18]) Bretschneider; aber auch hierin war Klügel Vorgänger, da er sich[19]) folgendermassen ausspricht (1808): „Die Bemerkung, dass das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreyecks doppelt so gross ist als das Quadrat einer der gleichen Katheten, war leicht gemacht, ohne Zweifel früher als der allgemeine Satz gefunden ward. Man konnte also auch die Seite des vierfachen Quadrates u. s. f. in verdoppelter Fortschreitung finden ... Oder man ist durch eine zufällige leichte Construction darauf gerathen, etwa indem man in ein Quadrat ein anderes einzeichnete und die Theile verglich, vielleicht gar folgendergestalt“ — und nun giebt er genau Figur und Beweis wie Bretschneider a. a. O., fügt aber alsbald auch hinzu,

dass er diesen Beweis aus einem englischen Lehrbuch der Geometrie von Henry Boad (London 1733) entnehme[20]).

II. Des Pythagoras und Platon Vorschrift zur zahlenmässigen Bestimmung von rationalen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.

8. Euklid's Commentator Proklus (gest. 485 n. Chr.) schreibt dem Pythagoras die folgende Regel zu behufs bequemer Angabe von ganzen Zahlen, welche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sein können: „Man nimmt die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an; von dem Quadrate derselben die Einheit subtrahirt und der Rest halbirt, giebt die grössere Kathete; zu dieser die Einkeit addirt giebt die Hypotenuse."

Woher stammt solche Methode? — ist die naheliegende, auch wohl schon oft aufgeworfene Frage.

Nesselmann nennt[21]) sie zwar „eine Theorie, welche in der späteren Arithmetik von unberechenbarem Einfluss geworden ist und einen hohen Grad von Berühmtheit erlangt hat", kleidet auch die Regel in moderne Zeichen und zeigt, inwiefern sie nur besondere Fälle von Dreiecken giebt, er sagt aber kein Wort darüber, wie Pythagoras dazu gelangt sein möge.

Arneth scheint[22]) diese Vorschrift „ganz das Aussehen zu haben, als ob auch sie aus dem Orient gekommen wäre".

Röth mag wohl zuerst[23]) den folgenden Weg als den des Entdeckers skizzirt haben. Soll nämlich $b^2 + c^2 = a^2$ werden, dann — so habe sich Pythagoras gesagt — muss $c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ sein, d. h es müssen $(a+b)$ und $(a-b)$ beide gerade oder beide ungerade sein und zugleich derart, dass ihr Product eine Quadratzahl ist, d. h. $(a+b)$ und $(a-b)$ müssen bez. die Form $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ und $\frac{\beta^2}{\gamma}$ haben; dadurch muss $a = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}$ und $b = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\gamma}$ sein, und es wird $c = \frac{\alpha.\beta}{\gamma}$. Die besondere Regel des Pythagoras ergebe sich durch die besondere Annahme von $\beta = \gamma = 1$, so dass

$$c = \alpha, \quad a = \frac{\alpha^2+1}{2}, \quad b = \frac{\alpha^2-1}{2}$$

ist, worin denn auch liege, dass Pythagoras von α als einer ungeraden Zahl ausgehen müsse.

Cantor hat diese Darstellung erst[24]) selbst übernommen, später[25]) sie etwas abgeändert und dadurch etwas annehmbarer gemacht. Nämlich der erst ausgesprochenen Bedingung werden $(a+b)$ und $(a-b)$ einfachsten Falles dadurch genügen, dass sie Pythagoras bezw. gleich einer Quadratzahl c^2 und gleich der Einheit setzte, so dass also, weil 1 ungerade, auch c^2, somit auch c ungerade sein muss, etwa $= 2\delta + 1$. „So

kam die Formel des Pythagoras darauf hinaus, $(2\delta+1)^2=(2\delta+1)^2.1$ zu setzen und darnach aus $(2\delta+1)^2=(a+b)$ und $1=(a-b)$ die Werthe $b=\frac{(2\delta+1)^2-1^2}{2}$ und $a=\frac{(2\delta+1)^2-1}{2}$ zu ermitteln, welche zusammen mit $c=2\delta+1$ die gestellte Aufgabe lösen. Die Formen, in welchen b und a auftreten, entsprechen, wie man sofort erkennt, genau dem Wortlaute der Angabe des Proklus, was immer ein günstiges Vorurtheil für die Richtigkeit eines Wiederherstellungsversuches gewährt ..." — Cantor selbst erhebt (B. S. 109) betreffs der ersteren Formulirung als möglichen Einwand, „ob wohl die Griechen (— will sagen Pythagoras —) im Stande waren, aus Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden". Aber wenn man auch mit ihm diesen Einwand als hinfällig betrachtet (selbst ohne dass es nöthig wäre, auf Aegypten zu verweisen), so dürfte wohl, scheint mir, jeder Leser das vorgebrachte Raisonnement als zu modern, als zu kunstreich für Pythagoras' Zeit ansehen.

Bretschneider zieht[26]) auch hier die Erklärung durch ein mehr experimentirendes Verfahren vor. Ihm scheint „die Auffindung dieser Regel ausnehmend einfach, wenn Pythagoras den arithmetischen Satz kannte, dass die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen die Reihe der Quadratzahlen liefert ... Denn schrieb er sich die Reihe der natürlichen Zahlen und die ihrer Quadrate untereinander und bemerkte unter jeder Quadratzahl ihre Differenz mit der nachfolgenden, wie z. B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	...
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	...,

so ergab sich seine Regel von selbst, wenn er in der untersten Reihe diejenigen Zahlen aussuchte, welche selbst Quadratzahlen sind. Die Grundzahlen der letzteren gaben ihm stets die kleinere Kathete, während die beiden über ihr stehenden und sie einschliessenden Zahlen die Quadrate der beiden anderen Seiten und somit letztere selbst lieferten. Auch ist es bei dieser Annahme von selbst klar, weshalb Pythagoras seine Regel gerade so fasste, wie sie Proklos uns angiebt. Denn er hätte auch sagen können: ‚man addire und subtrahire die Einheit zu und von dem Quadrate der gegebenen ungeraden Zahl und halbire die erhaltenen Resultate, so erhält man die beiden anderen Zahlen'. Offenbar aber wäre diese Fassung nicht so unmittelbar an das vorstehende Schema anschliessend, als die von Pythagoras gegebene".

Auch Hankel scheint die erwähnte Methode „ihren Ursprung noch deutlich an der Stirne zu tragen", und er erklärt sich im Wesentlichen für Bretschneider's Auffassung[27]).

Günther[28]) lässt sich auf eine Erklärung nicht ein; aber auch er scheint das an hingeschriebenen Zahlenreihen experimentirende Verfahren für eine solche beiziehen zu wollen, nur dass er, den oben (Anmerkung zu S. 214) angedeuteten Gedankengang weiterführend, die nachstehende Anordnung:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 ...
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 ...
1 4 9 16 25 36 49 ...

gebildet und so die beiden neuen Gleichungen

$$25 + 144 = 169, \quad 36 + 64 = 100$$

gefunden denkt; entsprechend könne dann rein empirisch die Anzahl solcher Relationen vermehrt worden sein.

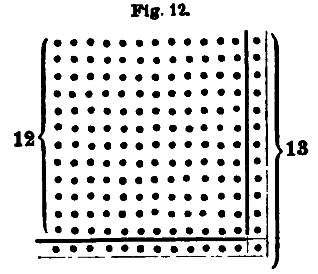
9. Mir scheinen alle solche Wiederherstellungsversuche von Pythagoras' Gedankengang verfehlt, sofern sie den Boden des Experiments verlassen, zu abstract aber und erst einer zweiten, späteren Stufe der Entwickelung angehörig, sofern sie die unmittelbare Anschaulichkeit der Ableitung ausser Acht lassen. Ich möchte mich deshalb in Weiterführung der oben (in I) entwickelten grundlegenden Auffassung für folgende Entstehungsart entscheiden.

Pythagoras — oder wer sonst diesen Weg des experimentalen Forschens zum ersten Male ging — sah und zeigte, dass die Viertelsumrahmung oder Ränderung eines mit Rechensteinen besetzten quadratischen Feldes wiederum zur Gestaltung eines Quadrates führe, und als er bei $16 + 9 = 25$ den besondern Fall erkannt, dass die Summe zweier Quadrate wieder ein Quadrat sei, da lag die Frage nahe, ob sich dies auch weiterhin ereignen könne, und sie spitzte sich nun darauf zu, ob die Ränderungszahl, d. i. der Gnomon, eine quadratische Zahl sein könne. Dass dies nicht jedesmal der Fall (z. B. Fig. 11), war leicht zu sehen; ebenso leicht aber auch, dass dies mit Absicht hergestellt werden konnte (z. B. Fig. 10 oder 12), indem man nur eine ungerade Quadratzahl als Ränderungszahl auswählte; die im Eck stehende Einheit weglassend, hatte man zwei gleichviele Einheiten zählende Ansatzreihen, und in der Anzahl der Einheiten einer derselben hatte man dann auch naturgemäss die Zahl, welche der Länge der einen Quadratseite (der einen Kathete) entsprach; diese Zahl um 1 vergrössert, gab die Länge der grössten Quadratseite (der Hypotenuse), und die Grundzahl, deren Quadrat anfänglich als Ränderungszahl ausgewählt war, war naturgemäss auch die Länge der kleinsten Quadratseite (der kleinsten Kathete).

Fig. 11.

6 7

Fig. 12.



So dürfte wohl am einfachsten das Ausdenken der berühmten Pythagoreischen Regel sich entwickelt haben, und mir scheint, dass auf meinen Wiederherstellungsversuch die oben (S. 217 u. 218) betreffs eines günstigen Vorurtheils für einen solchen citirten Worte von Bretschneider und Cantor mit Fug und Recht ihre Anwendung finden können.

10. Gleichwie dem Pythagoras, so schreibt Proklus auch dem Platon eine Regel zu, um ganzzahlige Werthe für die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden. Er sagt nämlich: „Man nimmt eine gerade Zahl an und setzt sie gleich einer der beiden Katheten; wird dieselbe halbirt, die Hälfte quadrirt und zu diesem Quadrate die Einheit addirt, so ergiebt sich die Hypotenuse; wird aber die Einheit vom Quadrat subtrahirt, so erhält man die andere Kathete.“

Wie ist diese Fassung der Regel entstanden?

Arneth verzichtet auf einen Erklärungsversuch[29]); Cantor aber findet in seiner ersten Darstellung[30]), wenn wieder die S. 217 verwendeten Zeichen gebraucht werden, dass man dort nur $\beta = \gamma = 2$ zu setzen habe, so dass

$$c = \alpha, \quad a = \frac{\alpha^2}{4} + 1, \quad b = \frac{\alpha^2}{4} - 1$$

wird; in seiner zweiten Darstellung[31]) aber sagt er, dass die Annahme von $(a - b) = 2$ zur Folge hatte, $(a + b)$ gleich dem Doppelten einer Quadratzahl $(= 2\varepsilon^2)$ oder gleich der Hälfte einer geraden Quadratzahl $\left(= \frac{(2\varepsilon)^2}{2}\right)$ setzen zu müssen, so dass also von selbst

$$c = 2\varepsilon, \quad b = \varepsilon^2 - 1, \quad a = \varepsilon^2 + 1$$

wurde. — Bretschneider endlich spricht sich dahin aus[32]), es sei „leicht zu sehen, dass Platon nur die Zahlen, welche bei der Regel des Pythagoras angewendet werden, zu verdoppeln brauchte, um sofort die von ihm selbst aufgestellte Regel zu erhalten“.

Auch ich meine, dass in gewissem Sinne nur an ein Verdoppeln zu denken war; aber dem vorhin Dargelegten entsprechend scheint mir die einfachste Erklärung die, dass der Erfinder des Verfahrens versuchte, ob nicht auch bei zweizeiligem Umrändern des Quadrates (Fig. 13), was ja jedenfalls zu einem neuen Quadrat führen musste, der Gnomon selbst auch einer neuen Quadratzahl identisch sein könne. Er nahm ihn demnach als solche an; diese Quadratzahl enthielt dann das aus vier Einheiten bestehende Eckquadrat sammt den vier je gleichviele Einheiten zählenden Ansatzreihen [d. i. $= 4 + 2a + 2a = 4(a+1)$], so dass die Seite des dem Gnomon identischen Quadrats als eine gerade Zahl sich darstellte und dass der vierte Theil dieses Quadrats oder, was dasselbe, das Quadrat der Hälfte seiner Seite [d. i. $(a+1)$] die um 1 vergrösserte Anzahl von Einheiten des

Fig. 13.

ursprünglichen noch nicht umränderten Quadrats zur Seite hat; eine Verminderung oder Vermehrung dieser Seite je um 1 giebt also die Seite des ursprünglichen kleineren, bezw. die des neu gebildeten grösseren Quadrates [d. i. a und $(a+2)$].

Man wird wohl auch dieser Wiederherstellung das Zeugniss der Natürlichkeit und Ungezwungenheit nicht versagen können.

Es erledigt sich mit ihrer Annahme auch die von Bretschneider (a. a. O. S. 140) aufgeworfene, aber unentschieden gelassene Frage, „ob Platon seine Regel streng bewiesen oder sich mit einer Induction begnügt hat“: die Regel wurde eben durch Induction gefunden, aber diese Induction war hier ihrer Natur nach gleichwerthig mit dem Beweise.

Und auch die andere von Röth (II, 527) zur Discussion gebrachte Frage, ob nicht die beiden Verfahrungsweisen zur Auffindung rationaler Seiten des rechtwinkligen Dreiecks zu gleicher Zeit entstanden sein möchten, ist trotzdem, dass nach altüberlieferten Zeugnissen die eine dem Pythagoras, die andere dem Platon zugeschrieben wird, gar nicht so unbedingt zu verneinen, wie dies Cantor gegenüber Röth thut[33]; denn nach meiner Auffassung wenigstens über die Entstehung wäre man berechtigt, sich zu wundern, wenn nicht beide gleichzeitig aufgefunden worden wären.*

III. Das zweite Buch der Elemente Euklid's. — 11. Bretschneider's Untersuchungen über die Geometrie und die Geometer vor Euklid

---

* Es wäre sogar auch denkbar, dass man noch andere analoge Regeln zu finden vermuthet habe, freilich aus dem sofort zu erwähnenden Grunde nicht gefunden hat. Versuchte man nämlich das im Text zweimal angewendete Verfahren auch so weit auszudehnen, dass man durch dreimaliges Umrändern wieder zu einem Quadrat gelangen wollte (Fig. 14), so müsste, in unseren Zeichen ausgedrückt, $9+3a+3a=3\times(2a+3)$ eine Quadratzahl sein, also eine durch 3 theilbare ungerade Zahl, d. h. die zu quadrirende Zahl müsste ein ungerades Vielfaches von 3 sein, etwa s. Dieses s quadrirt, s^2, dann durch 3 dividirt, $\frac{s^2}{3}$, dann 3 subtrahirt, $\frac{s^2}{3}-3$, giebt eine gerade Zahl $(=2a)$, deren Hälfte das gewünschte a ist; $(a+3)$ ist dann die dritte gesuchte Zahl. Z. B. $s=9$, $s^2=81$, $\frac{s^2}{3}-3=24$, Hälfte $=12$, somit: 9, 12, 15. Allgemein: $s=3(2n+1)$, $s^2=9(4n^2+4n+1)$, $\frac{s^2}{3}-3=12n^2+12n$, Hälfte $=6n(n+1)$, so dass als die drei die Aufgabe erfüllenden Zahlen sich herausstellen:

$$3(2n+1),\quad 6n(n+1),\quad 3(2n^2+2n+1),$$

welche auf

$$2n+1,\quad 2n(n+1),\quad 2n^2+2n+1,$$

d. h. auf die durch Pythagoras' Regel zu bestimmende Zahlengruppe hinauskommen.

Fig. 14.

haben die „Elemente" des Letzteren, so sehr sie auch vom Gesichtspunkte der Logik aus wunderbar einheitlich aufgebaut sind, gleichwohl, was geschichtliche Entwickelung betrifft, als eine An- und Ineinanderfügung von Satz- und Constructionsgruppen recht verschiedenen Alters erkennen lassen. So hat Bretschneider selbst die Ausdehnung des Pythagoreischen Satzes auf spitz- und stumpfwinklige Dreiecke (Eukl. II, 12 u. 13) als voreuklidisch, ja vorhippokratisch (also vor der Zeit um 410 v. Chr.) nachgewiesen; er hat auch die richtige Empfindung gehabt, dass der wesentliche Gehalt des zweiten Buches überhaupt voreuklidisch, ja fast pythagoreisch zu nennen ist, indem er sich dahin aussprach[34]), dass die genannte „Erweiterung der Planimetrie, mit welcher der Natur der Sache nach die Entwickelung der meisten Sätze des zweiten Buches der Euklidischen Elemente zusammenhängt, ist demnach ein Verdienst, welches, wenn nicht den unmittelbaren Schülern des Pythagoras, so doch wenigstens der zweiten Generation derselben zufällt."

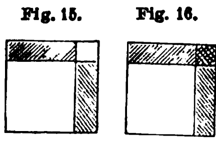
In der That, es wird dies nicht leicht bestritten werden können, und wenn auch Bretschneider nur von den „meisten Sätzen" des zweiten Buches im angeführten Sinne redet, so glaube ich zeigen zu können, dass man ruhig die „meisten" durch „alle" ersetzen kann.

Dies nachzuweisen, ist die Absicht dieses dritten Theiles meines Aufsatzes, und zwar möchte ich im Einzelnen, Satz um Satz, zeigen, dass jeder derselben ein natürliches Ergebniss derjenigen Art von Betrachtungen war, wie ich sie oben als für Pythagoras und seine Schule giltig dargelegt habe.

12. Ich machte die einfache Annahme, dass die ersten Untersuchungen zur Zeit des Pythagoras an die Aneinanderreihung von Rechensteinen sich anknüpften und, wenn sie sonach auch einen geometrischen Hintergrund hatten, doch im Wesentlichen arithmetischer Natur waren. Das Bestreben nach rascherer Darstellung der Rechensteinstreifen in Verbindung mit der Freude am Studium der Formen an sich führte gewiss bald dazu, blos Rechtecks- und Quadrat-Figuren als Substrate der bezüglichen Zahlen zu zeichnen und so die Betrachtung zu einer rein geometrischen umzugestalten.

Nun war die quadratische Zahl ein Quadrat, die rechteckige Zahl ein Rechteck, die Ränderungszahl ein eigentlicher Gnomon, eine dem Winkelhaken vergleichbare Fläche geworden, und was man seither vielfach geübt, ohne besondere Redewendungen dafür zu gebrauchen, ward nun in bestimmten schulmässigen Ausdrücken, in Lehrsätzen fixirt: 1. dass ein Rechteck in mehrere gleichbreite zerlegbar sei; 2. dass ein Quadrat in Rechtecke, und 3. dass auch ein Rechteck in zwei Theile, in ein Quadrat und ein überschiessendes Rechteck zerlegt werden könne; 4. dass der Gnomon, welcher einem Quadrat zugefügt werden müsse, um dasselbe in ein grösseres Quadrat zu verändern, aus zwei gleichgrossen

Rechtecken und einem Quadrat bestehe (Fig. 15); 5. dass, wenn einem Quadrat das ganze durchgehende Rechteck eines Gnomons beiderseits angefügt werde (Fig. 16), das Ergebniss der Summe zweier Quadrate gleichwerthig sei, und endlich 6. war es auch nur ein Feststellen dessen, was man bei wiederholtem Umrändern eines Quadrats so oft hatte auftreten sehen, dass nämlich (Fig. 17) ein zweimaliges Anfügen desRechtecks β an das Quadrat α ein überschüssiges Quadrat giebt, dass aber, wenn man dieses als γ anfügt und darauf noch die Lücken durch die zwei mit β gleichen Rechtecke δ ausfüllt, dass dann wieder ein Quadrat entstehe.


Fig. 15. Fig. 16.

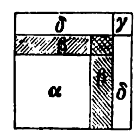


Fig. 17.

Dies ist der Gehalt der vier ersten Sätze und des siebenten und achten Satzes des zweiten Buches — dass diese aber in einem dem meinigen ähnlichen Wortlaut zuerst ausgesprochen wurden und nicht in der starren schulmässigen Form, wie sie sich bei Euklid finden, ist wohl zuzugeben.

Der Gnomon war in der interessanten Untersuchung, welche zu dem Pythagoreischen Satze führte, als genau einem Quadrate gleichwerthig erkannt worden. Es schloss sich naturgemäss der Wunsch, bezw. die Frage an, ob nicht jedes Rechteck in ein Quadrat umgewandelt werden könne — dass dies entsprechend der bei Ränderung eines Quadrates auftretenden Figur, freilich vorerst auch nur unter gleichzeitiger Zufügung eines Quadrats, möglich sei, behaupten die Sätze 5 und 6 unseres zweiten Buches.

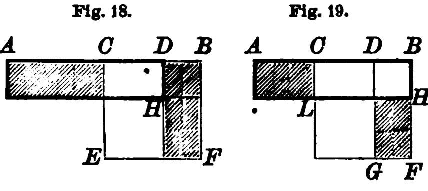


Fig. 18. Fig. 19.

Erstens nämlich (Fig. 18): wenn das Rechteck AH vorlag, so war der Gedanke naheliegend, einen Theil desselben als DF anzufügen, um zur quadratischen Gestalt CF zu gelangen; dann musste $DB = DH$ und $FB = BC$, also letztere Strecke $= CA = \frac{AB}{2}$ gemacht werden, und so entstand der Satz, dass

$$\text{Rechteck } AH + \text{Quadrat } EH = \text{Quadrat } CF$$

sei.

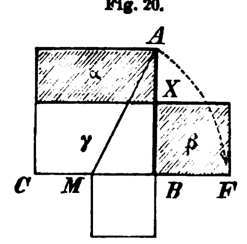
Zweitens (Fig. 19): wenn wieder das Rechteck AH vorlag, so konnte (immer in der Absicht, die Gestalt der Fig. 16 herzustellen) ein Theil des Rechtecks als HG angefügt werden, um zur quadratischen Gestalt CF zu gelangen; dann musste $DB = BH$ und $HF = DC$, also letztere Strecke $= CA = \frac{AD}{2}$ gemacht werden, und so entstand der Satz, dass

$$\text{Rechteck } AH + \text{Quadrat } LG = \text{Quadrat } CF$$

sei.

13. Den Gedankengang der zwei zuletzterwähnten Sätze aufnehmend und weiterführend, erscheint im zweiten Buche die die Nummer 11 tragende berühmte Aufgabe: „Eine Strecke so zu theilen, dass das aus der ganzen Strecke und einem der beiden Abschnitte gebildete Rechteck dem Quadrat des übrigen Abschnittes gleich sei" — oder in dem andern Wortlaut, wie sie in VI, 30 wieder erscheint: „Eine Strecke soll nach stetiger Proportion getheilt werden." So paradox diese Aufgabe auch im Gebiete der Proportionslehre klingen mag (wo sie ja verlangt, die mittlere Proportionale zu construiren zwischen einer gegebenen Strecke und einer andern, deren Grösse erst nach Lösung der Aufgabe bekannt sein wird), so einfach ergab sie sich für einen denkenden Kopf im Gebiete der Flächenvergleichung. Waren seither Rechtecke in Gnomone, oder beide sammt Quadraten in Quadrate umgewandelt worden, so sollte nun auch (Fig. 20) das Rechteck α aus der Strecke AB und einem ihrer Theile AX in das über dem Reste XB beschriebene Quadrat β umgewandelt werden.

Fig. 20.



Wurde α durch γ zu einem Quadrat ergänzt, so musste das Rechteck $(\beta+\gamma)$ = dem Quadrate $(\alpha+\gamma)$ sein, während der Satz 6 (Fig. 19) gelehrt hatte, dass ein Quadrat erhalten werde als gleichwerthig mit einem Rechteck sammt einem Quadrat von bestimmter Art der Zeichnung. Wurde also letzteres als δ, nämlich als das Quadrat über MB, der Hälfte von BC zugefügt, so fand sich eben dem Satze 6 zufolge, dass

$$\text{Rechteck } (\beta+\gamma) + \text{Quadrat } \delta = \text{dem Quadrate über } MF$$

sei; andererseits aber galt dem Pythagoreischen Satze zufolge die Gleichung

$$\text{Quadrat } (\alpha+\gamma) + \text{Quadrat } \delta = \text{dem Quadrate über } MA;$$

das Quadrat über MF wurde also dem über MA gleich und damit überhaupt die Aufgabe gelöst, wenn

$$MF = MA$$

gemacht wurde.

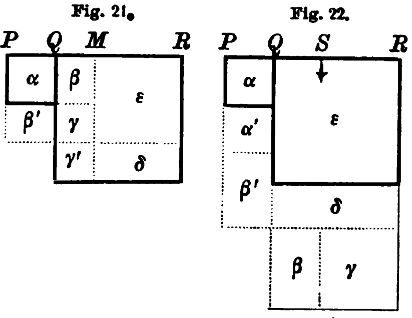
Die Construction, um AB in X wie verlangt zu theilen, besteht also darin, dass über AB das Quadrat AC gezeichnet, dann nach dessen einer Seitenmitte M die AM gezogen und diese nach MF abgetragen wird; die Construction des Quadrats über BF giebt dann den gewünschten Theilpunkt X.

Im Euklid'schen Beweise zu II, 11 ist die Ursprünglichkeit der Analysis ganz wohl noch zu erkennen, nicht minder auch in Beweis und Figur zu VI, 30.

14. Anders freilich muss das Urtheil lauten über die für meine Betrachtung noch übrig gebliebenen Sätze 9 und 10 des zweiten Buches, bezw. über deren Beweise. Denn dass die Sätze selbst naturgemäss in

diese ganze Reihe von Betrachtungen gehören, habe ich schon zu Anfang der vorigen Nummer angedeutet; dass aber ihre bei Euklid sich findenden Beweise der Ursprünglichkeit entbehren, scheint mir gewiss.

Ich versuche diese herzustellen, indem ich die zu addirenden Quadrate über PQ und QR einfach neben einander zeichne (Fig. 21 u. 22) und die in beiden Fällen entstehende sechseckige Figur in Quadratgestalt zu verwandeln suche zunächst dadurch, dass ich entweder über jeder Hälfte von PR das Quadrat zeichne (Fig. 21) oder über der ganzen Strecke PR das Quadrat zeichne (Fig. 22). Im ersteren Falle müssen von den entstehenden Theilflächen $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \beta' + \gamma$ sein, so dass die Summe der zwei Quadrate $= \alpha + \beta + \gamma + \gamma' + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \gamma' + \gamma' + \beta' + \varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \beta') + 2\gamma' + \varepsilon = \varepsilon + 2\gamma' + \varepsilon = 2.(\varepsilon + \gamma')$, d. i. nach heutiger Bezeichnung $= 2.[\overline{PM}^2 + \overline{MQ}^2]$ ist. — Im zweiten Falle bleibt ein zweites mit α gleiches Quadrat α' ganz innerhalb, ein zweites mit ε gleiches Quadrat $(\beta + \gamma + \delta)$ fällt theilweise ausserhalb des Quadrates über PR und es ist $\beta = \beta'$, wenn die Grenzlinie zwischen β und γ durch S gezogen wird, wo $SQ = QP$ gemacht ist; dann ist $\alpha + \varepsilon = \frac{1}{2}[\alpha + \alpha' + \varepsilon + \delta + \beta + \gamma] = \frac{1}{2}[(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \delta + \beta') + \gamma]$, d. i. nach heutiger Bezeichnung $= \frac{1}{2}(\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2)$, woraus sofort die Euklidische Behauptung folgt:



$$\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 = 2(\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2).$$

Hiermit glaube ich gezeigt zu haben, dass auch der Gegenstand dieses dritten Theils meines Aufsatzes mit dem in den beiden ersten Theilen Behandelten im inneren Zusammenhang steht, dass also mein Thema in der That ein einheitliches ist.

Anmerkungen.

1) So auch Cantor auf S. 153 seiner „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Band. Leipzig 1880" (weiterhin kurz durch „Cantor, G." bezeichnet).

2) C. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870, S. 81.

3) M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863, S. 103 (weiterhin kurz durch „Cantor, B." bezeichnet).

4) S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen 1876. S. 39.

5) Cantor, B., S. 92 und Cantor, G., S. 130.

6) Cantor, G., S. 135, 138, 142 und E. Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. 4. Aufl. I. Bd. Leipzig 1876, S. 373 ff.

7) Zeller a. a. O. I, S. 365 nach Aristot., Metaph. XIV, 5. 1092, *b*, 10 und Theophrast, Metaph., S. 312 Br.

8) Cantor, G., S. 143 nach Aristot., Metaph. XIV, 4.

9) Zeller a. a. O. S. 366.

10) Cantor, G., S. 143 nach Nicomachus, Eisag. ar. II, 12 (ed. Hoche), S. 96.

11) Cantor, G., S. 143 nach Plut. Platon. Quaest. V, 2. 4.

12) Günther a. a. O. S. 41 und Cantor, B., S. 106 f und G., S. 143 f.

13) Bretschneider a. a. O. S. 82.

14) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874, S. 98.

15) Cantor, G., S. 153.

16) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, I. Abth. III. Theil. Leipzig 1808, S. 932.

17) Die erste Ausgabe des Euklid durch Clavius ist – vgl. Kästner's Gesch. d. Math. I, 324 – vom Jahre 1574 ohne Erläuterungen, die zweite mit solchen aus dem Jahre 1589, die dritte aus dem Jahre 1591. Ich benütze den Frankfurter Abdruck vom J. 1607, und in diesem findet sich die im Text citirte Stelle im Scholium zu Buch I, 47, S. 151.

18) Bretschneider a. a. O. S. 82. – Vergl. Hankel a. a. O. S. 98; Günther a. a. O. S. 42; Cantor, G., S. 157.

19) Klügel, Math. Wörterb. Bd. III S. 932.

20) Aus diesem Buche von Henry Boad (London 1733) hat denselben Beweis auch Joh. Hoffmann in seiner Sammlung von Beweisen des Pyth. Satzes (1821) entnommen und hat darnach noch sechs andere Beweisanordnungen abgeleitet. Vergl. die neuere Schrift von Jury Wipper, 46 Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, übers v. F. Graap. Leipzig 1880, S. 17.

21) G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S. 150.

22) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart 1852, S 83.

23) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 527 (nach Cantor, G., S. 157). – A. a. O. sagt auch Cantor, dass der im Text skizzirte Weg von Röth „zuerst vermuthungsweise geschildert worden ist".

24) Cantor, B., S. 108 f.

25) Cantor, G., S. 157 f.

26) Bretschneider a. a. O. S. 83.

27) Hankel a. a. O. S. 100 u. 132.

28) Günther a. a. O. S. 41.

29) Arneth a. a. O. S. 95.

30) Cantor, B., S. 109.

31) Cantor, G., S. 192.

32) Bretschneider a. a. O. S. 140.

33) Cantor, B., S. 109.

34) Bretschneider a. a. O. S 134

Recensionen.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra. Für den Schul- und Selbstunterricht in entwickelnder Lehrform bearbeitet von H. Tödter in Geestemünde. Dritter Theil. Ausgabe A 100 S. Ausgabe B 48 S. Pr. 1 Mk. 50 Pf.

Der Unterzeichnete hat bereits (in der Allg. Schulzeitung, 1878) die beiden ersten Theile des vorstehend genannten Werkchens angezeigt und hält es deshalb für seine Pflicht, ein Gleiches auch mit der nunmehr vorliegenden Fortsetzung desselben zu thun. Er kann im Wesentlichen nur Das wiederholen, was er damals gesagt hat, dass nämlich das Buch eine anspruchslose, aber recht anerkennenswerthe Leistung darstellt. Es ist natürlich nicht sowohl für die Zöglinge höherer Schulen, als vielmehr für Lehrerseminare und besonders für den Selbstunterricht bestimmt und wird den didaktischen Grundsätzen Diesterweg's, welche der Verf. ausdrücklich zur Richtschnur nehmen zu wollen erklärt hat, durchweg gerecht. Ausgabe A ist wesentlich der Theorie gewidmet, doch sind jedem Abschnitte auch die zur unmittelbaren Einübung nothwendigen Beispiele beigegeben. An erster Stelle begegnen wir der Lehre von den Potenzen, und zwar werden zuerst diejenigen mit ganzen positiven Exponenten vollständig abgehandelt, während erst nachher die Formen a^0 und a^{-m} der Betrachtung unterstellt werden. Ueber das Wesen dieser Symbole ist sich der Verf. klar, denn er sagt ganz mit Recht (S. 15), dass a^0 blos ein „Zeichen" für die Zahl 1 sei; doch hätte die Thatsache, dass man es in diesem Paragraphen mit Definitionen und nicht mit Lehrsätzen zu thun habe, noch etwas schärfer betont werden sollen. Es folgt die Wurzellehre, die sehr ausführlich behandelt ist; daran schliesst sich das Logarithmiren, welches der Verf. in einem von der heute beliebten Weise abweichenden Sinne auf die Vergleichung einer arithmetischen und geometrischen Progression mit interpolirten Zwischengliedern begründet. Der Gebrauch der Tafeln ist einlässlich gezeigt, die logarithmischen Gleichungen dagegen beschränken sich auf einige einfachere Fälle. Systematisch nicht ganz zu billigen ist, dass schon auf S. 45 von geometrischen Reihen Gebrauch gemacht wird, während deren eigentliche Theorie erst auf S. 64 beginnt. Im Uebrigen ist an deren Vortrag nichts auszusetzen und ebenso wenig an dem der darauffolgenden Zinseszins- und Rentenrech-

nung, bei welcher auch anhangsweise auf die Berechnung der Lebensversicherungsprämien Bedacht genommen wird. Ausgabe B ist eine recht vollständige Sammlung von Uebungsaufgaben, die auch von einem sonst nach anderen Lehrbüchern unterrichtenden Lehrer mitbenutzt werden kann. Angehängt ist beiden Theilen eine Sterblichkeitstabelle.

Ansbach. Prof. Dr. S. Günther.

Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik, von Dr. Reiff. Freiburg und Tübingen 1882. 43 S.

Eine Doctordissertation, welche sich mit den Längen- und Richtungsveränderungen eines unendlich kleinen Linienelements in einer Flüssigkeit beschäftigt. Es wird die Dilatation, das Verhältniss der Verlängerung des Elements zu seiner Länge und die Rotation oder die Drehung des Elements ausgedrückt. Aus der linearen Dilatation wird die des Volumelements abgeleitet, bei der Rotation wird nachgewiesen, dass im Allgemeinen keine momentane Rotationsaxe existirt, wie bei festen Körpern. Ist dies der Fall, so erhält man die Wirbelbewegung, wie sie von Helmholtz und Thomson aufgestellt wurde.

P. Zech.

Einleitung in die höhere Optik, von Beer. 2. Aufl. von Victor v. Lang. Braunschweig 1882. 423 S.

Vor 30 Jahren ist die erste Auflage dieses Werkes erschienen und hat damals den Studirenden als willkommene Einleitung für weitergehende Studien gedient. Es ist erfreulich, dass eine Neubearbeitung desselben erscheint und dass den grossen Fortschritten der Optik insbesondere in der Spectralanalyse Rechnung getragen wird. Eine durchweg befriedigende Theorie der Krystalloptik fehlt noch, von verschiedenen Seiten her wird daran gearbeitet. Was für den Anfänger von Interesse ist, wird hier mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln abgeleitet. Diese zweite Abtheilung ist am meisten abgeändert. Das Werk ist jedem angehenden Physiker zu empfehlen, die Ausstattung vorzüglich.

P. Zech.

Lehrbuch der Experimentalphysik, von Wüllner Leipzig 1882. 848 S.

Von dem grössten und ausführlichsten Lehrbuche der Physik erscheint hier in vierter Auflage der erste Band, die allgemeine Physik und Akustik umfassend. Die Umarbeitung hat als neu aufgenommen die elastische Nachwirkung und die innere Reibung. Diffusion und dynamische Gastheorie sind ausführlicher behandelt. In den ersten zwei Abschnitten

wird das in der Mechanik gebräuchliche Maasssystem beibehalten (das conventionelle System nach Herwig). Als Anhang wird das absolute Maasssystem kurz auseinandergesetzt und von da an in den folgenden Abschnitten angewendet. Die zwei letzten Abschnitte, Wellenbewegung und Akustik, sind nicht wesentlich geändert. Dass ich mit der Art der Behandlung der Waage und der Feststellung des Begriffes der Schwere nicht einverstanden bin, habe ich schon öfter ausgesprochen (z. B. 22. Bd. dieser Zeitschrift). Es hängt sicherlich damit zusammen, dass den verschiedenen Theilen des Werkes verschiedene Maasssysteme zu Grunde liegen. In ein Lehrbuch der Physik gehört heutzutage nicht mehr das conventionelle Maasssystem, sonst wird der mechanische Theil der Physik einseitig behandelt und das Verständniss der Bedeutung von Waage und Pendel erschwert.

P. Zech.

Lehrbuch der Physik, von Wallentin. Für Gymnasien. 3. Aufl. Wien 1882. 384 S.

Die erste, im Jahre 1879 erschienene Auflage wurde früher angezeigt. Eine wesentliche Aenderung ist nicht eingetreten, die Ausstattung ist etwas verbessert, dagegen gilt noch Alles, was bei der Besprechung der ersten Auflage gerügt wurde.

P. Zech.

Grundzüge der Naturlehre, von Wallentin. Wien 1881. 229 S.

Ein Auszug aus dem vorigen für untere Classen.

P. Zech.

Allgemeine Witterungskunde, von Dr. H. J. Klein. Leipzig 1882. 260 S.

Ein Band aus dem „Wissen der Gegenwart, deutsche Universalbibliothek für Gebildete". Der durch seine Arbeiten auf naturwissenschaftlichem Gebiete wohlbekannte Verfasser giebt hier eine Darstellung des heutigen Standes unseres meteorologischen Wissens, mit besonderer Berücksichtigung der gegenwärtig von verschiedenen Centralstellen ausgehenden Wettervoraussagen. Wie in dem vielverbreiteten Werke von Mohn, ist die Zusammenstellung von Thatsachen Hauptzweck. Die Erklärung der Erscheinungen tritt mehr zurück. Gegenüber früheren Darstellungen mit einer Menge unhaltbarer Hypothesen und Theorien muss dies leider als Fortschritt betrachtet werden, bis einmal einiges Licht in die Meteorologie kommt.

P. Zech.

Das Mikroskop und seine Anwendung, von Dippel. Braunschweig 1882. I. Theil, 1. Abtheilung. 2. Aufl.

Das bekannte Werk, das als erstes auf diesem Gebiete gilt, erscheint hier in neuer Auflage, vielfach umgeändert und verbessert mit Hilfe der Arbeiten von Abbe, dessen Unterstützung dem Verfasser rückhaltlos zu Theil geworden ist. Eine nähere Besprechung behält sich der Unterzeichnete bis zum vollständigen Erscheinen des ersten Theiles vor, der ein „Handbuch der allgemeinen Mikroskopie" bildet, während der zweite Theil die Anwendungen giebt.

P. Zech.

Die Lehre von der Elektricität, von Gustav Wiedemann. Braunschweig 1882. I. Band. 795 S.

Unter dem Namen „Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus" erschien 1861 in erster, 1874 in zweiter Auflage ein Werk von G. Wiedemann, welches alles auf diesem Gebiete Geleistete vollständig umfasste und überall die Quellen namhaft machte. Dieses Werk hat die Bewunderung des Auslandes auf sich gezogen, wie namhafte ausländische, besonders englische Gelehrte in letzter Zeit bezeugten; in Deutschland ist es längst als sicherer Führer auf dem Gebiete der Elektricität bekannt. Eine Bearbeitung der Reibungselektricität besitzen wir in dem ausgezeichneten Werke von P. Riess, das jedoch seit dem Jahre 1853 nicht mehr aufgelegt worden ist. Da heutzutage eine getrennte Behandlung der statischen und dynamischen Elektricität nicht mehr haltbar ist, so hat sich der Verfasser entschlossen, das gesammte Gebiet der Elektricität zu bearbeiten. Davon liegt der erste Band vor, welcher mit den allgemeinen Eigenschaften der Elektricität beginnt, dann die Elektricitätserregung bei Berührung heterogener Körper behandelt und im dritten Abschnitt das Verhalten der Leiter in Beziehung zum Ohm'schen Gesetz, Widerstand und elektromotorischer Kraft bespricht. Die Anerkennung, die, wie oben erwähnt, das Werk überall gefunden hat, überhebt uns eines Lobes; betonen möchten wir nur die erfreuliche Erscheinung, dass eben jetzt in der Zeit der ungeheuren praktischen Fortschritte auf dem Gebiete der Elektricität ein zuverlässiger Führer uns geboten wird.

P. Zech.

Der Chemismus, Magnetismus und Diamagnetismus im Lichte mehrdimensionaler Raumanschauung, von Richard Bresch. Leipzig 1882. 146 S.

Der Verfasser spricht seine Entrüstung darüber aus, dass die Physiker und Physiologen vom Spiritualismus nichts wissen wollen. „Erst ein dänischer Kaufmann musste kommen, um die Herren Doctores, sie bei den Haaren herbeiziehend, mit ihrem blöden Schädel auf die biomagnetischen Thatsachen zu stossen." Wenn man trotz dieser freund-

lichen Bewillkommnung die Lectnre fortsetzt, so findet man das Bedauern, dass selbst Zöllner den Versuchen Hansen's nicht ganz getraut habe. Wenn ein wirklicher Knoten in geschlossener Schnur geschürzt wird, so hat ein „Diakka", ein Sachverständiger aus der vierten oder fünften Raumdimension, diese That gethan, indem er für einen Moment einen hinreichend breiten Querschnitt des Stoffes so weich wie Wasser gemacht hat! Es wird dann ausgeführt, dass die Atome mehrdimensional sein müssen, das Atom liegt mit seinem Schwerpunkte und einem dreidimensionalen Durchschnitte im dreidimensionalen Raume, geht aber im Uebrigen nach dem mehrdimensionalen Raume hinaus. Chemische Processe müssten dann in verschiedener Höhe verschieden verlaufen. „Es wäre im höchsten Grade wünschenswerth, dass eine Nordpolexpedition mit solchen Untersuchungen beauftragt würde." Es erklärt sich damit die Thatsache, dass ein und dasselbe Atom in verschiedenen Verbindungen mit verschiedener Valenzenanzahl auftreten kann, da die mehrdimensionalen Atome gewisse specielle mehrdimensionale Drehungen annehmen können, ohne dass eine Aenderung im dreidimensionalen Raume stattfindet. „Der Diamagnetismus mit seinen räthselhaften Erscheinungen erklärt sich einfach dadurch, das die durch Induction in den aus dem dreidimensionalen Raume herausgerichteten Magnetaxen ursprünglich entstandene Abstossung nicht in Anziehung verwandelt werden kann, weil hierzu eine dreidimensionale Drehung erforderlich, der sich die chemischen Kräfte und die die dreidimensionale Welt als solche erhaltende Kraft widersetzen." Ob unser „blöder Schädel" mit diesen wenigen Sätzen eine Andeutung von dem Inhalt zu Stande gebracht hat, müssen wir dem Leser zur Beurtheilung überlassen.

P. Zech.

Technologisches Wörterbuch in englischer und deutscher Sprache. In Verbindung mit P. R. Bedson (Manchester), O. Brandes (Braunschweig), M. Brütt (Hamburg), Ch. H. Burghardt (Manchester), Th. Carnelly (Manchester), J. J. Hummel (Leeds), J. G. Lunge (Zürich), J. Lüroth (München), G. Schäffer (Newcastle), W. H. M. Ward (Manchester), W. C. Williams (Manchester) bearbeitet und herausgegeben von Gustav Egem (Darmstadt). Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1882.

Wir stimmen den Gründen, welche zur Herausgabe eines zweisprachigen technischen Wörterbuches geführt haben, vollkommen bei und empfehlen auch den vorliegenden ersten Band (englisch-deutsch) Allen, welche die französischen Uebersetzungen — wie sie das bekannte dreisprachige technologische Wörterbuch bietet — nicht benöthigen und dafür lieber eine eingehendere Belehrung über die Bedeutung der englischen

Wörter suchen. Freilich bedingt letzterer Anspruch des vorliegenden Werkes eine weitergehende, recht fleissige Ausfeilung sachlicher Erklärungen technischer Ausdrücke, stellenweise auch eine Richtigstellung. Es scheint doch, dass für das weite Gebiet der mechanischen Technologie und des Maschinenwesens der deutsche Mitarbeiter (ein Chemiker!) eine über die Kräfte des Einzelnen reichende Arbeit übernommen hat. Nur ein paar Belege für unser Urtheil:

Adressing machine dient nicht nur zum Adressiren von „Zeitungsblättern“.

Adge ist Texel, Krummhaue, nicht Zimmerbeil.

Agricultural implements beschränkt sich nicht allein auf Ackerbaugeräthe, der Ausdruck umfasst „landwirthschaftliche“ Geräthe überhaupt.

Agricultural steam engine, die Landwirthschafts-Dampfmaschine, eine kaum gebräuchliche Bezeichnungsweise im Deutschen.

Air cushion ist in diesem Sinne ein Luftpuffer zur Aufnahme von Stössen u. dgl., also nicht synonym mit „*Air bed*“.

Allowance wird in der Münzsprache nicht „Nachlass“ genannt.

Auger, square hole — soll der „viereckige“ Bohrer heissen?

To card, carding engine heisst im Deutschen auch „Kardiren“, bez. „Karde“.

Rap heisst deutsch „Gebinde“, von welchen sieben auf einen Schneller (*number* oder *skein*) gehen. *Skein* = Gebinde ist falsch.

Rash, Rasch, Zeugrasch (vierschäftig geköperter Kammwollstoff, meist aus grober Wolle leicht gearbeitet; ehemals verfertigte man auch Tuchrasch aus kurzer gekrempelter Wolle). ...

Die Anordnung des Stoffes ist geschickt und die Ausstattung vorzüglich.

Zeman.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, nebst einer Aufgabensammlung. 3. Aufl. Preis 2 Mk. 50 Pf.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 3. Aufl. 1 Mk.

Lehrbuch der Geometrie. I. Theil: Planimetrie. 6. Aufl. 1 Mk. 80 Pf.

Lehrbuch der Geometrie. II. Theil: Stereometrie. 3. Aufl. 1 Mk. 20 Pf.

Verfasst von Dr. Focke und Dr. Krass. Münster, Coppenrath.

Die vorbenannten Bücher sind zum Unterricht an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten bestimmt. Wie die in verhältnissmässig kurzer Zeit wiederholten neuen Auflagen beweisen, haben die Bücher sich einer beifälligen Aufnahme erfreut.

Der Umfang des dargebotenen Stoffes ist durch die amtlichen Bestimmungen begrenzt; auch in der Darstellung weichen die Verfasser vom hergebrachten Gange wenig ab. Es scheint dem Referenten hierin

entschieden die Bescheidenheit zu weit getrieben. Bei richtiger Behandlung des Gegenstandes ist es sehr wohl möglich, sachlich viel weiter zu gehen, ohne den Durchschnittsschüler irgend mehr zu belasten. Im Gegentheil! Das Interesse, welches aus der Natur des Gegenstandes hervorgeht, vermag den jugendlichen Geist über Schwierigkeiten hinwegzuheben; die Besiegung derselben gewährt ihm das Gefühl erlangter Kraft, und zwar in unvergleichlich höherem Grade, als wenn die Sache so einfach ist, dass kaum ein Beweis nöthig scheint oder die in der Aufgabe geforderte Leistung eine künstlich zurecht gemachte genannt werden muss. Aus diesen Gründen würde Referent die Zahl der Sätze um eine ganz erkleckliche vermindern; er würde sich strengstens auf diejenigen beschränken, welche sich in den Aufgaben als fruchtbar erweisen; aber dann würde er in den Aufgaben selbst unbedenklich weitergehen und z. B. das Tactionsproblem nicht nur nach der alten Methode lösen.

Nachdem ich im Vorhergehenden meinen in Etwas abweichenden Standpunkt ausgesprochen habe, ist es mir Bedürfniss, mich im Uebrigen durchaus anerkennend zu äussern. Interessant und zum grossen Theile neu sind die arithmetischen Aufgaben; zahlreich (600) die planimetrischen, wobei besonders anerkannt werden soll, dass, so weit ich bemerke, nirgends die gehörige Verweisung auf den zur Lösung führenden Satz fehlt. Gleiches gilt von den 228 stereometrischen Aufgaben. In der Trigonometrie vermisse ich den Lehrsatz des Moivre ungern, da er zur Einübung der Rechnung mit Winkeln in höheren Quadranten eine reiche Quelle trefflicher Aufgaben bildet. Die Aufgaben 85 und 120 sind identisch.

Fassen wir unser Urtheil zusammen, so können wir sagen, dass die Lehrbücher sich nach Inhalt und Darstellung eine grosse — dem Referenten scheint es in der Planimetrie eine zu grosse — Enthaltsamkeit auferlegt haben. Dagegen muss anerkannt werden, dass innerhalb dieser Schranken den Lehrbüchern viel Rühmliches nachgesagt werden kann. Sämmtliche Erklärungen stehen an der Stelle, wo sie im Lehrgebäude zuerst auftreten. Sie sind sämmtlich hinreichend vorbereitet und so formulirt, dass der zu erklärende Begriff am Schluss der Definition auftritt. Auch die Form der Lehrsätze ist durch das ganze System hindurch gleichmässig aufgestellt. So heisst es nicht: „In jedem Dreiecke etc.", sondern: „Die Summe der Winkel eines Dreiecks etc."

Die Beweise der Lehrsätze sind theils vollständig gegeben, theils nur angedeutet; das Letztere findet überall da statt, wo der Schüler nach der bisherigen Entwickelung im Stande ist, den Beweis selbst aufzufinden. Für eine Gruppe ähnlicher Sätze ist die Form der Beweise möglichst übereinstimmend. Zweifel an der Auffassung sind durch Wahl möglichst scharfer Ausdrücke thunlichst

vermieden. Gilt das Vorstehende insbesondere rücksichtlich der beiden geometrischen Lehrbücher, so kann es *mutatis mutandis* auch auf die Arithmetik und Trigonometrie übertragen werden.

Druck und Papier sind dem Auge wohlthuend, die Figuren sorgfältig gezeichnet. Die neuesten Auflagen zeichnen sich vor früheren durch grössere Correctheit im Druck sehr vortheilhaft aus. Sonstige Kleinigkeiten hat Referent sich wiederholt gestattet, den Herren Verfassern privatim mitzutheilen. Diese Bemerkungen haben stets freundliche, oft willfahrende Berücksichtigung gefunden.

Coesfeld, im Mai 1883. K. Schwering.

Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Ein Lehr- und Uebungsbuch, bearbeitet von A. Milinowski. II. Theil: Stereometrie. Heft I: Lehrbuch. Heft II: Uebungsbuch.

In den ersten beiden Paragraphen des Lehrbuchs werden die Definitionen und Grundanschauungen der einfachsten räumlichen Gebilde dargelegt; der eigentliche Lehrgang beginnt mit dem § 3, welcher unter der Bezeichnung „Gerade und Ebenen in normaler Lage“ die Fundamentalsätze der Stereometrie behandelt. An die Spitze ist der Satz gestellt: „Der Ort eines Punktes, der von zwei festen Punkten A und B gleiche Entfernungen hat, ist eine Ebene.“ Der Beweisgrund ist, dass der fragliche Ort jede Gerade, die zwei seiner Punkte verbindet, vollständig in sich aufnimmt; daher wäre wohl eine andere Fassung von § 1, I, worauf verwiesen wird und wo es heisst: „Die Ebene nimmt jede Gerade, welche zwei ihrer Punkte verbindet, in sich auf“, logisch erforderlich. Es folgen im § 4 die runden Körper, wo sogar die zwölf Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln Behandlung finden können. Nach kurzer Besprechung der regelmässigen Körper gelangen wir zum Kugelbüschel, zur Polarebene (§ 7) und zu den Kegelschnitten. (S. 15 Z. 15 steht Classe statt Ordnung.) Die ursprüngliche, dem Namen entsprechende Definition dieser Curven führt bald zu einer der Planimetrie angehörigen, S. 18, VI; doch blickt in den folgenden Ausführungen, je nach Bequemlichkeit, die ursprüngliche wieder hervor. Zur Behandlung des Satzes: „Durch fünf Punkte lässt sich stets ein einziger Kegelschnitt legen“ vergleiche man dieselbe Darlegung des Verfassers in seinen „Kegelschnitten“ S. 59; der vom Referenten dort gerügte Fehler ist hier vermieden. Es folgt die Bestimmung der Oberflächen und Volumina, des Schwerpunktes und in der Weise Schellbach's die Behandlung der Maxima und Minima nach „elementaren“ Methoden. (S. 40 Z. 5 v. u. Druckfehler, O st. Null.)

Das Lehrbuch ist nur 46 Seiten stark.

Das Uebungsbuch ist vom Lehrbuch getrennt und kann daher auch von Lehrern gebraucht werden, welche das letztere nicht einführen wollen. Der Inhalt ist ein reicher und ansprechender; wir finden auf 58 Seiten 784 Aufgaben zusammengedrängt. Der Weg zur Lösung wird theils durch die Aufeinanderfolge, theils durch Verweisungen auf Sätze und Aufgaben gezeigt; doch konnte der Verfasser in dieser Beziehung viel weiter gehen als geschehen ist.

Sei es uns gestattet, hier einige wenige Aufgaben herauszuheben. Aufg. 102 lässt die Berührungskugel von vier Kugeln construiren; Aufgabe 138 fragt nach der Höhe des Mittelpunktes einer Kugel über einer horizontalen Ebene, welche auf drei gleichen auf der Ebene liegenden und sich berührenden Kugeln ruht; Aufg. 146 fragt nach den Formen und Grössen derjenigen Figuren, welche man als senkrechte Projectionen eines Würfels erhält: man soll (147) durch einen Würfel ein Loch schneiden, so dass man einen zweiten ebenso grossen hindurchschieben kann. Wie muss (361) ein gerader Kreiskegel beschaffen sein, damit jeder zu einem Axenschnitt parallele Schnitt desselben eine gleichseitige Hyperbel liefert? Aus einem hölzernen Kegelstumpfe (642) ist der grösste quadratische Balken geschnitten; Volumen des Holzabfalls? Schwerpunkt (699) einer halben Hohlkugel? In ein Rotationsellipsoid (764) den Kreiscylinder von grösstem Volumen zu construiren.

Druckfehler sind mir aufgefallen: S. 1 Z. 13 v. o.; S. 7 Z. 9 u. 11 v. u.; S. 8 Z. 16 v. o.; S. 12 Z. 14 v. u.; S. 13 Z. 13 v. o.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass im Lehrbuche S. 2 IV*b* an Stelle von IV*a* kommen muss, und zwar in *b* nur der zweite Beweis.

Möge dem Buche die verdiente Anerkennung nicht fehlen.

Coesfeld, im April 1883. K. Schwering.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1883.

Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 46. Bd. Wien, Gerold. 44 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe, II. Abth. 87. Bd. 1.—5. Heft. Ebendas. 18 Mk. 80 Pf.

Publicationen des königl. preuss. geodätischen Instituts. Astronomisch-geodät. Arbeiten in den Jahren 1881 und 1882. Berlin, Friedberg & Mode. 15 Mk.

Publicationen des astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 12 u. 13 (Photometr. Untersuchungen von G. Müller). Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Preussische Statistik LXXI. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1882. Berlin, Verlag des statist. Bureaus. 3 Mk. 60 Pf.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 70. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann, Müller u. Wangerin. 13. Bd. Jahrg. 1881. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld u. A. Winnecke. 18. Jahrg. 1.—3. Heft. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Annales de l'observatoire de Moscou, publiées par Th. Bredichin. Vol. 9, livr. 1. Moskau und Leipzig, Voss. 6 Mk.

Nautisches Jahrbuch für 1886, herausgegeben vom Reichsamt d. I. unter Redaction von Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. R. v. Hanstein. 32. Jahrg. 2. Heft. Juli—December 1882. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Geschichte der Mathematik und Astronomie.

Bacharach, M., Abriss der Geschichte der Potentialtheorie. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Sartorius, M., Die Entwickelung der Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras und Empedokles. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

Reine Mathematik.

LINDSTEDT, A., Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. Petersburg und Leipzig, Voss. 1 Mk. 50 Pf.

BIERMANN, O., Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

GEGENBAUER, L., Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

IGEL, B., Ueber ein Princip zur Erzeugung der Covarianten. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

MILDNER, R., Ueber Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer höheren arithmetischen Reihe multiplicirt oder dividirt werden. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

OPPENHEIM, S., Ueber eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung. (Akad.) Ebendas. 80 Pf.

HÄNTZSCHEL, E., Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

STAUDE, O., Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen erster Ordnung im System der confocalen Flächen zweiten Grades. (Habilit.-Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

CATALAN, E., Recherches sur la constante G et sur les intégrales Eulériennes. Petersburg und Leipzig, Voss. 1 Mk. 50 Pf.

DIETRICH, R., Die Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch unendliche Reihen. (Dissert.) Jena, Deistung. 60 Pf.

CARL, L., Sammlung algebr. Aufgaben. Hildburghausen, Gadow & S. 80 Pf.

MEYER, W. F., Apolarität und rationale Curven. Tübingen, Fues. 12 Mk.

WILLGROD, H., Ueber Flächen, die sich durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate theilen lassen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

AMESEDER, A., Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte. 2. Mittheil. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

WEYR, E., Ueber eindeutige Beziehungen auf einer Plancurve dritter Ordnung. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

——, Ueber einen Correspondenzsatz. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

LÖWE, O., Ueber die regulären und Poinsot'schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung durch Determinanten. München, Rieger. 1 Mk.

SCHLEGEL, V., Theorie der homogen-zusammengesetzten Raumgebilde. Leipzig, Engelmann. 12 Mk. 50 Pf.

WEYR, E., Die Elemente der projectivischen Geometrie. 1. Heft. Wien, Braumüller. 6 Mk.

HOCHHEIM, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 2. Heft: Kegelschnitte. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

DRASCH, H., Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

PELZ, C., Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen. (Ak.) Ebendas. 90 Pf.

HESS, E., Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung, mit besonderer Rücksicht auf die gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

PRIX, E., Elemente der darstellenden Geometrie. 2. Theil: Schnitte von Ebenen und krummen Flächen, schiefwinkligen und axonometrischen Projectionen, Centralprojection. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften. Berlin, Mittler & S. 30 Mk.

WITTENBAUER, F., Kinematik des Strahles in der Ebene. Graz, Leuschner & Lubensky. 4 Mk.

WILDA, E., Die Kinematik des ebenen Systems, elementar-mathematisch bearbeitet. Brünn, Winkler. 80 Pf.

BAUERNFEIND, M. v., Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometr. bestimmter Höhen. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 50 Pf.

KOLÁČEK, F., Ueber Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. (Ak.) Wien, Gerold. 50 Pf.

HARTIG, R., Die Gasdrucktheorie und die Sachs'sche Imbibitionstheorie. Berlin, Springer. 80 Pf.

REIFF, R., Ueber die Probleme der Hydrodynamik. (Dissert.) Tübingen, Fues. 40 Pf.

NEUMANN, C., Hydrodynamische Untersuchungen, nebst Anhang über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 20 Pf.

WENZ, G., Die mathematische Geographie in Verbindung mit der Landkartenprojection. Stuttgart, Cotta. 7 Mk. 20 Pf.

GALLE, A., Zur Berechnung der Proximitäten der Asteroidenbahnen. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

GERST, J., Methode der Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

ANTON, F., Bestimmung der Bahn des Planeten Cassandra (114). (Akad.) Ebendas. 2 Mk.

HAERDTL, E. v., Bahnbestimmung des Planeten Adria. 2 Thl. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Hepperger, J. v., Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidt'schen Nebels. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schwarz, B., Astronomische Untersuchung über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss. (Akad.) Ebendas. 70 Pf.

Herz, N. u. J. Strobl, Reduction des Auwers'schen Fundamentalkatalogs auf die Leverrier'schen Präcessionscoefficienten. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 80 Pf.

Kremser, V., Die Bahn des zweiten Cometen von 1879. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

Haubner, J., Ueber das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Physik und Meteorologie.

Streintz, H., Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Kroman, H., Unsere Naturerkenntniss, Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Kopenhagen, Höst & S. 10 Mk.

Preston, S. T., Eine dynamische Erklärung der Gravitation. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Ritz, J., Untersuchungen über die Zusammensetzung der Klänge der Streichinstrumente. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 50 Pf.

Pernter, J. M., Psychrometerstudie. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Biehringer, A., Die Wirkungsweise elektrodynamischer Maschinen. Nürnberg, Ebner. 1 Mk. 50 Pf.

——, Schematische Darstellung elektrodynamischer Maschinen. 2 chromolithogr. Wandtafeln. Ebendas. 8 Mk.

Pfaundler, L., Ueber die Mantelringmaschine von Kravogl nebst Vorschlägen zur Construction dynamo-elektrischer Maschinen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Waitz, K., Ueber den Einfluss der galvanischen Polarisation auf die Reibung. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Riecke, E., Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung, und zur Galvanometrie. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Lisnar, J., Zur Theorie des Lamont'schen Variationsapparats für Horizontalintensität. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1882.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Absolute Geometrie.

417. Homogeneous coordinates in imaginary geometry and their application to systems of forces. H. Cox. Quart. Journ. math. XVIII, 178.

Akustik.

418. Harmonische Theilung und consonirender Dreiklang. Schnell. Grun. Archiv LXVIII, 219.

Analytische Geometrie der Ebene.

419. Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLI, 40.
420. Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore. Laquière. N. ann. math. XLI, 561.
421. Sur quelques applications du théorème de Savary relatif aux enveloppes des courbes planes. H. Resal. N. ann. math. XLI, 7.
422. Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt. M. Greiner. Grun. Archiv LXVIII, 1.
423. Sur une courbe du troisième degré ayant un point de rebroussement. E. Dorlet. N. ann. math. XLI, 256.
424. Points d'inflexion de la cubique $x^3+y^3-3kxy+1=0$. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 283.
425. Propriétés de la courbe $27y^2=4x^3$. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 114.
426. On plane curves of the fourth class with quadruple foci. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XVIII, 1.
427. On the stapete points of class-quartics with quadruple foci. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XVIII, 158.
428. Property of a quartic curve with three double points. N. M. Ferrers. Quart. Journ. math. XVIII, 73.
429. The evolute of the symmetrical bicircular quartic. H. Hart. Quart. Journ. math. XVIII, 382.
430. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen. Stammer. Grun. Archiv LXVIII, 18.
431. Ueber die Curve $x^4+x^2y^2=y^2$. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXVIII, 440.

Vergl. Absolute Geometrie. Biangularcoordinaten. Bipolarcoordinaten. Cardioide. Cissoide. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

432. Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques. Picquet. Compt. rend. LXXXVII, 460.
433. De la courbe lieu des positions des centres de courbure d'une courbe gauche, après son développement sur une ligne droite. Aoust. Compt. rend. LXXXVIII, 768.
434. Courbe engendrée au moyen d'une parabole. J. B. Pomey. N. ann. math. XLI, 111.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Krümmung. Mannichfaltigkeiten. Mechanik 647. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

435. Sur la théorie des perturbations des comètes. E. Mathieu. Compt. rend. LXXXVII, 1029.
436. Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable. F. Tisserand. Compt. rend. LXXXVIII, 97, 137, 201, 1229.
437. Formules relatives à la théorie des perturbations planétaires. De Gasparis. Compt. rend. LXXXVIII, 413, 637, 908.
438. Sur le calcul des perturbations. O. Callandreau. Compt. rend. LXXXVIII, 960.
439. New views of Mr. G. H. Darwin's theory of the evolution of the earth-moon system, considered as to its bearing on the question of the duration of geological time. S. Haughton. Phil. Mag. LXIV, 427.
440. Remarques sur les satellites de Mars. Roche. Compt. rend. LXXXVI, 443.
441. Sur l'aplatissement de la planète Mars. H. Hennedy. Compt. rend. LXXXVII, 590.

Vergl. Graphische Auflösungen.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

442. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. A. Sachse. Grun. Archiv LXVIII, 427.
443. Sur la fonction de Jacob Bernoulli et sur l'interpolation. Lipschitz. Compt. rend. LXXXVI, 119.

Bestimmte Integrale.

444. On $\int_0^{\infty} \frac{\cos s x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}} dx$. J. J. Thomson. Quart. Journ. math. XVIII, 377.
445. Valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(x) F_n(x) dx$. Appell. Compt. rend. LXXXVII, 874.
446. On certain definite integrals involving the exponential-integral. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XVIII, 370.
447. Sur une intégrale double. G. Onlow. N. ann. math. XLI, 311.

Biangularcoordinaten.

448. On biangular coordinates. R. W. Genese. Quart. Journ. math. XVIII, 150.

Bipolarcoordinaten.

449. Sur les coordonnées bipolaires. P. Barbarin. N. ann. math. XLI, 15.

C.

Cardioide.

450. Zur Cardioide. Jos. Pleyl. Grun. Archiv LXVIII, 166.

Cissoide.

451. Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde se transforme en elle-même par polaires réciproques. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLI, 473.

Combinatorik.

452. Sur le nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. D. André. Compt. rend. LXXXVII, 838.
453. Sur la partition des nombres. Faà de Bruno. Compt rend. LXXXVI, 1189.

Vergl. Substitutionen 757.

Cubatur.

454. Volumes et surfaces de deux corps de révolution. G. Dostor. Grun. Archiv LXVIII, 421. [Vergl. Nr. 52.]
455. Volumes de deux corps de révolution. Choudadov. N. ann. math. XLI, 374.

D.

Determinanten.

456. Théorie analytique des déterminants. E. Schering. Compt. rend. LXXXVI, 1387.

457. Sur le déterminant dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné. Picquet. Compt. rend. LXXXVI, 310, 1118.

458. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme. C. Runge. Crelle XCIII, 319.

459. Application des propriétés des polynomes homogènes à la discussion de l'équation en S. Ch. Brisse. N. ann. math. XLI, 193.

460. Équation en S de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés. Walecki. N. ann. math. XLI, 401, 556.

461 On Prof. Cayley's theorem regarding a bordered skew symmetric determinant. Th. Muir. Quart. Journ. math. XVIII, 46.

462. On new and recently discovered properties of certain symmetric determinants Muir. Quart. Journ. math. XVIII, 166.

463. On circulants of odd order. Th. Muir. Quart. Journ. math. XVIII, 261.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen 442. Geschichte der Mathematik 555. Zahlentheorie 789.

Differentialgleichungen.

464. New transformations of ordinals. J. Cockle. Phil. Mag. LXIII, 44, 357. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 331.]

465. Supplementary notes on a differential equation. R. Harley. Quart. Journ. math. XVIII, 41. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 294.]

466. Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires. Laguerre. Compt. rend. LXXXVIII, 224.

467. Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. G. Darboux. Compt. rend. LXXXVI, 533, 584.

468. Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires à coefficients quelconques D. André. Compt. rend. LXXXVIII, 230.

469. Sur l'équation différentielle linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. J. Tannery. Compt. rend. LXXXVI, 811, 950.

470. Sur la réduction de certaines équations différentielles du premier ordre à la forme linéaire, par rapport à la dérivée de la fonction inconnue. Halphen. Compt. rend. LXXXVII, 741.

471. Sur l'intégration de l'équation $Ay'^2+Byy'+Cy^2+Dy'+Ey+F=0$. Alexéeff. Compt. rend. LXXXVII, 641.

472. Sur l'équation de Lamé. Brioschi. Compt. rend. LXXXVI, 313.

473. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques. E. Picard. Compt. rend. LXXXVII, 430, 743.

474. Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. Laguerre. Compt. rend. LXXXVIII, 116. — E. Combescure ibid 275.

475. Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique. G. Fouret. Compt. rend. LXXXVI, 586.

476. Sur les points fondamenteau du réseau de surfaces défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre algébrique, linéaire par rapport à ces dérivées. G. Fouret. Compt. rend. LXXXVI, 654.

477. De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques. G. Darboux. Compt. rend. LXXXVI, 1012.

478. Intégrer les équations différentielles simultanées $\frac{dx}{dt}=a_0x+b_2y+b_1z$, $\frac{dy}{dt}=b_2x+a_1y+b_0z$, $\frac{dz}{dt}=b_1x+b_0y+a_2z$. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 230.

479. Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Hamburger. Crelle XCIII, 188.

Vergl. Kugelfunctionen 636.

Differentialquotienten.

480. Sur l'identité de Didon:

$$[1-2(a+b+c+\ldots)x+(a+b+c+\ldots)(aA^2+bB^2+cC^2+\ldots)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\Sigma\Sigma\Sigma\ldots\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots}{2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}\{(x^2-A^2)^\alpha.(x^2-B^2)^\beta \times(x^2-C^2)^\gamma\ldots\},$$

dans laquelle on a $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n$. Escary. Compt. rend LXXXVI, 1014.

Vergl. Formen 523. Potential 722.

Differenzengleichungen.

481. Dans un triangle isoscèle OAB, l'angle à la base A vaut n fois l'angle au sommet O; déterminer le rapport de la base AB au côté OA. A. Picart. N. ann. math. XLI, 33.

E.

Elasticität.

482. Sur la question des conditions spéciales au contour des plaques élastiques. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVI, 108, 461. — M. Levy ibid. 304. [Vergl. Nr. 82.]
483. Des paramètres d'élasticité des solides et de leur détermination expérimentale. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVI, 781.
484. De la détermination du coefficient d'élasticité des différents corps et de leur limite d'élasticité. Phillips Compt. rend. LXXXVIII, 315.
485. Calcul des dilatations éprouvées par les éléments matériels rectilignes appartenant à une petite portion d'une membrane élastique courbe que l'on déforme. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVI, 816.
486. Équilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur, supportant différents poids. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVI, 1260.
487. Sur la dépression que produit, à la surface d'un sol horizontal, élastique et isotrope, un poids qu'on y dépose, et sur la répartition de ce poids entre ses divers points d'appui. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVII, 402, 519, 687, 1077.
488. Des déplacements que produit, à l'intérieur d'un sol élastique, une pression normale exercée en un point de sa surface. J. Boussinesq. Compt rend. LXXXVIII, 741.
489. Sur la résistance des chaudières elliptiques. H. Resal. Compt. rend. LXXXVIII, 997.

Vergl. Potential 728, 729.

Elektrodynamik.

490. On the different systems of measures for electric and magnetic quantities. R. Clausius. Phil. Mag. LXIII, 381; LXIV, 124. — J. D. Everett ibid. LXIII, 376, 431. — J. J. Thomson ibid. 427; LXIV, 225. — J. Larmor ibid. LXIII, 429. — C. K. Wead ibid. 530. — O. J. Lodge ibid. LXIV, 357. — E. B. Sargant ibid. 395. — H. Helmholtz ibid. 430.
491. On a method of approximating to the solution of electrostatic problems. W. D. Niven. Quart. Journ. math. XVIII, 266.
492. Sur diverses propriétés dont jouit le mode de distribution d'une charge électrique à la surface d'un conducteur ellipsoïdal. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVII, 978.
493. On the distribution of electricity on a bowl. N. M. Ferrers. Quart. Journ. math. XVIII, 97.
494. Sur la théorie de la propagation de l'électricité dans les conducteurs. Mascart. Compt. rend LXXXVI, 965.
495. Sur l'extension à la propagation de l'électricité des formules de Fourier relatives à la diffusion de la chaleur. A. Cornu. Compt. rend. LXXXVI, 1120.
496. The Thomson effect. J. Trowbridge & C. B. Penrose. Phil. Mag. LXIV, 440.
497. On the electrical resistance of gases. E Edlund. Phil. Mag. LXIII, 200.
498. Action que le soleil exerce sur les fluides magnétiques et électriques de la terre. Quet. Compt. rend. LXXXVI, 808, 1244.
499. De la force électromotrice d'induction qui provient de la rotation du soleil; détermination de sa grandeur et de sa direction, quelle que soit la distance du corps induit. Quet. Compt rend. LXXXVII, 860.
500. On J. J. Thomson's investigation of the electromagnetic action of a moving electrified sphere. G. F. Fitzgerald. Phil Mag. LXIII, 302. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 346.]
501. On Wheatstone's bridge. K. F. Slotte. Phil. Mag. LXIII, 227.

Vergl. Potential 724, 725, 726, 727. Quaternionen.

Elimination.

502. Sur l'élimination. P. Mansion. Compt. rend. LXXXVII, 975.
503. Sur l'élimination. Ch. Biehler. N. ann. math. XLI, 529.
504. Nouvelle méthode pour l'élimination des fonctions arbitraires. R. Minich. Compt. rend. LXXXVII, 161. [Vergl. Nr. 194.]

Ellipse.

505. The radial of an ellipse. L. Tucker. Quart. Journ. math. XVIII, 311.
506. Couper un cône de révolution donné selon une ellipse donnée. H. Lez. N. ann. math. XLI, 410.
507. Construction d'une ellipse et d'une hyperbole ayant les mêmes axes connaissant trois points de leur plan. N. Goffart. N. ann. math. XLI, 424. — Gerono ibid. 425.
508. Lieux géométriques engendrés au moyen d'une ellipse et d'un cercle ayant pour centre le foyer de l'ellipse. H. Cartier. N. ann. math. XLI, 118.

Ellipsoid.

509. Sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde. A. Picart. N. ann. math. XLI, 49.
510. Propriété de trois plans rectangulaires quelconques passant par le centre d'un ellipsoide. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 422.
511. Section d'un ellipsoïde par un cône ayant pour base une section principale de l'ellipsoïde. J. Boudènes N. ann. math. XLI, 180.

Vergl. Oberflächen 688. Potential 726, 728.

Elliptische Transcendenten.

512. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. O. Rausenberger. Crelle XCIII. 328.
513. Sur les développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. D. André. Compt. rend. LXXXVI, 1323.
514. Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art. G. Frobenius Crelle XCIII, 53.
515. Reduction of the elliptic integrals $\int^{\infty}\frac{dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}$ and $\int^{\infty}\frac{z\,dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}$ to Jacobi's functions. A. G. Greenhill. Quart. Journ. math. **XVIII**, 66.
516. Reduction of integrals of the form $\int^{\infty}\frac{z^{m-1}\,dz}{(z^n-c^n)\sqrt{z^n-b^n}}$. G. H. Stuart. Quart. Journ. math. XVIII, 245.
517. Sur la multiplication des fonctions elliptiques. Halphen. Compt. rend. LXXXVIII, 414, 562, 698.
518. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Hermite. Compt. rend. LXXXVI, 271, 422, 622, 777, 850. [Vergl. Nr. 89.]
519. De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. G. Darboux. Compt. rend. LXXXVIII, 1183, 1252.

Vergl. Differentialgleichungen 469 Sphärik 752, 753.

F.

Formen.

520. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. L. Kronecker. Crelle XCIII, 365.
521. Sur la théorie des formes associées de M. M. Clebsch et Gordan. Sylvester. Compt. rend. LXXXVI, 448.
522. Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen. Hermes. Grun. Archiv LXVIII, 432.
523. Sur les conditions pour qu'une forme quadratique de n différentielles puisse être transformée de façon que ses coefficients perdent une partie ou la totalité des variables qu'ils renferment. M Levy. Compt. rend. LXXXVI, 463.

Vergl. Substitutionen 758.

Functionen.

524. Beweis eines Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen. N. Herz. Grun. Archiv LXVIII, 14.
525. Sur une propriété des fonctions entières. E Picard. Compt. rend. LXXXVIII, 1024.
526. Sur les développements des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes du module. D. André. Compt. rend. LXXXVI, 1498. [Vergl. Nr. 126.]
527. Sur une classe de fonctions non uniformes. E. Picard. Compt. rend. LXXXVIII, 852.
528. Sur une classe de fonctions transcendantes. E. Picard. Compt. rend. LXXXVI, 657.

529. Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)] = F(x)$. Appell. Compt. rend. LXXXVIII, 807.

530. Sur les fonctions telles que $F\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) = F(x)$. Appell. Compt. rend. LXXXVIII, 1022.

531. Théorie des sinus des ordres supérieurs. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXVI, 1160, 1216, 1287.

532. Sur les fonctions qui naissent du développement de l'expression

$$(1-2\alpha x+\alpha^2\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}}.$$

Escary. Compt. rend. LXXXVI, 114

533. Sur les fonctions qui naissent du développement de l'expression

$$[1-2\alpha x+\alpha^2\alpha^2]^{\frac{2l+1}{2}}.$$

Escary. Compt. rend. LXXXVI, 1451.

534. Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. Escary. Compt. rend. LXXXVII, 646.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Gammafunctionen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Reihen. Substitutionen. Symmetrische Functionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Unendlich.

G.

Gammafunctionen.

535. Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante. Appell. Compt. rend. LXXXVI, 953.

Geodäsie.

536. On variations in the vertical due to elasticity of the earth's surface. G. H. Darwin. Phil. Mag. LXIV, 409.

Geometrie (descriptive).

537. Premiers éléments de la géométrie descriptive. A. Mannheim. N. ann. math. XLI, 385, 433.

Geometrie (höhere).

538. Sur un principe unique contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque. P. Serret. Compt. rend. LXXXVI, 39, 116.

539. Sur les foyers des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe. P. Serret. Compt. rend. LXXXVIII, 385.

540. Sur l'involution dans les courbes de degré n. P. Serret. Compt. rend. LXXXVII, 643.

541. Transformation par sémi-droites réciproques. Laguerre. N. ann. math. XLI, 542.

542. Zur Construction reciproker Punkte des Dreiecks. E. Hain. Grun. Archiv LXVIII, 442.

543. Théorème sur le quadrilatère gauche. N. ann. math. XLI, 523.

544. Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species. H. Schroeter. Crelle XCIII, 132.

545. Ueber das Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung von der ersten Art. Th. Reye. Crelle XCIII, 81.

546. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades. W. Stahl. Crelle XCIII, 215.

Vergl. Differentialgleichungen 475, 476. Kegelschnitte.

Geometrie (kinematische).

547. Rapport sur un mémoire de M. Haton de la Goupillière relatif aux lignes engendrées dans le mouvement d'une figure plane. De la Gournerie. Compt. rend. LXXXVI, 527. [Vergl. Nr. 5.]

548. Sur un mode de transformation. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXVIII, 1128, 1179.

549. Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXVIII, 1248.

550. Sur la théorie du déplacement. Halphen. N. ann. math. XLI, 296.

551. Sur la cinématique des figures continues sur les surfaces courbes et, en général, dans les variétés planes ou courbes. M. Levy. Compt. rend. LXXXVI, 812.
552. Sur les conditions que doit remplir un espace pour qu'on y puisse déplacer un système invariable, à partir de l'une quelconque de ses positions, dans une ou plusieurs directions. M. Levy. Compt. rend. LXXXVI, 875.
553. Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point. V. Liguine. N. ann. math. XLI, 300. [Vergl. Nr. 419.]
554. Théorème de cinématique. E. Habich. N. ann. math. XLI, 458.

Geschichte der Mathematik.

555. A list of writings on determinants. Th. Muir. Quart. Journ. math. XVIII, 110.
556. Sur la solution de l'équation $Ax^2+1=y^2$. Aristide Marre. Compt. rend. LXXXVIII, 77, 223. — C. Henri ibid. 223.
557. Lettre de Buffon à Laplace sur la certitude morale. Compt. rend. LXXXVIII, 1019.
558. La Thermodynamique et les travaux de Sadi Carnot. H. Carnot. Compt rend. LXXXVII, 967.
559. Sur l'invention des diverses dispositions de l'héliomètre. De la Gournerie. Compt. rend. LXXXVIII, 215.
560. Nécrologue de M. Bienaymé. De la Gournerie. Compt. rend. LXXXVII, 617.
Vergl. Kugelfunctionen 634. Mechanik 660. Zahlentheorie 803.

Gleichungen.

561. Sur la méthode géométrique pour la solution des équations numériques de tous les degrés. L. Lalanne. Compt. rend. LXXXVII, 157.
562. Formulae in the theory of equations. Chr. Hudson. Quart. Journ. math. XVIII, 74.
563. Sur les équations résolvantes. A. E. Pellet. Compt. rend. LXXXVIII, 638.
564. On equal roots of equations. Ch. Hudson Quart. Journ. math. XVIII, 215, 327. — Cayley ibid. 226.
565. Conditions pour que des équations de formes données n'aient pas de racines réelles positives, aient des racines imaginaires, aient au moins deux racines imaginaires Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 368.
566. Détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXVI, 1427.
567. Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. J. Farkas. Compt. rend. LXXXVII, 791, 1027; LXXXVIII, 273, 565.
568. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. L. Kronecker. Crelle XCIII, 338. [Vergl. Nr. 787.]
569. Beitrag zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Th. Sinram. Grun. Archiv LXVIII, 223.
570. Zur Gleichung dritten Grades. Th. Sinram. Grun. Archiv LXVIII, 106.
571. A solvible case of the quintic equation. Cayley. Quart. Journ. math. XVIII, 154.
572. On the Jacobian sextic equation. Cayley. Quart. Journ. math. XVIII, 52.
573. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade, die sich mit Hilfe einer Gleichung vom vierten Grade auflösen lassen. M. Weiss. Grun. Archiv LXVIII, 304.
574. On a theorem of Jacobi's. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XVIII, 313.
575. Sur les équations algébriques de la forme $(x^p-a^p)\psi(x)=0$. Berloty. N. ann. math. XLI, 173.
576. Rationalmachen einer Summe von $2^{q\text{ten}}$ Wurzeln. Stan. Rychlicki. Grun. Archiv LXVIII, 180.
577. Sur les conditions de l'existence d'un nombre déterminé de racines communes à deux équations données. Simonnet. Compt. rend. LXXXVIII, 223.
578. Solution d'un système d'équations linéaires. J. Farkas. Compt. rend. LXXXVII, 523.
579. Résolution d'un système d'équations quadratiques. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 266.
Vergl. Determinanten 459, 460. Elimination.

Graphische Auflösungen.

580. Sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de cosmographie. Ed. Collignon N. ann. math. XLI, 490. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 429.]
581. Sur l'emploi des méthodes graphiques pour la prédiction des occultations ou éclipses. Hatt. Compt. rend. LXXXVI, 303. [Vergl. Nr. 29.]

H.

Homogeneität.

582. Sur l'homogénéité dans les formules de physique. J. Bertrand. Compt. rend. LXXXVI, 916.

Hydrodynamik.

583. Sur la théorie complète de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Guyou. Compt. rend. LXXXVI, 1246.
584. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. Rayleigh. Phil. Mag. LXIV, 184.
585. Ueber die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender, cylindrischer Gleichgewichtsfiguren, durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie. O. Kuntze. Grun. Archiv LXVIII, 273.
586. On the effect upon the ocean-tides of a liquid substratum beneath the earth's crust. O. Fisher. Phil. Mag. LXIV, 213.
587. Recherches de M. Popoff relatives à l'expression des conditions du mouvement des eaux dans les égouts. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVII, 719.
588. Théorie et formules concernant l'action retardatrice des parois des courants liquides. P. Boileau. Compt. rend. LXXXVII, 48, 134.
589. Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressibeln Flüssigkeit. Alb. Schülke. Grun. Archiv LXVIII, 113.
590. Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide, quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVII, 491.
591. Hydroélectricité et hydromagnétisme. Bjerknes. Compt. rend. LXXXVIII, 165, 280. [Vergl. Nr. 205.]

Hyperbel.

592. Propriété de l'hyperbole équilatère passant par quatre points pris arbitrairement sur une circonférence. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 380.
593. Sur des hyperboles variables. H. Lez. N. ann. math. XLI, 122.
Vergl. Ellipse 507.

Hyperboloid.

594. Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite. Eug. Rouché. N. ann. math. XLI, 97.
Vergl. Paraboloid 709.

I.

Imaginäres.

595. Sur une nouvelle représentation des quantités imaginaires. Duport. Compt. rend. LXXXVIII, 1070.
596. Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en mécanique. Appell. Compt. rend. LXXXVII, 1074.
Vergl. Gleichungen 565, 566, 567. Zahlentheorie 786.

Instrumentale Integration.

597. On integrating and other apparatus for the measurement of mechanical and electrical forces. C. V. Boys. Phil. Mag. LXVIII, 77, 193.
598. An integrating anemometer. W. Baily. Phil. Mag. LXIV, 212.

Integration (unbestimmte).

599. Sur quelques intégrales indéfinies. S. Realis. N. ann. math. XLI, 343.
600. Valeur de $\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp (\alpha x + \beta)^2}}$. H. B. D. N. ann. math. XLI, 526.
601. Valeurs de deux intégrales. F. Borletti. N. ann. math. XLI, 376.

Invariantentheorie.

602. Sur la loi de réciprocité des invariants et covariants des quantics binaires. Sylvester. Compt. rend. LXXXVI, 446.
603. Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants irréductibles des formes binaires. Sylvester. Compt. rend. LXXXVI, 1437, 1491.

604. Sur les covariants des formes binaires. C. Jordan. Compt. rend. LXXXVII, 202.
605. Sur les covariants fondamentaux d'un système cubo-quadratique binaire. Sylvester. Compt rend. LXXXVII, 242, 287, 445, 477.
606. Sur les covariants irréductibles du quantic du septième ordre. Sylvester. Compt. rend. LXXXVII, 505, 899.
607. Sur le système complet des invariants et covariants irréductibles appartenant à la forme binaire du huitième degré. Sylvester. Compt. rend. LXXXVI, 1519.

Vergl. Differentialgleichungen 466. Gleichungen 572.

K.

Kegelschnitte.

608. Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques. Halphen. N. ann. math. XLI, 5.
609. Déduction du théorème de Pascal de la propriété fondamentale des polaires. H. Dufau. N. ann. math. XLI, 99.
610. Notiz über das Pascal'sche resp. Brianchon'sche Sechseck. Fr. Gräfe. Crelle XCIII, 184.
611. Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal. E. Brassinne. N. ann. math. XLI, 318.
612. Propriété d'une conique inscrite dans un triangle. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 382.
613. Coniques tangentes aux quatre côtés d'un carré. J. Auzelle. N. ann. math. XLI, 176.
614. Propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques. X. Antomari. N. ann. math. XLI, 102.
615. Lieu des foyers des coniques passant par l'intersection d'une circonférence et de deux droites parallèles données. Moret Blanc. N. ann. math. XLI, 285.
616. Sur l'involution de plusieurs points sur une conique. Weill. N. ann. math. XLI, 62.
617. Construction der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte. J. Streissler. Grun. Archiv LXVIII, 389.
618. Coniques passant par les points d'intersection de deux circonférences et tangente à toutes les deux. N. ann. math. XLI, 351.
619. Coniques passant par les points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole. L Kien. N. ann. math. XLI, 278.
620. Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques. F. Hofmann. N. ann. math. XLI, 321.
621. On harmonically circumscribed conics. C. Taylor. Quart. Journ. math. XVIII, 50. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 411.]
622. Zur Theorie der Kegelschnitte. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXVIII, 78. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 142.]
623. Kegelschnittbüschel-Constructionen. Fr. Bergmann. Grun. Archiv LXVIII, 404.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis.

Kettenbrüche.

624. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. E. Laguerre. Compt. rend. LXXXVII, 820.
625. Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions. E. Laguerre. Compt. rend. LXXXVII, 923.

Kreis.

626. Propriété d'un triangle rectangulaire dont le sommet de l'angle droit est donné tandis que l'hypoténuse est tangente à une circonférence donnée. Lez. N. ann. math. XLI, 428.
627. On the circles which cut orthogonally the inscribed and escribed circles of a triangle. H. Hart. Quart. Journ. math. XVIII, 363.
628. O et O' étant les centres des cercles inscrit et exinscrit d'un triangle ABC on a $AB.AC = AO.AO'$. A. Causse. N. ann. math. XLI, 415
629. Si, par les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences qui se coupent, et par un de leurs points d'intersection, on fait passer une circonférence, son rayon sera moyen géométrique entre les rayons des deux premiers cercles. A. Leblond. N. ann. math. XLI, 379.

630. Propriété de deux points situés en dehors d'une circonférence par rapport à cette circonférence. H. Cartier. N. ann. math. XLI, 426.
631. Relation entre les distances mutuelles: 1° de quatre points situés sur un même cercle; 2° de sinq points situés sur une même sphère. X. Antomari. N. ann. math. XLI, 462.
632. Aires d'un triangle rectangulaire inscrit dans un cercle et d'un trapèze dont un côté est tangent à ce cercle. H. Lez. N. ann. math. XLI, 185.
Vergl. Rectification 733.

Krümmung.

633. Sur une application industrielle du théorème de Gauss relatif à la courbure des surfaces. M. Levy. Compt. rend. LXXXVI, 111.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 420. Analytische Geometrie des Raumes 433. Ellipsoid 509. Oberflächen 681. Optik 698.

Kugelfunctionen.

634. Sur la théorie des fonctions sphériques. Hermite. Compt. rend. LXXXVI, 1515.
635. Sur les développements en séries dont les termes sont les fonctions Y_n de Laplace. A. de Saint-Germain. Compt. rend. LXXXVII, 1186, 1318.
636. On the solution of the equation $(1-x)^2 \frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0$. A. E. Steinthal. Quart. Journ. math. XVIII, 330.

L.

Lemniscate.

637. Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate. H. Resal. N. ann. math. XLI, 481.

M.

Mannichfaltigkeiten.

638. Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 151.
639. Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen. R Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 110. [Vergl. Nr. 255.]
640. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 378.

Mechanik.

641. Remarks on absolute systems of physical units. A. F. Sundell. Phil. Mag. LXIV, 81.
642. Sur un théorème de M. Villarceau. Ph. Gilbert. Compt. rend. LXXXVI, 42. — Cerruti ibid. 300. — J. Lemoyne ibid. 301. [Vergl. Nr. 278.]
643. Sur la composition des accélérations d'ordre quelconque et sur un problème plus général que celui de la composition des mouvements. M. Levy. Compt. rend. LXXXVI, 1068; LXXXVII, 259. — Ph. Gilbert ibid. LXXXVI, 1390. — Laisant ibid. LXXXVII, 204, 377. — Liguine ibid. LXXXVII, 593.
644. Théorèmes sur les accélérations simultanées des points d'un solide en mouvement. Gruey. Compt. rend. LXXXVI, 1241.
645. Chercher la fonction d'attraction qui exige un mouvement demandé d'un point assujetti à rester sur une surface donnée. Gambey. N. ann. math. XLI, 508.
646. Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier. E. Brassinne. N. ann. math XLI, 320.
647. Sur une nouvelle forme des coordonnées dans le problème des deux corps. H. Gylden. Compt. rend. LXXXVIII, 850, 963.
648. Sur un théorème de dynamique. F. Siacci. Compt. rend. LXXXVIII, 909.
649. Sur le mouvement d'un corps qui se déplace et se déforme en restant homothétique à lui-même. G. Fouret. Compt. rend. LXXXVIII, 227.
650. Sur le parallélisme des axes de rotation. G. Sire. Compt. rend. LXXXVIII, 23.
651. On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points. C. Maxwell. Phil. Mag. LXIV, 299.
652. A theorem on the dissipation of energy. S. H. Burbury. Phil. Mag. LXIII, 417.

653. Trouver dans un système articulé à trois tiges le point d'intersection de la dernière tige, de telle sorte que l'on fasse décrire à un point une courbe donnée avec le maximum d'approximation. H. Léauté. Compt. rend. LXXXVIII, 151.
654. Sur les systèmes articulés de Mrs. Peaucellier, Hart & Kempe. V. Liguine. N. ann. math. XLI, 153.
655. Sur la courbe synchrone de la cycloïde. H. Resal. N. ann. math. XLI, 289.
656. Ueber die Aufhängpunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers. Böklen. Crelle XCIII, 177.
657. Lois de rotation d'un tube dans lequel peut se mouvoir un point sous des conditions données par une équation. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 231.
658. On the steady motion of a solid of revolution rolling on a surface of revolution under gravity. A. G. Greenhill. Quart. Journ. math. XVIII, 229. [Vergl Bd. XXVI, Nr. 442.]
659. Deux corps, unis par un fil flexible, étant placés sur deux plans inclinés dont on connait les angles d'inclinaison, étudier le mouvement en tenant compte du frottement. C. Roubaudi. N. ann. math. XLI, 274.
660. Sur un théorème de Pappus. Laquière. N. ann. math. XLI, 110. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 179.]
661. Sur les équations de l'équilibre astatique. A. de Saint-Germain. N. ann. math. XLI, 306.
662. Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionellement aux masses et à une puissance de la distance. A. Legoux. N. ann. math. XLI, 145.
663. Nouvelle propriété de la chainette. H. Resal. N. ann. math. XLI, 515.
664. Position d'équilibre d'un demicercle soutenu par un fil attaché aux extrémités du diamètre. Gambey. N. ann. math. XLI, 254.
665 Théorie des mouvements quasi-circulaires d'un point pesant sur une surface de révolution creuse à axe vertical. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVI, 959. [Vergl. Nr. 272.]
666. Engrenages à épicycloïdes et à développantes. Détermination du cercle à prendre pour le profil des dents. Léauté. Compt. rend. LXXXVI, 1371.
667. Sur un nouveau spiral réglant plat des chronomètres et des montres. Phillips. Compt. rend. LXXXVI, 26.
668. Du spiral réglant sphérique des chronomètres. Phillips. Compt. rend. LXXXVIII, 1147, 1234.
669. Sur la direction des cassures dans un milieu isotrope. Potier. Compt. rend. LXXXVI, 1539.
670. Sur la plus grande des composantes tangentielles de tension intérieure en chaque point d'un solide, et sur la direction des faces de ses ruptures. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVII, 89.
671. Sur la torsion des prismes à base mixtiligne et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVII, 849, 893.
672. Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVIII, 142.
673. Sur l'établissement des arches de pont, réalisant le maximum de stabilité. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXVIII, 45.
674. Enboutissage cylindrique d'un disque circulaire. Tresca. Compt. rend. LXXXVII, 369.

Vergl. Absolute Geometrie. Analytische Geometrie der Ebene 419. Astronomie. Elasticität. Elektrodynamik. Homogeneität. Hydrodynamik. Imaginäres 596. Lemniscate. Molecularphysik. Optik. Pendel. Wärmelehre.

Molecularphysik.

675. Notions concernant le travail intermoléculaire. P. Boileau. Compt. rend. LXXXVI, 378. [Vergl. Nr. 283.]

N.

Nautik.

676. Considérations nouvelles sur l'observation et la réduction des distances lunaires en mer. Beuf & Perrin. Compt. rend. LXXXVI, 758.

677. Observatoires chronométriques pour la marine marchande. Faye. Compt. rend. LXXXVIII, 1143.
678. Emploi de l'ascension droite de la lune, corrigée des erreurs tabulaires, pour déterminer la longitude en mer. Faye. Compt. rend. LXXXVII, 346.
679. Détermination directe en mer de l'azimut de la route d'un navire. Faye. Compt. rend. LXXXVI, 1357.

O.

Oberflächen.

680. Zur Flächentheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 439.
681. Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer zwei Mittelpunktsflächen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 256. — F. August ibid. 315.
682. Sur les conditions pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution. M. Levy. Compt. rend. LXXXVI, 947.
683. Sur les surfaces orthogonales. De Tilly. Compt. rend. LXXXVII, 361.
684. De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXVI, 1254.
685. Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène. M. Levy. Compt. rend. LXXXVII, 788.
686. Die Flächen, deren sämmtliche Normalen eine Kugelfläche berühren. Jul. Vályi. Grun. Archiv LXVIII, 217.
687. Die Schraubenregelfläche. Fr. Schiffner. Grun. Archiv LXVIII, 72.
688. On the parallel surface to the ellipsoid. Th. Craig. Crelle XCIII, 251.
689. On the 27 lines, the 45 tripel tangent planes and the 36 double sixers of a cubic surface, with a hint for the construction of models which give the position of the lines when they are all real. P. Frost. Quart. Journ. math. XVIII, 89.
690. Sur la quartique de Steiner. E. Amigues. Compt. rend. LXXXVI, 38.
691. Discussion d'une surface dont les coordonnées rectangulaires x, y, z sont données en fonctions de deux variables α, β. E. Henry. N. ann. math. XLI, 220.
692. Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde. A. Mannheim. Compt. rend. LXXXVIII, 902.
693 Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde. N. ann. math. XLI, 29.
Vergl. Geometrie (kinematische) 549. Krümmung.

Oberflächen zweiter Ordnung.

694. Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques. Ch. Brisse. N. ann. math. XLI, 207.
695. Erweiterung eines Satzes von Hesse über Sechsecke im Raume. Fr. Graefe. Crelle XCIII, 87.
696. Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second degré. J. Caron. N. ann. math. XLI, 217. — E. Lebon ibid. 219. [Vergl. Nr. 594.]
697. Sur un cône de second ordre, enveloppe decertains plans E. Lebon. N. ann. math. XLI, 269.
Vergl. Determinanten 459. Ellipsoid. Hyperboloid. Paraboloid. Sphärik.

Optik.

698. Measurement of curvature and refractive index. C. W. Boys. Phil. Mag. LXIV, 30.
699. De l'impossibilité de la propagation d'ondes longitudinales persistantes dans l'éther liber ou engagé dans un corps transparent. Pellat. Compt. rend. LXXXVI, 1126.
700. Sur la transformation que subissent les formules de Cauchy, relatives à la réflexion de la lumière à la surface d'un corps transparent, quand on suppose une épaisseur sensible à la couche de transition. Pellat. Compt. rend. LXXXVI, 1325.
701. Sur la polarisation elliptique par réflexion à la surface des corps transparents. A. Cornu. Compt. rend. LXXXVI, 649.
702. Sur la réfraction astronomique. Makarevitsch. Compt. rend. LXXXVI, 821. — Radau ibid. 1011.
703. Recherches sur la double réfraction accidentelle. Macé. Compt. rend. LXXXVI, 826.

704. Interference phenomena in a new form of refractometer. A. A. Michelson. Phil. Mag. LXIII, 236.
705. Nouveau spectroscope à vision directe. Thollon. Compt. rend. LXXXVI, 329, 595.
706. Sur une chambre claire. Pellerin. Compt. rend. LXXXVI, 764.
707. Du pouvoir émissiv des flammes colorées. Gouy. Compt. rend. LXXXVIII, 418.

P.

Parabel.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 434.

Paraboloid.

708. Sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces. A. Picart. N. ann. math. XLI, 163.
709. Paraboloïde circonscrit à un hyperboloïde donné à une nappe sous la condition que le plan de la courbe de contact passe par un point donné. Gambey. N. ann. math. XLI, 245.

Pendel.

710. Remarques sur le pendule M. d'Ocagne. N. ann. math. XLI, 32.
711. Influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule. H. Resal. N. ann. math. XLI, 337.

Planimetrie.

712. Die Seitenproportionalen eines Dreiecks und die Proportionaldreiecke desselben. J. Albers. Grun. Archiv LXVIII, 58.
713. Propriété des points symmétriques d'un point donné par rapport au milieux des trois côtés d'un triangle. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 430.
714. Théorème sur le triangle dans lequel on mène une parallèle à la base, la médiane, la bissectrice et la hauteur. N. ann. math. XLI, 522.
715. Quelle valeur faut-il donner à l'angle A au sommet d'un triangle isoscèle ABC, pour que le quadrilatère, ayant pour sommets les pieds A', B', C' des trois hauteurs du triangle, et le milieu de la droite qui joint leur point de concours au sommet A, soit un parallèlogramme? E. Bénézech. N. ann. math. XLI, 478.
716. Trouver les côtés d'un triangle au moyen de données arithmetiques. F. Borletti. N. ann. math. XLI, 377.
717. Propriétés d'un triangle dont les sommets sont symmétriques au point de concours des hauteurs d'un second triangle par rapport aux côtés de celuici. H. Lez. N. ann. math. XLI, 186.
718. Inscription d'un trapèze isoscèle, se reduisant à un triangle, dans un quadrilatère donné. A Leinekugel. N. ann. math. XLI, 184.
719. Ueber eine Eigenschaft des vollständigen Vierecks. A. Sachse. Grun. Archiv LXVIII, 425.
720. Produit des diagonales dans le quadrilatère inscriptible et circonscriptible. P. V. Sihaewen. N. ann. math. XLI, 330.
721. Théorème sur les perpendiculaires menées par un point du plan d'un polygone quelconque sur les côtés du polygone. H. Barrau. N. ann. math. XLI, 330.

Potential.

722. Sur une manière simple de présenter la théorie du potentiel, et sur la différentiation des intégrales dans les cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVIII, 277.
723. Du potentiel cylindrique ou logarithmique à trois variables, et de son emploi dans la théorie de l'équilibre d'élasticité. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVIII, 701.
724. On functional images of Cartesians. A. G. Greenhill. Quart. Journ. math. XVIII, 231, 346. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 472.]
725. On some consequences of Gauss's principle in electrostatics. Croullebois. Phil. Mag. LXIII, 151.
726. Ellipsoidische Flächenbelegungen, deren Wirkung auf innere Punkte der Richtung und Stärke nach constant ist. St. Glaser. Grun. Archiv LXVIII, 100.
727. Sur un phénomène qui peut s'expliquer par des pressions électriques. D. J. Korteweg. Compt. rend. LXXXVIII, 338.

728. Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. Laguerre. Compt. rend. LXXXVI, 1257.
729. Application des potentiels directs de Lamé au calcul de l'équilibre d'élasticité d'un solide isotrope et homogène indéfini, sollicité dans une étendue finie par des forces extérieures quelconques. J. Boussinesq. Compt. rend. LXXXVIII, 331, 375.

Productenfolge.

730. Sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier p. A. E. Pellet. Compt. rend. LXXXVI, 1071.

Q.

Quadratur.

731. Surface conservant une valeur constante tandis qu'un certain point parcourt une circonférence. J. B. Pomey. N. ann. math. XLI, 331.

Quaternionen.

732. Application du calcul des quaternions à l'électrodynamique. Plarr. Compt. rend. LXXXVI, 1454.

R.

Rectification.

733. Sur la méthode des isopérimètres. E. Rouché. N. ann. math. XLI, 325. — Catalan ibid. 519.
734. Sur le rapprochement de deux arcs de courbes voisins considérés dans une étendue finie. Application au cas d'un cercle et d'un arc de courbe ayant deux sommets voisins. Léauté. Compt. rend. LXXXVI, 1537.
735. Sur la rectification des ovales de Descartes. G. Darboux. Compt. rend. LXXXVIII, 595, 741.
736. Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre. G. Darboux. Compt. rend. LXXXVII, 692.

Reihen.

737. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme. Laguerre. Compt. rend. LXXXVI, 383.
738. Sur un développement d'une fonction en série. J. Marchand. N. ann. math. XLI, 450.
739. Sur un développement en série. E. Picard. Compt rend. LXXXVIII, 167.
740. Sommation de certaines séries. D. André. Compt. rend. LXXXVI, 1017; LXXXVII, 973.
741. Sur la sommation d'une espèce particulière de séries. D. André. Compt. rend. LXXXVIII, 740.
742. Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable. Appell. Compt. rend. LXXXVII, 689.
743. Sur la formule sommatoire de Maclaurin et les fonctions interpolaires. A. Genocchi. Compt. rend. LXXXVI, 466.
744. Sur la formule sommatoire de Maclaurin. O. Callandreau. Compt. rend. LXXXVI, 589.
745. Sommation d'une série remarquable. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLI, 171. [Vergl. Nr. 365.]
746. Sur le développement des logarithmes et des exponentielles. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLI, 241.
747. Développements de $\sec x$ et de $\tang x$. D. André. Compt. rend. LXXXVIII, 965.
748. Sur le développement de $\cot x$. Le Paige. Compt. rend. LXXXVIII, 1075.
749. Démonstration de la convergence d'une série double rencontrée par Lamé dans ses recherches de physique mathématique. Escary. Compt. rend. LXXXVIII, 558.
750. Rapport de deux séries numériques. H. J. Krantz. N. ann. math. XLI, 419.

Vergl. Kugelfunctionen 636.

S.

Singularitäten.

751. Sur la détermination du nombre des points doubles d'un lieu défini par des conditions algébriques. Saltel. Compt. rend. LXXXVIII, 329.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 422, 423, 424, 426, 427.

Sphärik.

752. On the spherical triangle proof of the addition equation in elliptic functions. W. W. Johnson. Quart. Journ. math. XVIII, 365.
753. Ueber zwei Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind. R. v. Lilienthal. Crelle XCIII, 237.
754. On spherical curves of the fourth class with quadruple foci. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XVIII, 270.
755. Théorème sur deux sphères. H. Faure. N. ann. math. XLI, 472.

Vergl. Kreis 631.

Stereometrie.

756. Sur les figures isocèles. A. Badoureau. Compt. rend. LXXXVII, 823.

Vergl. Cubatur. Mannichfaltigkeiten.

Substitutionen.

757. Ueber die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen. E. Schröder. Grun. Archiv LXVIII, 353.
758. Sur l'équivalence des formes algébriques. C. Jordan. Compt. rend. LXXXVIII, 906.
759. Ueber diejenigen Functionen von sechs Variabeln, welche die Eigenschaft haben, bei Vertauschung derselben nur sechs verschiedene Werthe anzunehmen, ohne in Bezug auf fünf derselben symmetrisch zu sein. O. Dziobek. Grun. Archiv LXVIII, 225.

Symmetrische Functionen.

760. Ueber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen. C. Kostka. Crelle XCIII, 89.

T.

Thetafunctionen.

761. Kurze Ableitung der Riemann'schen Thetaformel. F. Prym. Crelle XCIII, 124.
762. Sur les caractéristiques des fonctions Θ. C. Jordan Compt. rend. LXXXVIII, 1020, 1068.

Trigonometrie.

763. Propriété de quatre droites partant d'un point et coupant une circonférence donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. XLI, 267.
764. Théorèmes sur les projections orthogonales sur un plan passant par le point d'intersection de trois axes rectangulaires de trois longueurs égales portées sur ces trois axes. F. Pisani. N. ann. math. XLI, 371. — Gerono ibid. 371

Vergl. Differenzengleichungen. Graphische Auflösung 580.

Trisection des Winkels.

765. Ein Beitrag zur Trisection des Winkels. M. Rusch. Grun. Archiv LXVIII, 442.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

766. Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques. C. W. Borchardt. Compt. rend. LXXXVIII, 834.
767. Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale. N. Herz. Grun. Archiv LXVIII, 196.
768. Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliquées deux fois de suite, produisent la duplication. C. W. Borchardt. Compt. rend. LXXXVIII, 885, 955.
769. Ueber Integrale zweiter Gattung. J. Thomae. Crelle XCIII, 69.

Unendlich.

770. Infinitärer Hauptwerth und approximative Entwickelung. R. Hoppe. Grun. Archiv LXVIII, 37. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 18.]

W.

Wärmelehre.

771. On the theoretic determination of vapour-pressure and the volumes of vapour of liquid. R. Clausius. Phil. Mag. LXIII, 132. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 477.]

772. Mémoire sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. M. Levy. Compt. rend. LXXXVII, 449, 488, 554, 649, 676, 826. — H. F. Weber ibid. 517. — L. Boltzmann ibid. 593, 773. — Clausius ibid. 718. — Massieu ibid. 731.
773. Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXVII, 713.
774. Définition de la température pour la longueur de l'oscillation calorifique des molécules d'un corps. R. Pictet. Compt. rend. LXXXVIII, 855.
775. Détermination de la température d'un milieu insolé. Aymonnet. Compt. rend. LXXXVII, 23.
776. On the distribution of the molecular velocities in gases. C. Cellérier. Phil. Mag. LXIII, 47.
777. De la détermination des chaleurs spécifiques, à pression constante et à volume constant, d'un corps quelconque et de celle de sa fonction caractéristique. Phillips. Compt. rend. LXXXVI, 1290, 1351. — M. Levy ibid. 1391.
778. On the motion of a spherical atom in an ideal gas. G. Lübeck. Phil. Mag. LXIV, 157.
779. On a property of the isentropic curve for a perfect gas as drawn upon the thermodynamic surface of pressure, volume and temperature. Fr. E. Nipher. Phil. Mag. LXIV, 233.
780. On the compressibility of gases. E. Sarrau. Phil. Mag. LXIII, 306.
781. Sur la définition de la solution simple. Em. Mathieu. Compt. rend. LXXXVI, 962.
782. On the influence of the quantity of gas dissolved in a liquid upon its surface tension. S. Wroblewski. Phil. Mag. LXIV, 286.
783. Sur les forces élastiques des vapeurs émises par un mélange de deux liquides. E. Duclaux. Compt. rend. LXXXVI, 592.
784. On the law of radiation. J. Violle. Phil. Mag. LXII, 225.
Vergl. Geschichte der Mathematik 558.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

785. De l'emploi de la géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilité. L. Lalanne. Compt. rend. LXXXVII, 355.
Vergl. Geschichte der Mathematik 557.

Z.

Zahlentheorie.

786. De unitatibus complexis. L. Kronecker. Crelle XCIII, 1.
787. Zur Theorie der arithmetischen Functionen, welche von Jacobi $\psi(\alpha)$ genannt werden. Schwering. Crelle XCIII, 334. [Vergl. Nr. 568.]
788. Démonstration de diverses propositions arithmétiques de Mr. Lionnet. Moret-Blanc N. ann. math. XLI, 357. — Catalan ibid. 520.
789. Sur une propriété arithmétique d'une certaine série de nombres entiers. Sylvester. Compt. rend. LXXXVIII, 1297.
790. Théorèmes d'analyse indéterminée. Pepin. Compt. rend. LXXXVIII, 1255.
791. Théorèmes sur les nombres premiers. F. Proth. Compt. rend. LXXXVII, 374, 926.
792. Sur la formule $2^n - 1$. Pepin. Compt. rend. LXXXVI, 307.
793. Trouver les nombres pairs et positifs qui soient d'autant de manières la somme de deux impairs premiers que celle de deux impaires composées. Lionnet. N. ann. math. XLI, 471. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 645.]
794. Résolution des systèmes de congruences linéaires. D. Demeczky de Gyergyoszentmiklos. Compt. rend. LXXXVIII, 1311.
795. Polygones arithmétiques. J. Romero. N. ann. math. XLI, 46.
796. Bildungsgesetz periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen. K. Broda. Grun. Archiv LXVIII, 85.
797. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques. E. Schering. Compt. rend. LXXXVIII, 1073.
798. Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en sommes quadratiques binaires; application à l'analyse indéterminée. E. de Jonquières. Compt. rend. LXXXVII, 399.
799. Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques. G. Oltramare. Compt. rend LXXXVII, 734.

800. Sur l'emploi des identités algébriques dans la résolution, en nombres entiers, des équations d'un degré supérieur au second. Desboves. Compt. rend. LXXXVII, 159, 321.
801. Rendre $At^3 + Bu^2 + C$ divisible par 7; A, B, C étant trois nombres entiers, positifs ou négatifs, non divisibles par 7. Moret-Blanc N. ann. math. XLI, 475.
802. Équation du quatrième degré qui ne peut avoir de racine entière. S. Realis. N. ann. math. XLI, 426.
803. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^4 + by^4 = cz^2$. Desboves. Compt. rend. LXXXVII, 522, 598, 925.
804. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^4 + by^4 + dx^2y^2 + fx^3y + gxy^3 = cz^2$. Desboves. Compt. rend. LXXXVII, 638, 762.
805. Sur la congruence $At^m + Bu^n \equiv 0 \pmod{p}$, p étant premier et aucun des nombres A, B, C n'étant divisible par p. A. E. Pellet. Compt rend. LXXXVIII, 417.

Vergl. Combinatorik 453. Formen. Geschichte der Mathematik 556. Productenfolge.

Berichtigung.

Im 28. Jahrg. 4. Heft S. 255 Z. 25 v. u. lies „geradlinigen“ statt abwickelbaren.


GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY
B000293802

